

## ВАКУУМНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМЕ АТОМ–ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МИКРОСФЕРА

*В. В. Климов\*, В. С. Летохов*

*Институт спектроскопии Российской академии наук  
142092, Троицк, Московская область, Россия*

*\* Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117294, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 1996 г.

Найдены выражения для вакуумного расщепления уровней в системе двухуровневый атом–диэлектрическая микросфера, которые совпадают с выражениями, полученными в рамках чисто классического подхода.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время развитие технологии позволяет создавать различные структуры (микросферы, острые иглы [1]) с характерными размерами в сотни и даже десятки нанометров, в связи с чем большую актуальность приобретает исследование оптических явлений вблизи наноструктур.

Оптика наноструктур является весьма специфичной областью оптики и спектроскопии, так как имеет дело с объектами, размеры которых сравнимы или даже меньше длины волны. Это обстоятельство приводит к тому, что многие понятия обычной оптики и спектроскопии претерпевают здесь существенное изменение.

Одним из наиболее интересных направлений в этой области является проблема исследования изменения спектроскопических характеристик атома вблизи наноструктур. При этом, если ограничиться первыми порядками теории возмущений, формальное квантовомеханическое решение проблемы может быть найдено как для сдвига уровней [2], так и для изменения ширины линии [3]. В [4] эта проблема была рассмотрена применительно к атому вблизи диэлектрической микросферы и найдены сдвиг частоты и изменение ширины линии.

Более интересным представляется случай сильной электромагнитной связи, когда теория возмущений неприменима. В этом случае возможно возникновение такой ситуации, когда излучение атома поглощается резонатором, а излучение резонатора поглощается атомом, т. е. возникает расщепление Раби. С общей точки зрения этот вопрос был изучен в ряде работ (см., например, [3, 5]). Применительно к конкретным ситуациям рассмотрение эффекта является сложной задачей. В работе [6] было рассчитано вакуумное расщепление Раби в модельной задаче, когда взаимодействие атома со сферой аппроксимируется равномерным распределением по сфере диэлектрической проницаемости с резонансными свойствами, причем сила связи атома со сферой регулируется путем изменения величины резонансной части диэлектрической проницаемости.

В [4, 7] изучалась классическая задача о резонансном влиянии диэлектрической микросферы на радиационные свойства осциллятора, расположенного вблизи ее поверх-

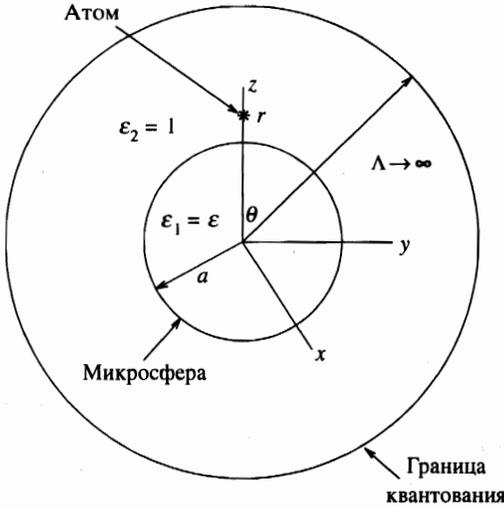


Рис. 1. Геометрия задачи

ности. В настоящей работе мы рассмотрим этот вопрос с квантовой точки зрения на примере взаимодействия двухуровневого атома с резонансными модами диэлектрической микросферы. Геометрия задачи показана на рис. 1.

**2. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ МИКРОСФЕРЫ**

Для решения этой задачи прежде всего требуется корректное квантование электромагнитного поля. В целом эта процедура хорошо известна, однако в каждом конкретном случае необходим особый подход. В нашей задаче в качестве объема квантования можно рассмотреть идеально проводящую сферу конечного, но большого радиуса  $\Lambda \rightarrow \infty$  (см. рис. 1). Разложение электромагнитного поля и его векторного потенциала по полной системе собственных функций классической задачи может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \sum_s \frac{a_s - a_s^+}{i\sqrt{2}} \mathbf{e}(s, \mathbf{r}), & \mathbf{B} &= \sum_s \frac{a_s + a_s^+}{\sqrt{2}} \mathbf{b}(s, \mathbf{r}), \\
 \mathbf{A} &= -\frac{c}{\omega_s} \sum_s \frac{a_s + a_s^+}{\sqrt{2}} \mathbf{e}(s, \mathbf{r}), \\
 [\nabla \mathbf{e}(s, \mathbf{r})] &= -\frac{\omega_s}{c} \mathbf{b}(s, \mathbf{r}).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $a_s, a_s^+$  — коэффициенты уничтожения и рождения фотонов в соответствующих модах с обычными соотношениями коммутации, а  $\omega_s$  — частоты этих мод.

В случае интересующих нас *TM*-мод для  $\mathbf{e}(s, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{b}(s, \mathbf{r})$  легко получить их выражения (см., например, [8]) через сферические гармоники  $Y$  и сферические функции Ханкеля  $h$  [9]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}(n, m, \nu) &= \left[ \alpha_{TM,n}^{(1)} h_n^{(1)}(kr) + \alpha_{TM,n}^{(2)} h_n^{(2)}(kr) \right] \hat{\mathbf{L}} Y_{nm}(\vartheta, \varphi), & r > a, \\
 \mathbf{e}(n, m, \nu) &= -\frac{1}{k} [\nabla \mathbf{b}(n, m, \nu)].
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Здесь  $k = \omega_s/c$  — волновой вектор вне сферы,  $s = (n, m, \nu)$ ,  $n$  — орбитальное квантовое число,  $m$  — азимутальное,  $\nu$  — радиальное,  $L = -i[\mathbf{r}\nabla]$  — оператор углового момента,  $a$  — радиус микросферы. Внутри микросферы имеют место аналогичные представления с заменой сферических функций Ханкеля  $h_n$  на сферическую функцию Бесселя  $j_n$  и заменой  $\alpha_{TM,n}^{(1,2)}$  на  $\beta_{TM,n}$ .

Коэффициенты  $\alpha_{TM,n}^{(1,2)}$  и  $\beta_{TM,n}$  находятся обычным образом из условия непрерывности тангенциальных компонент поля на границе сферы и нормировки волновых функций в сфере радиуса  $\Lambda$  на один фотон в моде:

$$\begin{aligned} \alpha_{TM,n}^{(1)} &= \left[ \varepsilon \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(2)}(z_2)] j_n(z_1) - \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(2)}(z_2) \right] \frac{iz_2 \beta_{TM,n}}{2\varepsilon}, \\ \alpha_{TM}^{(2)} &= - \left[ \varepsilon \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(1)}(z_2)] j_n(z_1) - \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(1)}(z_2) \right] \frac{iz_2 \beta_{TM,n}}{2\varepsilon}, \\ \left| \alpha_{TM,n}^{(1)} \right|^2 &= \left| \alpha_{TM,n}^{(2)} \right|^2 = \frac{2\pi\hbar c}{\Lambda} \frac{k^3}{n(n+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) и далее  $z_1 = \sqrt{\varepsilon} ka$ ,  $z_2 = ka$ ,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость микросферы. Обратим внимание на то, что при нормировке волновых функций вклад от области внутри диэлектрической микросферы пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от области с  $r \sim \Lambda$ .

Для нахождения эффективной амплитуды моды необходимо также знать плотность конечных состояний. Требование исчезновения тангенциальных компонент электрического поля на внутренней поверхности этой сферы приводит к трансцендентному уравнению

$$\left. \frac{d}{dr}(rZ) \right|_{r=\Lambda} = 0, \quad (4)$$

$$Z = \left[ \alpha_{TM,n}^{(1)} h_n^{(1)} \left( \frac{\omega_s}{c} r \right) + \alpha_{TM,n}^{(2)} h_n^{(2)} \left( \frac{\omega_s}{c} r \right) \right],$$

которое имеет асимптотические решения

$$\omega_s = \left( \nu + \frac{n+1}{2} \right) \frac{\pi c}{\Lambda} + \dots \quad (5)$$

Отсюда следует, что плотность конечных состояний будет описываться простым выражением

$$\rho_{TM}(\omega) = \frac{\Lambda}{\pi\hbar c}. \quad (6)$$

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ АМПЛИТУДЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ РЕЗОНАНСНОЙ МОДЫ И ЭФФЕКТИВНОЙ ЧАСТОТЫ РАБИ

В наиболее интересном случае резонансного взаимодействия атома с одной из долгоживущих мод электромагнитного поля в микросфере (так называемые моды шепчущих галерей [10]) эффективный гамильтониан дипольного взаимодействия атома и излучения [11] может быть представлен в виде

$$H = H_A + H_F + H_I, \quad (7)$$

где гамильтонианы атома  $H_A$ , поля  $H_F$  и взаимодействия  $H_I$  для рассматриваемого нами двухуровневого атома имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_3, \\ H_F &= \hbar\omega_{res} \left[ a^+a + \frac{1}{2} \right], \\ H_I &= -\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{E}} = -\mathbf{e}\mathbf{d}\sigma_3 \frac{a - a^+}{i\sqrt{2}} = \hbar\Omega_R\sigma_{1i}(a - a^+). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $a^+$  и  $a$  — обычные операторы рождения и уничтожения фотонов с частотой  $\omega_{res}$  в резонансной моде микросферы,  $\mathbf{e}$  — амплитуда резонансной моды,  $\mathbf{d}$  — матричный элемент дипольного момента, а  $\sigma_1, \sigma_3$  — матрицы Паули:

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Частота Раби  $\Omega_R$  в (8) определяется обычным образом через дипольный момент перехода  $\mathbf{d}$  и амплитуду электрического поля в резонансной моде:

$$\Omega_R = \frac{d\mathbf{e}}{\sqrt{2}\hbar}. \quad (10)$$

Частоту резонансной моды  $\omega_{res}$  и величину дипольного момента перехода  $d$  следует считать равными их значениям в случае отсутствия взаимодействия. Что касается частоты атомного перехода  $\omega_A$ , то кажется логичным учесть в ней сдвиг, обусловленный чисто электростатическим взаимодействием с микросферой [4, 7]:

$$\begin{aligned} \omega_A^2 &= \omega_0^2 - \delta\omega_0^2, \\ \delta\omega_0^2 &= \frac{3}{8} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\gamma_0\omega_0}{[k_0(r - a)]^3}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11)  $\omega_0, \gamma_0$  — частота перехода и ширина линии в случае отсутствия микросферы,  $k_0 = \omega_0/c$ .

В (8) энергия взаимодействия выражена через амплитуду резонансной моды. Однако ширина резонансной линии конечна, и необходимо учесть вклад всех дискретных мод  $\omega_s$ , попадающих в резонансный контур (см., рис. 2), в том числе мод, вырожденных по азимутальному углу. В настоящей работе учет всех мод проводится путем их среднеквадратичного усреднения. Полученные результаты подтверждают корректность такого подхода.

Если рассматривать в качестве конкретного примера случай, когда элемент дипольного момента перехода ориентирован вдоль радиуса, то возможно взаимодействие лишь с  $TM$ -модами диэлектрической микросферы, и, следовательно, нужно рассмотреть среднее от квадрата радиальной компоненты электрического поля в  $TM$ -моде.

Интересующая нас радиальная компонента  $s$ -й  $TM$ -моды легко находится из выражения (2):

$$e_r(n, m, \nu) = -\frac{in(n+1)}{kr} \left[ \alpha_{TM,n}^{(1)} h_n^{(1)}(kr) + \alpha_{TM,n}^{(2)} h_n^{(2)}(kr) \right] Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (12)$$

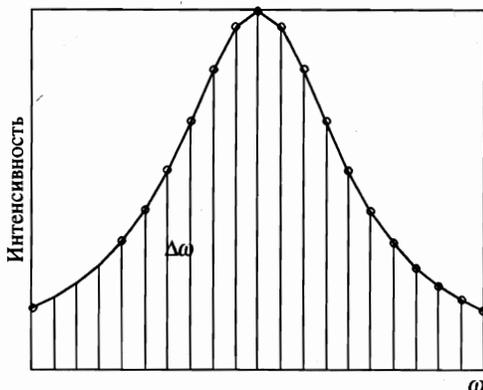


Рис. 2. Распределение квантованных частот по резонансному контуру. Расстояние между дискретными линиями  $\hbar\Delta\omega = 1/\rho(\omega) = \pi\hbar c/\Lambda$

Суммируя квадрат модуля (12) по азимутальному квантовому числу  $m$  с помощью известного соотношения

$$\sum_m Y_{nm}^2 = \frac{2n+1}{4\pi},$$

для среднего квадрата электрического поля всех вырожденных  $TM$ -мод получаем выражение

$$\overline{E}_{r, TM}^2 = n(n+1)(2n+1) \frac{2k\hbar c}{\Lambda r^2} |j_n(kr) - q_n h_n^{(1)}(kr)|^2, \tag{13}$$

где  $q_n$  — коэффициент Ми,

$$q_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_{TM,n}^{(1)}}{\alpha_{TM,n}^{(2)}} \right) = \frac{\left[ \varepsilon \frac{d}{dz_2} [z_2 j_n(z_2)] j_n(z_1) - \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] j_n(z_2) \right]}{\left[ \varepsilon \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(1)}(z_2)] j_n(z_1) - \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(1)}(z_2) \right]}. \tag{14}$$

В предположении резонансного взаимодействия атома и микросферы, выражение для коэффициента Ми можно представить в виде

$$q_n \approx -i \frac{\text{Im } \Omega_{res}}{\omega - \Omega_{res}}, \tag{15}$$

где  $\Omega_{res}$  — комплексная частота, характеризующая резонансную моду:  $\Omega_{res} = \omega_{res} - i\Gamma_{res}^{(n)}/2$ , а  $\Gamma_{res}^{(n)}$  характеризует ширину резонансной моды.

Используя элементарные соотношения, выражение (13) легко привести к виду

$$\overline{E}_{r, TM}^2 = n(n+1)(2n+1) \frac{2k\hbar c}{\Lambda r^2} [j_n^2(kr) - \text{Re} (q_n (h_n^{(1)})^2(kr)^2)]. \tag{16}$$

Полученное выражение связано лишь с вырожденными модами одной из дискретных частот  $\omega_s$  (см. (5) и рис. 2). Для получения эффективного значения электрического поля, связанного с модой, следует просуммировать  $\overline{E}_{r, TM}^2$  по всем частотам внутри

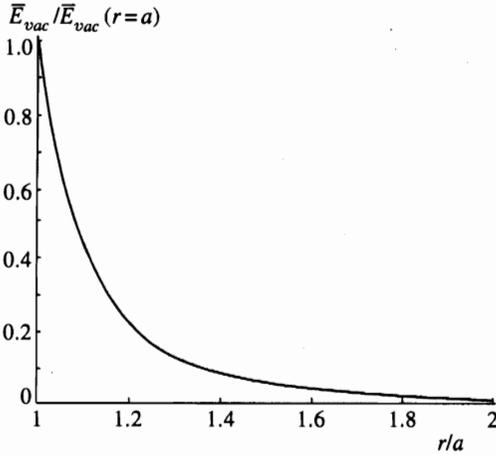


Рис. 3. Зависимость эффективного электрического поля от радиуса ( $TM$ -мода,  $n = 9$ ,  $\varepsilon = 6$ ,  $k_{res} a = 5.548731$ )

рассматриваемой моды, т. е. окончательное выражение для квадрата эффективного значения амплитуды моды следует записать в виде

$$\overline{E}_{vac}^2 = \int_{\omega_{res}-\Delta\omega}^{\omega_{res}+\Delta\omega} \overline{E}_{r,TM}^2(\omega) \rho(\omega) d\omega, \quad (17)$$

где  $\Delta\omega \sim \Gamma_{res}^{(n)}$  определяет интервал усреднения. Эффективная частота Раби будет соответственно выглядеть как

$$\Omega_R = \frac{d\overline{E}_{vac}}{\sqrt{2}\hbar}. \quad (18)$$

После подстановки (15) в (16) интегрирование во втором члене в (16) можно распространить на интервал от  $-\infty$  до  $\infty$ , в результате чего получаем окончательное выражение для среднего квадрата электрического поля:

$$\overline{E}_{vac}^2 = n(n+1)(2n+1) \frac{\hbar \Gamma_{res}^{(n)}}{2r^3} \left[ Y_{n+1/2}^2(k_{res}r) + J_{n+1/2}^2(k_{res}r) \left( \frac{4\Delta\omega}{\pi \Gamma_{res}^{(n)}} - 1 \right) \right], \quad (19)$$

где  $J_n$ ,  $Y_n$  — функции Бесселя соответственно первого и второго родов [9], а  $k_{res} = \omega_{res}/c$ . Для долгоживущих мод значение  $n$  велико и член с  $J_n^2$  мал по сравнению с членом  $Y_n^2$ . Более того, выбирая интервал частотного усреднения

$$\Delta\omega = \frac{\pi \Gamma_{res}^{(n)}}{4}, \quad (20)$$

можно обратить член с  $J_n^2$  в нуль тождественно, в результате чего выражение для эффективной среднеквадратичной амплитуды резонансной моды примет вид

$$\overline{E}_{vac}^2 = n(n+1)(2n+1) \frac{\hbar \Gamma_{res}^{(n)}}{2r^3} Y_{n+1/2}^2(k_{res}r). \quad (21)$$

На рис. 3 показана зависимость квадрата эффективной амплитуды моды в зависимости от расстояния от микросферы до атома для  $TM$ -резонанса с  $n = 9$ ,  $\varepsilon = 6$  и  $k_{res} a = 5.5487$ .

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ И  
ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

После того как эффективная частота Раби найдена, задача сводится к диагонализации гамильтониана (8), который в представлении чисел заполнения имеет вид

$$H/\hbar = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{res} + \omega_A}{2} & 0 & 0 & i\Omega_R & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\omega_{res} - \omega_A}{2} & i\Omega_R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\omega_{res} + \omega_A}{2} & \dots & 0 & i\sqrt{n+1}\Omega_R \\ 0 & -i\Omega_R & \dots & \frac{(2n+1)\omega_{res} - \omega_A}{2} & i\sqrt{n+1}\Omega_R & 0 \\ -i\Omega_R & \dots & 0 & -i\sqrt{n+1}\Omega_R & \frac{(2n+3)\omega_{res} + \omega_A}{2} & 0 \\ \dots & 0 & -i\sqrt{n+1}\Omega_R & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}. \quad (22)$$

В приближении вращающейся волны, справедливом при малости частоты Раби, вместо (22) имеем матрицу

$$H/\hbar = \begin{bmatrix} \frac{\omega_{res} + \omega_A}{2} & 0 & 0 & i\Omega_R & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\omega_{res} - \omega_A}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\omega_{res} + \omega_A}{2} & \dots & 0 & i\sqrt{n+1}\Omega_R \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(2n+1)\omega_{res} - \omega_A}{2} & 0 & 0 \\ -i\Omega_R & \dots & 0 & 0 & \frac{(2n+3)\omega_{res} + \omega_A}{2} & 0 \\ \dots & 0 & -i\sqrt{n+1}\Omega_R & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (23)$$

диагонализация которой элементарна. В результате структура энергетического спектра рассматриваемой системы имеет вид

$$E_{g0} = -\frac{\hbar}{2}(\omega_A - \omega_{res}), \quad (24)$$

$$E_{\pm, n} = (n+1)\hbar\omega_{res} \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{(\omega_A - \omega_{res})^2 + 4\Omega_R^2(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Выражение (24) вместе с выражениями для эффективной частоты Раби (18) и эффективной амплитуды поля (21) является полным решением задачи нахождения энергетического спектра системы двухуровневый атом-диэлектрическая микросфера.

Для вакуумного расщепления Раби частоты перехода из первого возбужденного в основное состояние из (24) легко получить выражение

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_A + \omega_{res}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_A - \omega_{res})^2}{4} + \Omega_R^2}. \quad (25)$$

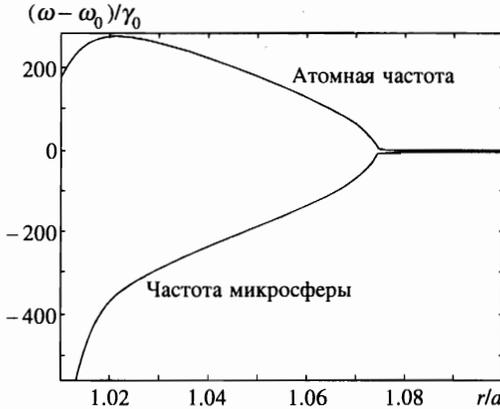


Рис. 4. Зависимость относительного сдвига частоты от положения радиально осциллирующего атома (при  $k_0 a = 5.548733$ ,  $\omega_0/\gamma_0 = 10^7$ ) для диэлектрической сферы с  $\varepsilon = 6$ ,  $n = 9$ ,  $k_{res} a = 5.548731$

Для определения физического смысла этих частот следует использовать то обстоятельство, что при уменьшении взаимодействия между атомом и сферой ( $r \rightarrow \infty$ ) одно из решений стремится к частоте атомного перехода в свободном пространстве ( $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ ), а другое — к частоте резонанса в микросфере ( $\omega_2 \rightarrow \omega_{res}$ ).

В качестве наглядной иллюстрации полученных результатов на рис. 4 показана зависимость расщепления частот от расстояния до микросферы.

Замечательной особенностью выражения (25) является то, что оно с точностью до несущественных малых членов совпадает с выражением, которое можно получить из чисто классических соотношений [4, 7] путем обычной замены  $d_{quantum}^2 \leftrightarrow \bar{d}_{class}^2/2$ , и, таким образом, весь анализ расщепления Раби энергетического спектра, выполненный в [4, 7], может быть перенесен без изменений на квантовый случай. С другой стороны, это совпадение свидетельствует о корректности предложенной процедуры нахождения эффективной модовой амплитуды.

Определение диссипативных характеристик рассматриваемой системы может быть проделано с помощью матрицы плотности [3].

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований (грант 96-02-19753) и Министерству обороны США (через посредство Университета Аризоны) за финансовую поддержку данной работы.

## Литература

1. D. W. Pohl and D. Courjon, *Near Field Optics*, ed. by Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1992).
2. J. M. Wylie and J. E. Sipe, *Phys. Rev. A* **30**, 1185 (1984); **32**, 2030 (1985).
3. S. Haroche, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Elsevier Sci. Publ. Amsterdam (1992), p. 771.
4. V. V. Klimov, M. Ducloy, and V. S. Letokhov, submitted to *J. Mod. Opt.* (1996).
5. А. Н. Ораевский, *УФН* **164**, 415 (1994).
6. S. Dutta Gupta and Girish S. Agarwal., *Opt. Comm.* **115**, 597 (1995).
7. V. V. Klimov, V. S. Letokhov, and M. Ducloy, submitted to *J. Mod. Opt.*
8. J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, New York (1975).
9. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
10. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны*, Радио и связь, Москва (1988).
11. E. Power and T. Thiuamachndran, *Phys. Rev. A* **25**, 2473 (1982).