

ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

И. М. Сулов

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июня 1996 г.

Получены асимптотически точные результаты для средней функции Грина и плотности состояний неупорядоченной системы для перенормируемого класса моделей (в отличие от решеточных моделей, рассмотренных ранее [6]). При $N \sim 1$ (N — порядок теории возмущений) учитываются лишь паркетные члены, соответствующие старшим степеням больших логарифмов. При больших N этого приближения недостаточно ввиду более высокой скорости роста по N коэффициентов при низших степенях логарифмов. Последние коэффициенты определяются из условия перенормируемости теории, выраженного в форме уравнения Каллана–Симанчика, с использованием асимптотики Липатова в качестве граничных условий. При вычислении собственной энергии при конечных импульсах используется модификация паркетного приближения, позволяющая проводить вычисления в произвольном конечном логарифмическом приближении с учетом главной асимптотики по N коэффициентов разложения. Показано, что точка фазового перехода смещается в комплексную плоскость, обеспечивая регулярность плотности состояний при всех энергиях и обход «ложного» полюса, происходящий так, что эффективное взаимодействие остается логарифмически слабым.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о вычислении средней функции Грина, определяющей плотность состояний, для уравнения Шредингера с гауссовским случайным потенциалом математически эквивалентна задаче о фазовом переходе второго рода с n -компонентным параметром порядка $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ в пределе $n \rightarrow 0$ [1, 2]; коэффициенты в гамильтониане Гинзбурга–Ландау

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} c |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{4} g_0 |\varphi|^4 \right\} \quad (1)$$

связаны с параметрами неупорядоченной системы соотношениями

$$c = 1/2m, \quad \kappa_0^2 = -E, \quad g_0 = -W^2 a_0^d / 2, \quad (2)$$

где d — размерность пространства, m — масса частицы, E — энергия, отсчитанная от нижней границы затравочного спектра, W — амплитуда случайного потенциала, a_0 — постоянная решетки (в дальнейшем $c = 1$, $a_0 = 1$). «Неправильный» знак коэффициента при $|\varphi|^4$ приводит к проблеме «ложного» полюса [3], и возможность построения ϵ -разложения вблизи размерности пространства $d = 4$ долгое время вызывала сомнения [4]. Обнадешивающие результаты в этом направлении получены в недавних работах автора [5, 6].

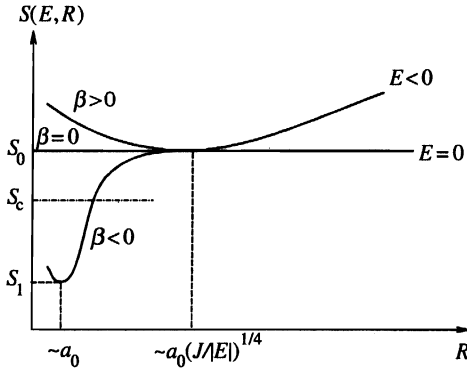


Рис. 1. Зависимость функции $S(E, R)$ от R при $E = \text{const}$ для $d = 4$

Согласно [6] при $d = 4$ существуют два принципиально различных класса моделей, выявляющихся при оценках методом оптимальной флуктуации [7, 8]. Вероятность $P(E, R)$ возникновения уровня энергии $E < 0$ за счет флуктуации потенциала с характерным размером R имеет вид

$$P(E, R) \sim \exp \{-S(E, R)\}, \tag{3}$$

где $S(E, R) \sim W^{-2} \gg 1$. Полная вероятность $P(E)$ возникновения уровня E , определяющая плотность состояний $\nu(E)$, получается интегрированием (3) по R , что в перенормированном приближении сводится к замене R на R_0 – точку минимума функции $S(E, R)$; при $d < 4$ и $d > 4$ имеем соответственно $R_0 \sim |E|^{-1/2}$ и $R_0 \sim a_0$ [5, 6]. При $d = 4$ (рис. 1) функция $S(E, R) = \text{const} = S_0$ при $E = 0$ и ситуация близка к вырождению: при больших R вырождение снимается за счет конечности E , $S(E, R) - S_0 \sim E^2 R^d$, при малых R существенно отклонение спектра $\epsilon(k)$ от квадратичного. Если $\epsilon(k) = k^2 + \beta k^4$, то при $\beta > 0$ функция $S(E, R)$ отклоняется от значения S_0 вверх, обеспечивая появление минимума при $R_0 \sim |E|^{-1/4}$, а при $\beta < 0$ – вниз, и минимум достигается при $R_0 \sim a_0$ [6]; поэтому модели с $\beta > 0$ и $\beta < 0$ дают различную асимптотику флуктуационного хвоста при $E \rightarrow -\infty$. При небольших отрицательных E граница между двумя типами моделей смещается и перестает быть резкой, так как при интегрировании (3) по R возникает конкуренция вкладов от минимума S_1 и более высоколежащего плато $S(E, R) = S_0$, ширина которого неограниченно увеличивается при уменьшении $|E|$:

$$P(E) \sim \nu(E) \sim e^{-S_1} + \left(\frac{J}{|E|}\right)^\alpha e^{-S_0}, \tag{4}$$

где $J \sim 1/ma_0^2 \sim 1$. При увеличении S_1 доминирование второго члена (вклада плато) возникает раньше, чем S_1 сравнивается с S_0 . Прямое интегрирование (3) по R дает индекс $\alpha = 1/2$ [6], что нельзя воспринимать серьезно, так как точность метода не позволяет оценивать предэкспоненту; точное значение α равно $1/3$ (см. ниже).

Затухание Γ , определяемое мнимой частью собственной энергии $\Sigma(p, \kappa)$ при $p = 0$ (κ – перенормированное значение величины κ_0), в области применимости метода оптимальной флуктуации пропорционально плотности состояний $\nu(E)$ и с учетом размерности дается оценкой

$$\Gamma \sim J \left\{ e^{-S_1} + \left(\frac{J}{|E|}\right)^{1/3} e^{-S_0} \right\}. \tag{5}$$

Энергия всегда входит в комбинации $E + i\Gamma$ и в окрестности перехода Андерсона можно заменить $|E|$ на Γ ; легко видеть, что первый член в скобках доминирует при $S_1 < 3S_0/4$, второй — при обратном неравенстве. Поскольку $S(E, R) \sim W^{-2}$ [6], то в пределе слабого беспорядка возникает резкая граница $S_c = 3S_0/4$ между двумя типами моделей: при $S_1 < S_c$ оптимальная флуктуация определяется атомным масштабом и дискретность решетки имеет принципиальное значение аналогично случаю $d > 4$; при $S_1 > S_c$ существенны флуктуации большого радиуса и рассмотрение можно вести в континуальной модели с квадратичным спектром: ситуация аналогична таковой для низших размерностей.

Данная выше классификация моделей прямо связана с перенормируемостью теории. Диаграмма N -го порядка для собственной энергии Σ имеет размерность по импульсу k^r , где $r = 2 + (d - 4)N$. При $d > 4$ степень расходимости на больших импульсах возрастает с порядком диаграммы и теория перенормируема [9] — требуется явное введение параметра обрезания Λ , указывающее на существование структуры гамилтониана на атомном масштабе. При $d < 4$ имеем $r < 2$ для всех N : при вычитании из каждой диаграммы ее значения при $p = \kappa = 0$ показатель r понижается на 2 и разность $\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, 0)$ не содержит расходимостей, которые поглощаются величиной $\Sigma(0, 0)$, приводящей лишь к сдвигу начала отсчета энергии. При $d = 4$ разность $\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, 0)$ содержит логарифмические расходимости, устраняемые перенормировкой заряда и функции Грина [9, 10]; нужно, однако, иметь в виду, что в стандартных доказательствах перенормируемости обсуждается лишь область расстояний больших чем Λ^{-1} ; подразумевается, что масштабы меньше Λ^{-1} не дают δ -образных вкладов, существенных при $\Lambda \rightarrow \infty$. Приведенная выше оценка показывает, что это не всегда так: перенормируемый вклад больших расстояний — вклад плато — доминирует лишь при $S_1 > S_c$; в обратном случае он мал по сравнению с перенормируемым вкладом малых расстояний.

Таким образом, существуют четыре принципиально различных типа теорий: а) перенормируемые теории при $d > 4$; б) перенормируемые теории в условиях логарифмической ситуации ($d = 4$, $S_1 < S_c$); в) перенормируемые теории в условиях логарифмической ситуации ($d = 4$, $S_1 > S_c$); г) теории, перенормируемые с помощью одного вычитания (суперперенормируемые), при $d < 4$. Случаи а) и б) рассмотрены соответственно в [5] и [6]; в настоящей работе рассматривается случай в), являющийся нулевым приближением для теории $4 - \epsilon$, относящейся к типу г).

Индекс α в (4) может быть определен из условия перенормируемости вклада плато. Вклад последнего в затухание Γ , зависящий от Λ и затравочных значений κ_0 , g_0 , становится функцией лишь κ и g при переходе к перенормированным величинам; из соображений размерности $\Gamma = \kappa^2 f(g)$, где функция $f(g)$ определяется в основном экспонентой $\exp(-1/ag)$ ввиду необходимости согласования с результатом метода оптимальной флуктуации при $E \rightarrow -\infty$, когда $g \approx g_0$. Учитывая связь перенормированного заряда с затравочным [11]

$$g = \frac{g_0}{1 + W_2 g_0 \ln(\Lambda/\kappa)}, \quad W_2 = K_4(n + 8) \quad (6)$$

($K_4 = (8\pi^2)^{-1}$ — площадь единичной сферы в четырехмерном пространстве, деленная на $(2\pi)^4$), имеем

$$\Gamma \sim \kappa^2 \exp \left\{ -\frac{1}{ag_0} - \frac{W_2}{a} \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right\} \sim \Lambda^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2} \right)^{-W_2/2a-1} \exp \left(-\frac{1}{ag_0} \right), \quad (7)$$

что с учетом $J \sim \Lambda^2$, $\kappa^2 = |E|^1$, $a = -3/8\pi^2$ воспроизводит второй член в формуле (5); указанное значение a получается методом работ [3, 12, 13] с использованием известного инстантонного решения при $d = 4$ [14].

В работах [5, 6] выяснена необходимость корректного учета факториальной расходимости ряда теории возмущений, исследуемой методом Липатова [14], согласно которому далекие коэффициенты разложения по g_0 определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Инстантон в методе Липатова удовлетворяет тому же уравнению, что и типичная волновая функция в поле оптимальной флуктуации [8, гл. IV]: тем самым данная выше классификация моделей проявляется еще в одном фундаментальном аспекте — расходимости ряда теории возмущений. В отличие от решеточных моделей при $d \geq 4$ [6], континуальных моделей при $d < 4$ [15] и перенормируемых безмассовых теорий [14, 16], применение метода Липатова к исследованию четырехмерной модели (1) с $\kappa \neq 0$ требует преодоления специфических трудностей, связанных с отсутствием «истинных» инстантонов (разд. 7).

В четырехмерных решеточных моделях [6] для получения асимптотических точных (в пределе слабого беспорядка) результатов в разложении

$$\Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) = \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^K \quad (8)$$

нужно учесть: а) паркетные коэффициенты A_N^N , соответствующие главному логарифмическому приближению; б) для $N \geq N_0 \gg 1$ — коэффициенты A_N^0 и A_N^1 , имеющие максимальную скорость роста по N и доминирующие в высоких порядках теории возмущений: они приводят к непертурбативному вкладу, связанному с расходимостью ряда и не зависящему от выбора N_0 . Качественный результат состоит в смещении точки перехода с действительной оси в комплексную плоскость, что приводит к регулярности $\nu(E)$ в окрестности перехода Андерсона и устранению ложного полюса. Указанное приближение «портится» при стремлении S_1 к S_c [6]: а) уравнение, определяющее $\Gamma(E)$, имеет при $S_1 > S_c$ физически бессмысленные решения; б) при $S_1 \rightarrow S_c$ резко возрастает вклад следующих за главным логарифмических приближений, определяемых коэффициентами A_N^{N-K} с $K \sim 1$; в) при $S_1 \approx S_c$ становится существенным вклад плато (рис. 1), сильная энергетическая зависимость которого указывает на возрастание роли коэффициентов A_N^K с $K \neq 0$ (в решеточных моделях слабая зависимость S_1 от E обуславливает доминирование нуль-логарифмического вклада). Таким образом, если в решеточных моделях доминируют самые «старшие» и самые «младшие» логарифмы, то при переходе к перенормируемым моделям в сумме (8) становится существенным, вообще говоря, вклад всех K .

В последнем случае мы приходим к следующей постановке задачи. Выберем целое число N_0 , большое по сравнению с 1, но малое по сравнению с большими параметрами теории: при $N < N_0$ сохраним в (8) лишь паркетные коэффициенты A_N^N , выделяемые большими логарифмами; при $N \geq N_0$ в сумме по K существенны, вообще говоря, все члены, но условие $N \gg 1$ позволяет вычислять коэффициенты A_N^K в главной асимптотике по N . Последняя задача решается следующим образом: перенормируемость

¹⁾ В результат типа (5) входит перенормированная энергия E [13].

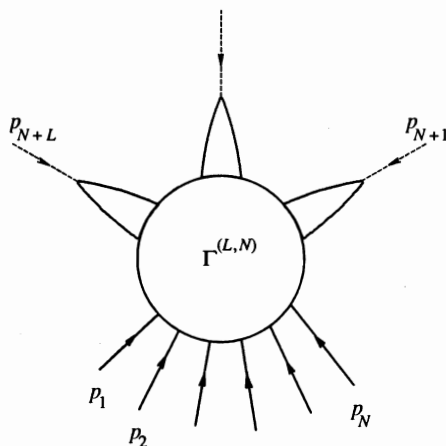


Рис. 2. Вершина $\Gamma^{(L,N)}$ с N внешними концами и L замыканиями двух линий, исследуемая в теории перенормируемости [10]

теории, выраженная в форме уравнения Каллана–Симанчика (разд. 2), приводит к системе уравнений для A_N^K , определяющей коэффициенты с $K \neq 0$ по заданным A_N^0 ; с другой стороны, метод Липатова хорошо воспроизводит коэффициенты A_N^K с небольшими K , что позволяет использовать их как граничные условия к указанной системе уравнений. Тем самым удается определить все A_N^K с $N \gg 1$ (разд. 3), что для малых g_0 позволяет найти сумму ряда (8) и определить зависимость затухания Γ от энергии (разд. 4).

Для вычисления плотности состояний (разд. 6) требуется найти собственную энергию $\Sigma(p, \kappa)$ при конечных импульсах, что в главном логарифмическом приближении требует решения паркетных уравнений [6]. В излагаемой теории $\Sigma(p, \kappa)$ является суммой непертурбативного вклада, в основном определяемого асимптотикой Липатова, и квази-паркетного вклада, соответствующего логарифмическому приближению произвольного конечного порядка с учетом лишь главной асимптотики по N . Вычисление последнего вклада проводится с помощью любопытной модификации паркетного приближения (разд. 5).

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ A_N^K

В дальнейшем интересуемся лишь логарифмическими расходимостями, считая квадратичные исключенными перенормировкой κ . Уравнения Каллана–Симанчика выводятся в соответствии со стандартной схемой [10], но потребуются нам в несколько нетрадиционной форме. Вершина $\Gamma^{(L,N)}$ с N свободными концами и L замыканиями двух линий (рис. 2) из размерных соображений записывается в виде [10]

$$\Gamma^{(L,N)}(p_i; \kappa, g_0, \Lambda) = \kappa^{d-N(d-2)/2-2L} \tilde{\Gamma}^{(L,N)}(p_i/\kappa; g_0, \Lambda/\kappa), \quad (9)$$

что позволяет перейти к рассмотрению $\tilde{\Gamma}^{(L,N)}$ (тильды в дальнейшем опускаем). Считая затравочный заряд g_0 функцией Λ и вводя перенормированный заряд g_μ , относящийся к масштабу $\mu \gg \kappa$, имеем в силу мультипликативной перенормируемости $\Gamma^{(L,N)}$ [10]

$$\Gamma_R^{(L,N)}\left(\frac{p_i}{\kappa}; g_\mu, \frac{\mu}{\kappa}\right) = Z^{N/2} \left(\frac{Z_2}{Z}\right)^L \Gamma^{(L,N)}\left(\frac{p_i}{\kappa}; g_0, \frac{\Lambda}{\kappa}\right), \quad (10)$$

где Z и Z_2 — функции g_0 и Λ/μ . Ввиду независимости $\Gamma_R^{(L,N)}$ от Λ имеем

$$d\Gamma_R^{(L,N)}/d\ln\Lambda = 0,$$

что после подстановки (10) дает уравнение Каллана–Симанчика:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + W(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + \left(L - \frac{N}{2} \right) \eta(g_0) - L\eta_2(g_0) \right] \Gamma^{(L,N)} \left(\frac{p_i}{\kappa}; g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) = 0. \quad (11)$$

Функция Гелл-Манна–Лоу $W(g_0)$ и скейлинговые функции $\eta(g_0)$ и $\eta_2(g_0)$ [10] определяются соотношениями

$$W(g_0) = \frac{dg_0}{d\ln\Lambda}, \quad \eta(g_0) = -\frac{d\ln Z}{d\ln\Lambda}, \quad \eta_2(g_0) = -\frac{d\ln Z_2}{d\ln\Lambda} \quad (12)$$

и априори зависят от Λ/μ ; однако, выписывая три уравнения (11) для разных L, N , выражая W, η, η_2 через $\Gamma^{(L,N)}$ и учитывая независимость последних функций от произвольного параметра μ , легко убедиться в независимости первых от Λ/μ .

Для нахождения закона ренормализации собственной энергии воспользуемся тождеством Уорда для функции Грина $G(p, \kappa)$:

$$\frac{\partial G^{-1}(0, \kappa)}{\partial \kappa_0^2} = \frac{\partial \kappa^2}{\partial \kappa_0^2} = \Gamma^{(1,2)}(\kappa), \quad (13)$$

интегрируя которое, имеем

$$\kappa_0^2 - \kappa_c^2 = \kappa^2 Y \left(g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \equiv \int_0^{\kappa^2} d\kappa^2 [\Gamma^{(1,2)}(\kappa)]^{-1}, \quad (14)$$

где $\Gamma^{(1,2)}(\kappa) \equiv \Gamma^{(1,2)}(p_i = 0, g_0, \Lambda/\kappa)$, $\kappa_c^2 = \Sigma(0, 0)$. Функция Y удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} + W(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + V(g_0) \right] Y \left(g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) = 0 \quad (15)$$

с $V(g_0) \equiv \eta_2(g_0)$, в чем легко убедиться, применяя оператор в квадратных скобках к равенству (14) и учитывая (11). Ввиду соотношения $\kappa_0^2 = \kappa^2 + \Sigma(0, \kappa)$ уравнение (14) переписывается в виде

$$\kappa^2 + \Sigma(\kappa, 0) - \Sigma(0, 0) = \kappa^2 Y(g_0, \Lambda/\kappa) \quad (16)$$

и сравнение с (8) дает для Y логарифмическое разложение

$$Y \left(g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) = \sum_{N=0}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^K \quad (17)$$

с $A_0^0 = 1$. Раскладывая функции W и V в ряды

$$W(g_0) = \sum_{N=2}^{\infty} W_N g_0^N, \quad V(g_0) = \sum_{N=1}^{\infty} V_N g_0^N, \quad (18)$$

первые коэффициенты которых [10]²⁾

$$W_2 = K_4(n + 8), \quad W_3 = -K_4^2(9n + 42), \quad V_1 = -K_4(n + 2), \quad V_2 = 3K_4^2(n + 2), \quad (19)$$

подставляя (17, 18) в (15) и собирая члены с одинаковыми степенями g_0 и логарифмов, получим систему уравнений для коэффициентов A_N^K :

$$-KA_N^K = \sum_{M=1}^{N-K+1} [W_{M+1}(N - M) + V_M] A_{N-M}^{K-1}, \quad K = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ A_N^K

Уравнение (20) представляет собой рекуррентное соотношение, определяющее A_N^K по заданным $A_{N-1}^{K-1}, A_{N-2}^{K-1}, \dots, A_{K-1}^{K-1}$, что позволяет выразить все A_N^K через одну последовательность A_N^0 . Коэффициенты W_N и V_N могут быть определены из (20), если дополнительно к A_N^0 задать две последовательности A_N^1 и A_N^2 . Таким образом, условие перенормируемости теории резко сокращает произвол в выборе коэффициентов (8).

Информация о коэффициентах A_N^K с $N \gg 1$ может быть получена методом Липатова; согласно разд. 7 вклад N -го порядка в $\Sigma(0, \kappa)$ имеет вид

$$\kappa^2 g_0^N c_2 \Gamma(N + b) a^N (\ln N)^{-\gamma} \exp\left(\sigma \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right), \quad (21)$$

где

$$b = \frac{n + 8}{3}, \quad a = -3K_4, \quad \gamma = \frac{n + 2}{6}, \quad \sigma = \frac{n + 8}{3}. \quad (22)$$

Сопоставляя с разложением (8), имеем

$$A_N^K = \frac{\sigma^K}{K!} A_N^0, \quad A_N^0 = c_2 \Gamma(N + b) a^N (\ln N)^{-\gamma}. \quad (23)$$

Если в решеточных моделях [6] асимптотика Липатова воспроизводит лишь нуль-логарифмический и однологарифмический вклады, то здесь она дает «лишние» логарифмы: формально в (23) $K = 0, 1, \dots, \infty$, тогда как в (8) $K \leq N$. Причина этого состоит в быстром убывании A_N^K с ростом K и ограниченной точности ($\sim 1/N$) главной асимптотики; результату (23) можно доверять лишь при небольших K , но этого достаточно для использования его в качестве граничного условия к системе (20).

Выписывая уравнения (20) для малых K :

$$\begin{aligned} -1 \cdot A_N^1 &= [W_2(N-1) + V_1] A_{N-1}^0 + [W_3(N-2) + V_2] A_{N-2}^0 + \dots + [W_N \cdot 1 + V_{N-1}] A_1^0 + V_N A_0^0, \\ -2 \cdot A_N^2 &= [W_2(N-1) + V_1] A_{N-1}^1 + [W_3(N-2) + V_2] A_{N-2}^1 + \dots + [W_N \cdot 1 + V_{N-1}] A_1^1 \end{aligned} \quad (24)$$

.....

²⁾ Функции W и η_2 , вычисленные в [10] для μ -ренормализации, отличаются от таковых для используемой здесь Λ -ренормализации, но имеют совпадающие первые коэффициенты (см. Приложение 1); определения заряда и функции Гелл-Манна – Лоу отличаются в [10] множителем $6K_4$.

и предполагая справедливым результат (23) для A_N^0 , легко убедиться в факториальном росте по N всех A_N^K с $K \sim 1$; сохраняя в правых частях уравнений (24) лишь первые члены в главном порядке по N , получим

$$A_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!} (-W_2)^K A_{N-K}^0 \xrightarrow{K \ll N} \frac{1}{K!} \left(-\frac{W_2}{a}\right)^K A_N^0, \quad (25)$$

что с учетом соотношения $\sigma = -W_2/a$ (см. (19, 22)) воспроизводит результат (23) для $K \neq 0$ и устанавливает область его применимости, $K \ll N$. Сохранение в правых частях (24) лишь первых членов обосновано при условии, что W_N и V_N растут медленнее, чем A_N^0 ³⁾, которое можно считать следствием справедливости (23) при $K = 0, 1, 2$.

Для K близких к N , полагая $x_N = A_N^N$, $y_N = A_N^{N-1}$, ..., получим из (20) систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} -Nx_N &= [W_2(N-1) + V_1]x_{N-1}, \\ -(N-1)y_N &= [W_2(N-1) + V_1]y_{N-1} + [W_3(N-2) + V_2]x_{N-2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (26)$$

решаемых методом вариации постоянных [17], что позволяет последовательно определить A_N^N , A_N^{N-1} , ... Для паркетных коэффициентов имеем

$$A_N^N = (-W_2)^N \frac{\Gamma(N-\beta)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta)}, \quad \beta = -\frac{V_1}{W_2} = \frac{n+2}{n+8} \quad (27)$$

в согласии с результатами работы Гинзбурга [11] (см. [6]). Для A_N^{N-K} с $K \sim 1$ легко выделить главную асимптотику по N и доказать по индукции результат

$$A_N^{N-K} = \frac{1}{K!} \left(-\frac{W_3}{W_2^2} N \ln N\right)^K A_N^N. \quad (28)$$

Для исследования A_N^K с произвольными K воспользуемся оценкой $A_{N-1}^K/A_N^K \lesssim 1/N$, справедливой для (23), (28) и подтверждаемой результатом для всех K ; сохраняя в правой части (20) два старших порядка по N , имеем

$$-KA_N^K = [W_2(N-1) + V_1]A_{N-1}^{K-1} + W_3NA_{N-2}^{K-1}, \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

(главного порядка по N недостаточно, так как для вычисления произвольного A_N^K по известным A_N^0 требуется $\sim N$ итераций, что при точности каждой итерации $\sim 1/N$ приводит к накоплению ошибок; последние члены в (24), содержащие W_N и V_N , дают вообще говоря, поправки $\sim 1/N$, но присутствуют лишь в уравнениях с $K = 1, 2$ и не приводят к накоплению ошибок). Полагаем по определению $A_N^{N+1} = 0$, что учитывает отсутствие последнего члена в уравнении с $K = N$. Делая замену

$$A_N^K = (-W_2)^K \frac{\Gamma(N-\beta)}{\Gamma(K+1)\Gamma(N-K-\beta)} A_{N-K}^0 X_{N,N-K} \quad (30)$$

³⁾ В работах [14, 16] коэффициенты W_N вычислялись для μ -ренормализации, для которой такое утверждение неверно (см. Приложение 1).

и учитывая, что $X_{N+1,M} - X_{N,M} \sim 1/N$, приходим к уравнению

$$X_{N,M} = X_{N-1,M} + \frac{f(M)}{N} X_{N-1,M-1} \quad (31)$$

с граничными условиями

$$X_{NN} = 1, \quad X_{N0} = 1, \quad (32)$$

где функция $f(M)$ определена соотношением

$$f(M) = \frac{W_3}{W_2} (M - 1 - \beta) \frac{A_{M-1}^0}{A_M^0}. \quad (33)$$

Уравнение (31) удобно исследовать для задачи с начальными условиями

$$X_{0M} = \phi_M, \quad \text{где } \phi_M = 0 \text{ для } M = -1, -2, \dots, \quad (34)$$

а затем подобрать ϕ_M так, чтобы удовлетворить граничным условиям (32). Итерации уравнения (31) дают

$$X_{NM} = \phi_M + B_N^1 f(M) \phi_{M-1} + B_N^2 f(M) f(M-1) \phi_{M-2} + \dots + B_N^N f(M) f(M-1) \dots f(M-N+1) \phi_{M-N}, \quad (35)$$

где коэффициенты B_N^K даются суммой C_N^K слагаемых:

$$B_N^K = \sum_{\{p_i\}} \frac{1}{(1+p_1)(1+p_2)\dots(1+p_K)}, \quad (36)$$

а p_1, p_2, \dots, p_K — безповторная выборка из последовательности $0, 1, \dots, N-1$. При $K \ll N$ безповторную выборку можно заменить повторной и получить

$$B_N^K \approx \frac{(\ln N)^K}{K!}, \quad K \ll N. \quad (37)$$

Фактически при больших N сумма в (35) всегда определяется значениями $K \ll N$, и с учетом $\phi_M = 0$ при $M < 0$ получим

$$X_{NM} = \sum_{K=0}^M \frac{(\ln N)^K}{K!} f(M) f(M-1) \dots f(M-K+1) \phi_{M-K}. \quad (38)$$

Для входящего в (38) произведения имеем

$$f(M) f(M-1) \dots f(M-K+1) = \left(\frac{W_3}{W_2} \right)^K \frac{A_{M-K}^0}{A_M^0} \frac{\Gamma(M-\beta)}{\Gamma(M-K-\beta)} \xrightarrow{M \gg K} (f_\infty)^K, \quad (39)$$

где

$$f_\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = \frac{W_3}{aW_2} = \frac{3n+14}{n+8}. \quad (40)$$

При $M = 0$ граничное условие (32) дает $\phi_0 = 1$; при $M = N \gg 1$ сумма в (38) заменяется интегралом, вычисление которого методом перевала и сопоставление с граничными условиями (32) определяет ϕ_M для $M \gg 1$:

$$\phi_M = \begin{cases} 1, & M = 0 \\ M^{-f_\infty}, & M \gg 1 \end{cases} \quad (41)$$

Подстановка (41) в (38) приводит к результатам ($M_0 = f_\infty \ln N$)

$$X_{NM} = \frac{(\ln N)^M}{M!} \left(\frac{W_3}{W_2} \right)^M \frac{\Gamma(M - \beta)}{\Gamma(-\beta)A_M^0} \quad \text{при } M \ll \ln N, \quad (42)$$

$$X_{NM} = \frac{(\ln M)^\gamma}{M^{b+\beta}} \frac{e^{M_0}}{\sqrt{2\pi M_0}} \int_0^\infty dx \exp\left(-\frac{(M - M_0 - x)^2}{2M_0}\right) (\ln x)^{-\gamma} x^{b+\beta-f_\infty} \quad (43)$$

при $M_0 - M \ll M_0$ или $M > M_0$

(в первом случае сумма в (38) определяется членом с $K = M$, во втором она заменяется интегралом). Подстановка (42) в (30) воспроизводит результат (28) и устанавливает область его применимости, $K \ll \ln N$. В области $M \sim (M_0 - M)$, не описываемой формулами (42), (43), величина X_{NM} определяется значениями функции ϕ_M при $M \sim 1$, которые, в свою очередь, определяются коэффициентами A_N^0 с $N \sim 1$. Последние могут быть определены с точностью порядка нескольких процентов путем сшивки первых порядков теории возмущений с асимптотикой Липатова (см. примеры в [14, 15]).

4. СУММИРОВАНИЕ РЯДА ДЛЯ $\Sigma(0, \kappa)$

Полученная информация о коэффициентах A_N^K позволяет выделить в плоскости (N, K) области, дающие существенный вклад в сумму (8). Область 1 на рис. 3 — область неуниверсальности, в которой поведение коэффициентов A_N^K существенно зависит от конкретных значений A_N^0 с $N \sim 1$; выше и ниже области 1 справедливы универсальные асимптотики (42) и (43), определяемые соответственно тривиальным коэффициентом $A_0^0 = 1$ и асимптотикой Липатова для A_N^0 . Штриховой линией 2 показаны перевальные значения K для $N = \text{const}$ в предположении $|g_0| \ll 1$, $g_0 \ln(\Lambda/\kappa) \sim 1$; при уменьшении N перевал исчезает и доминирующая роль переходит к паркетным коэффициентам A_N^N , лежащим на главной диагонали. Существенный вклад в сумму (8) дают области 3 и 4, прилегающие к перевальному пунктиру.

Область 3 дает квазипаркетный вклад, определяемый коэффициентами A_N^{N-K} с $K \sim 1$, для которых справедлив результат (28):

$$\left[Y \left(g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \right]_{\text{quasiparq}} = \left[\Delta + \frac{W_3}{W_2} g_0 \ln \Delta \right]^\beta, \quad \Delta = 1 + W_2 g_0 \ln \frac{\Lambda}{\kappa}. \quad (44)$$

С логарифмической точностью величина Δ под логарифмом может быть заменена на свое минимальное значение $\bar{\Delta} \sim |g_0| \ln |g_0|$ (см. ниже), так как при $\Delta \gg \bar{\Delta}$ логарифмический член несуществен и (44) переписывается в виде

$$\left[Y \left(g_0, \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \right]_{\text{quasiparq}} \approx \left[1 + W_2 g_1 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^\beta, \quad (45)$$

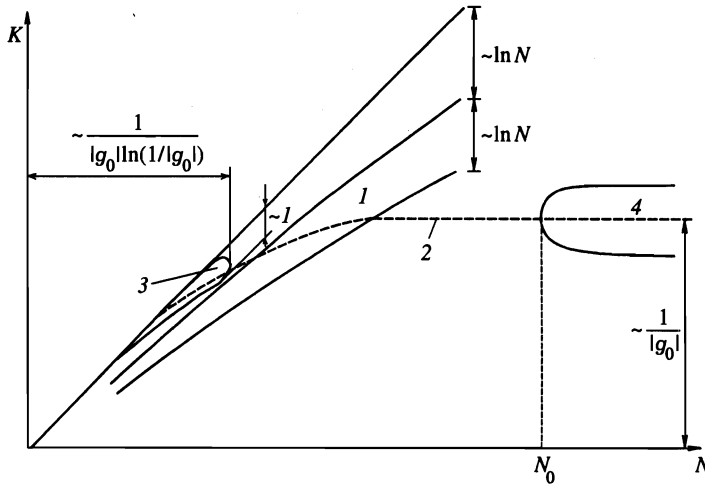


Рис. 3. Области в плоскости (N, K) , существенные при исследовании суммы (8): 1 — область неуниверсальности, в которой существенна информация о коэффициентах A_N^0 с $N \sim 1$; выше и ниже ее справедливы универсальные асимптотики (42) и (43); 2 — перевальные значения K при $N = \text{const}$; при малых N доминируют паркетные коэффициенты, лежащие на главной диагонали; 3 — область, дающая квазипаркетный вклад в сумму (8); 4 — область, дающая непертурбативный вклад в сумму (8) (N_0 может быть выбрано сколь угодно большим)

$$g_1 = g_0 / \left(1 + \frac{W_3}{W_2} g_0 \ln \bar{\Delta} \right) \approx g_0 / \left(1 + \frac{W_3}{W_2} g_0 \ln |g_0| \right),$$

отличающемся от паркетного [6] лишь заменой g_0 на g_1 .

Область 4 дает непертурбативный вклад, подробно обсуждавшийся в [5, 6]; он получается в результате подстановки (30), (43) в (8), суммирования по K методом перевала и суммирования по N с помощью формулы

$$\text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} \Gamma(N+b) a^N (g_0 - i0)^N f(N) = \frac{\pi}{(ag_0)^b} \exp\left(-\frac{1}{ag_0}\right) f\left(\frac{1}{ag_0}\right), \quad (46)$$

$$ag_0 > 0, \quad N_0 \gg 1,$$

справедливой для медленно меняющихся функций $f(N)$; она получается путем разложения $f(N)$ в интеграл Фурье, использования формулы (90) работы [6] и учета лишь длинноволновых фурье-компонент. Произвол в определении $f(N)$ при $N < N_0$ позволяет удовлетворить условию медленности изменений для любой функции $f(N)$, меняющейся при больших N не быстрее, чем степенным образом. Необычное явление, связанное с расходимостью ряда, состоит в том, что сумма в (46) определяется сколь угодно большими N (поэтому результат не зависит от N_0), но в результат входит значение функции $f(N)$ при конечном $N = 1/ag_0$. Поэтому поправочный множитель, отличающий точные A_N^K от асимптотики Липатова (23), определяемый формулами (30), (43) и несущественный при $N \rightarrow \infty$, приводит к существенному отличию полного непертурбативного вклада от такого, вычисленного по асимптотике Липатова (см. ниже формулу (133) разд. 7.7 при $M = 1$):

$$\begin{aligned}
[\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert} &\equiv i\Gamma_0(\kappa^2) = [\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert}^{Lipatov} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\ln \frac{1}{|g_0|} \right)^\gamma \left(\frac{abg_0x_0}{2} \right)^{b+\beta-f_\infty} \times \\
&\times I \left(\frac{1 + W_2g_1 \ln(\Lambda/\kappa)}{abg_1x_0/2} \right), \\
[\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert}^{Lipatov} &= i\pi c_2 \frac{1}{(ag_0)^b} \left(\ln \frac{1}{|g_0|} \right)^{-\gamma} \exp \left(-\frac{1}{ag_0} \right) \kappa^2 \exp \left(\sigma \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right), \\
x_0 &= \left(\frac{8f_\infty}{b^2} \ln \frac{1}{ag_0} \right)^{1/2}, \\
I(y) &= \int_0^\infty dz \left(\ln \frac{bx_0}{2} z \right)^{-\gamma} z^{b+\beta-f_\infty} \exp \{ -(y-z)^2 \},
\end{aligned} \tag{47}$$

где $c_2 \approx 3,44 \cdot 10^{-2}$ при $n = 0$. Условие $M > M_0$ в (43) соответствует положительности аргумента $I(y)$, которая имеет место в рассматриваемой области параметров.

Аппроксимируя ряд (17) суммой вкладов (45) и (47) и подставляя в (14), имеем уравнение

$$\kappa_0^2 - \kappa_c^2 = \kappa^2 \left[1 + W_2g_1 \ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right]^{1/4} + i\Gamma_0(\kappa^2), \quad \kappa^2 = -E - i\Gamma, \tag{48}$$

которое решается аналогично уравнению (93) работы [6] и определяет связь затухания Γ и перенормированной энергии E с затравочной энергией $E_B = -\kappa_0^2$ в параметрической форме:

$$\Gamma = \Gamma_c e^x \sin \varphi, \quad E = -\Gamma_c e^x \cos \varphi,$$

$$-E_B + E_c = \Gamma_c e^x (4K_4|g_1|x)^{1/4} \{ \cos(\varphi + \varphi/4x) - \text{tg}(\varphi/3) \sin(\varphi + \varphi/4x) \}, \tag{49}$$

где E_c определяется формулой (108) работы [6],

$$\Gamma_c = \Lambda^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4K_4|g_1|} \right\}, \tag{50}$$

а $x(\varphi)$ — однозначная функция в интервале $0 < \varphi < \pi$, аналогичная показанной на рис. 2 работы [6] и определяемая уравнением (ср. с формулой (100) в [6])

$$\sin \left(\varphi + \frac{\varphi}{4x} \right) = B \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) \frac{e^{-4x/3}}{x^{1/4}} I \left(\frac{x}{x_0} \right), \tag{51}$$

в котором постоянная B равна

$$B = \sqrt{\pi} c_2 \left(\frac{3}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{\bar{\Delta}}{3K_4|g_0|} \right)^{7/4} \left(\frac{4}{3} x_0 \right)^{7/6} \sim \left(\ln \frac{1}{|g_0|} \right)^{7/3}. \tag{52}$$

Минимальные значения величин Δ и x достигаются одновременно и с логарифмической точностью равны

$$\Delta_{min} \equiv \bar{\Delta} \approx \frac{21}{4} K_4 |g_0| \ln \frac{1}{|g_0|}, \quad x_{min} \approx \frac{7}{4} \ln \ln \frac{1}{|g_0|}. \tag{53}$$

Минимальное расстояние до ложного полюса [3] имеет порядок $|g_0| \ln \ln(1/|g_0|)$, и «эф-фektivное взаимодействие» оказывается при малых κ логарифмически слабым.

5. КВАЗИПАРКЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для вычисления плотности состояний требуется знание собственной энергии $\Sigma(p, \kappa)$ при конечных импульсах [6]; так же, как при $p = 0$, эта величина состоит из непертурбативного и квазипаркетного вкладов. Непертурбативный вклад будет существенным лишь в области больших отрицательных E , где он непосредственно определяется асимптотикой Липатова и дается формулой (132) разд. 7.7 при $M = 1$, $n = 0$, $p_1 = -p_2 = p$; для значений p , меньших некоторого p_0 , $[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert}$ не зависит от p , а для $p \gtrsim p_0$ быстро убывает с ростом p . Ввиду логарифмической точности последующих вычислений [6, разд. 8] достаточно результата

$$[\Sigma(p, \kappa)]_{nonpert} \approx [\Sigma(0, \kappa)]_{nonpert} \Theta(p_0 - p), \quad p_0 \sim \kappa \left(\frac{1}{|g_0|} \ln \frac{1}{|g_0|} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

Существенные трудности возникают при вычислении квазипаркетного вклада в $\Sigma(p, \kappa)$, соответствующего логарифмическому приближению произвольного конечного порядка с учетом главной асимптотики по N коэффициентов разложения. В главном логарифмическом приближении для вычисления $\Sigma(p, \kappa)$ требуется знание четыреххвостной вершины $\Gamma^{(0,4)}(p, k, q)$, зависящей от трех существенно различных импульсов, $p \gg k \gg q \gg \kappa$ [6]. Исползованный выше метод позволяет найти квазипаркетный вклад в $\Gamma^{(0,4)}$ при $p \sim k \sim q \gg \kappa$: записывая разложение типа (8)

$$\Gamma^{(0,4)}(p, p, p) = \sum_{N=1}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^{N-1} A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{p} \right)^K \quad (55)$$

(с другими коэффициентами A_N^K) и замечая, что $\Gamma^{(0,4)}$ удовлетворяет уравнению типа (15) с $V(g_0) \equiv -2\eta(g_0)$, получим вместо (20)

$$-K A_N^K = \sum_{M=1}^{N-K} [W_{M+1}(N-M) + V_M] A_{N-M}^{K-1}, \quad K = 1, \dots, N-1, \quad (56)$$

что с учетом $V_1 = 0$ [10] дает вместо (27), (28)

$$A_N^{N-K} = -2(-W_2)^N \frac{1}{(K-1)!} \frac{(-W_3)^{K-1}}{(-W_2)^{2K-1}} (N \ln N)^{K-1}, \quad K \sim 1. \quad (57)$$

Квазипаркетный вклад в сумму (55), определяемый коэффициентами (57), имеет вид

$$[\Gamma^{(0,4)}(p, p, p)]_{quasiparq} = -2g_0 / \left(\Delta + \frac{W_3}{W_2} g_0 \ln \Delta \right) \Big|_{\Delta=1+W_2 g_0 \ln(\Lambda/p)} \approx \frac{-2g_1}{1+W_2 g_1 \ln(\Lambda/p)}. \quad (58)$$

В главном логарифмическом приближении вычисление $\Gamma^{(0,4)}(p, k, q)$ требует суммирования паркетных диаграмм (рис. 4а), получаемых путем последовательного расщепления простых вершин на две части, соединенные двумя линиями: при увеличении порядка диаграммы на единицу малость $\sim g_0$, связанная с дополнительной вершиной, компенсируется большим логарифмом, связанным с дополнительной парой линий [18]. К паркетному приближению можно подойти с точки зрения общего структурного анализа диаграмм [18, 19]: полная вершина $\Gamma^{(0,4)}$ представляется в виде трех «кирпичей»

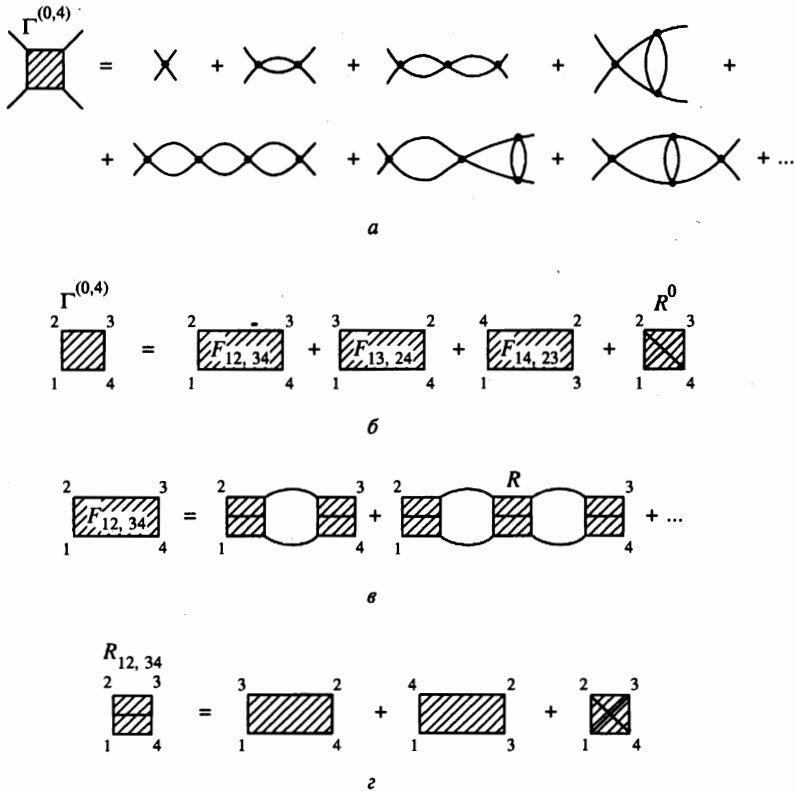


Рис. 4. *a* — паркетная последовательность диаграмм для $\Gamma^{(0,4)}$ (получается последовательным расщеплением простых вершин на две части, соединенные парой линий); *б-г* — система уравнений для полной вершины $\Gamma^{(0,4)}$, трех «кирпичей» $F_{ij,kl}$, трех «перечеркнутых» вершин $R_{ij,kl}$ и неприводимой вершины R^0 ; аппроксимация $R^0 = -2g_0$ соответствует суммированию последовательности диаграмм *a*

$F_{ij,kl}$ и неприводимой четыреххвостки R^0 (рис. 4б); каждый кирпич является суммой диаграмм, приводимых по паре линий в соответствующем канале и получаемых путем повторения «перечеркнутой» вершины R (рис. 4в), которая в свою очередь есть сумма двух кирпичей и неприводимой четыреххвостки (рис. 4г). Составляя уравнения типа в, г для двух других кирпичей, получим систему 7 уравнений для 8 величин [19]; все величины однозначно определяются заданием вершины R^0 , так что

$$\Gamma^{(0,4)}(p, k, q) = F \{ R^0(p, k, q) \}, \tag{59}$$

где $F\{\dots\}$ — некоторый функционал. Паркетное приближение соответствует замене неприводимой четыреххвостки на простую вершину, $R^0(p, k, q) = -2g_0$, так как при этом система б-г соответствует суммированию диаграмм а.

В Приложении 2 показано, что вершина R^0 зависит лишь от максимального импульса, и (59) принимает вид

$$\Gamma^{(0,4)}(p, k, q) = F \{ R^0(p, p, p) \}. \tag{60}$$

Полагая $k = q = p$ и обращая (60), можно получить приближение для R^0 , соответствующее результату (58), после чего (60) в принципе решает задачу.

Функционал $F\{\dots\}$ определяется системой уравнений б-г (рис. 4), которая очень сложна и, по-видимому, никогда не решалась: обычно пользуются приближенным методом Судакова [20], усовершенствованным Поляковым [21]. Этот метод не предполагает какого-либо конкретного приближения для R^0 , но основан на логарифмических вычислениях типа

$$\int_0^{\Lambda} \frac{k^3 dk}{(k^2 + \kappa^2)^2} \underset{\sim \kappa}{=} \int \frac{k^3 dk}{k^4} = \ln \frac{\Lambda}{\kappa} + O(1). \quad (61)$$

Нижний предел во втором интеграле определен лишь по порядку величины, но эта неопределенность не затрагивает большого логарифма и сказывается лишь на величине $O(1)$. На первый взгляд, такой способ вычислений оправдан лишь в главном логарифмическом приближении; действительно, замена $\kappa \rightarrow c\kappa$ в главных логарифмах (8) дает

$$A_N^N \left(\ln \frac{\Lambda}{\kappa} \right)^N \rightarrow A_N^N \left(\ln \frac{\Lambda}{\kappa} - \ln c \right)^N, \quad (62)$$

что приводит к изменению коэффициентов при младших логарифмах

$$A_N^{N-K} \rightarrow A_N^{N-K} + \frac{(-\ln c)^K}{K!} N^K A_N^N, \quad K \sim 1. \quad (63)$$

Но согласно (28) $A_N^{N-K} \sim A_N^N (N \ln N)^K$, и главная асимптотика по N «не чувствует» замены $\kappa \rightarrow c\kappa$; поэтому в главном порядке по N логарифмические вычисления допустимы в произвольном конечном логарифмическом приближении. Это позволяет полностью сохранить паркетную схему при вычислении квазипаркетного вклада в $\Gamma^{(0,4)}$.

Подставляя (58) в паркетное уравнение [19, 21, 11]

$$\Gamma^{(0,4)}(x, x, x) = R^0(x, x, x) + \frac{1}{2} K_4(n+8) \int_0^x dt [\Gamma^{(0,4)}(t, t, t)]^2, \quad (64)$$

где $x = \ln(\Lambda/p)$, получим $R^0(x, x, x) = -2g_1$, и $[\Sigma(p, \kappa)]_{quasiparq}$ определяется паркетными формулами [6, 11] с заменой g_0 на g_1 . Окончательный результат для $\Sigma(p, \kappa)$ имеет вид

$$\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, \kappa) = \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[\frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-1/4} + \frac{1}{2} \left[\frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-3/4} \right\} - i\Gamma_0(\kappa^2)\Theta(p - p_0) \quad (65)$$

(ср. с формулой (116) работы [6]), где

$$t(x) = 1 + 8K_4g_1x, \quad x = \ln(\Lambda/p), \quad x_\infty = \ln(\Lambda/\kappa). \quad (66)$$

6. ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Вычисления, аналогичные [6, разд. 8], приводят к результату

$$\nu(E) = \frac{\Gamma_c e^x}{4\pi|g_1|} (4K_4|g_1|x)^{1/4} \left\{ \frac{1}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) [1 + 4K_4|g_1|x - 4K_4|g_1| \ln|g_1|] - (4K_4|g_1|x)^{1/2} \sin\left(\varphi + \frac{3\varphi}{4x}\right) \right\}, \quad (67)$$

совместно с (49), (51) определяющему зависимость $\nu(E)$ в параметрической форме. Для $|E| \gg \Gamma$ имеем асимптотики

$$\nu(E) = \frac{1}{2} K_4 E \left(1 - 4K_4|g_1| \ln \frac{\Lambda^2}{E} \right)^{-1/4}, \quad E \gg \Gamma,$$

$$\nu(E) = \frac{\Gamma_0(E)}{4\pi|g_1|} \left\{ 1 - 2K_4|g_1| \ln \frac{\Lambda^2}{|E|} - 2K_4|g_1| \ln|g_1| - \left(1 - 4K_4|g_1| \ln \frac{\Lambda^2}{|E|} \right)^{1/2} \right\}, \quad -E \gg \Gamma, \quad (68)$$

где $\Gamma_0(E) \equiv \Gamma_0(|\kappa|^2)$. При больших положительных E функция $\nu(E)$ переходит в плотность состояний идеальной решетки, при больших отрицательных E имеем результат

$$\nu(E) = \frac{K_4}{2\pi} \Gamma_0(E) \ln \frac{1}{|g_0|} = \frac{K_4}{2} c_2 \left(\frac{1}{3K_4|g_0|} \right)^{8/3} \left(\ln \frac{1}{|g_0|} \right)^{2/3} \times \exp\left(-\frac{1}{3K_4|g_0|} \right) \Lambda^2 \left(\frac{\Lambda^2}{|E|} \right)^{1/3}, \quad (69)$$

соответствующий асимптотике флуктуационного хвоста, получаемой в традиционных вариантах инстантонного метода [3, 12, 13]; он может быть получен суммированием далеких членов ряда для $G(p, \kappa)$ (см. (113)). Для квадратичного спектра применимость (69) ограничена областью $|E| \lesssim \Lambda^2$; фактически же отклонения от квадратичного спектра проявляются гораздо раньше, приводя к экспоненциальному убыванию $\nu(E)$ [6].

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ЛИПАТОВА

Для перенормируемых моделей основную роль играет вклад плато (разд. 1) и рассмотрение можно вести в континуальном пределе, считая спектр $\epsilon(k)$ квадратичным. В целом, вычисления следуют схеме, описанной в [6], с заменой $\epsilon(k) \rightarrow k^2$ и $\sum_x \rightarrow \int d^4x$; отличия связаны с повышенной симметрией четырехмерной континуальной модели, позволяющей довести вычисления «до числа», но приводящей на промежуточном этапе к ряду технических трудностей.

7.1. Специфика четырехмерной континуальной модели

Стандартная процедура [6] приводит к следующим условиям на перевальную точку в функциональном интеграле:

$$N g_c^{-1} = -\frac{1}{4} \int d^4x \varphi_c(x)^4, \quad (70)$$

$$-\Delta \varphi_c(x) + g_c \varphi_c(x)^3 + \kappa^2 \varphi_c(x) = 0. \quad (71)$$

В «безмассовой» теории ($\kappa = 0$) решение уравнения (71) — инстантон — имеет вид

$$\varphi_c(x) = (-g_c)^{-1/2} \phi_c(x), \quad \phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}R}{x^2 + R^2}, \quad (72)$$

где параметр R — радиус инстантона — является произвольным в соответствии с наличием плато в методе оптимальной флуктуации (разд. 1); отклонения от перевальной точки раскладываются по собственным функциям e_s^L и e_s^T

$$\hat{M}_L e_s^L(x) = \lambda_s^L e_s^L(x), \quad \hat{M}_T e_s^T(x) = \lambda_s^T e_s^T(x) \quad (73)$$

операторов

$$\hat{M}_L = -\Delta + 3g_c \phi_c^2(x), \quad \hat{M}_T = -\Delta + g_c \phi_c^2(x), \quad (74)$$

которые, как обычно, имеют нулевые моды [3]: оператор \hat{M}_L — трансляционные

$$\lambda_\mu^L = 0, \quad e_\mu^L(x) = \left[\int d^4x \left(\frac{\partial \phi_c}{\partial x_\mu} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (75)$$

а оператор \hat{M}_T — вращательную

$$\lambda_0^T = 0, \quad e_0^T(x) = \left[\int d^4x \phi_c(x)^2 \right]^{-1/2} \phi_c(x). \quad (76)$$

Произвольность параметра R в (72) приводит к наличию у \hat{M}_L еще одной нулевой моды — дилатационной [14, 16]

$$\lambda_0^L = 0, \quad e_0^L(x) = \left[\int d^4x \left(\frac{\partial \phi_c}{\partial R} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial R}. \quad (77)$$

Ее существование приводит к неразрешимости уравнения (71) для конечных κ (строгое доказательство см. в [22]): учет κ^2 по теории возмущений приводит к уравнению $\hat{M}_L \delta\phi = -\kappa^2 \phi_c(x)$, правая часть которого неортогональна $e_0^L(x)$. Смысл этой неразрешимости проясняется методом оптимальной флуктуации (разд. 1): функция $S(E, R)$ при $E < 0$, $d = 4$, $\epsilon(k) = k^2$ монотонно возрастает с увеличением R , так что производная $S(E, R)$ по R не обращается в нуль; соответственно, в инстантонном методе не обращается в нуль вариация гамильтониана (1) по φ , приводящая к уравнению (71).

Способ преодоления этой трудности состоит в минимизации $H\{\varphi\}$ при фиксированном радиусе инстантона R и последующем интегрировании по R , которое имеет существенно негауссовский характер.

7.2. Разложение вблизи «неправильного» инстантона

Для $(N-1)$ -го коэффициента разложения M -точечной функции Грина имеем (см. формулы (29), (58) работы [6])

$$\begin{aligned} [G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_{N-1} &= Z_0(\kappa)^{-1} \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_M}(x_M) \times \\ &\times \exp \{-H\{\kappa, g, \varphi\} - N \ln g\}, \end{aligned} \quad (78)$$

где гамильтониан $H\{\kappa, g, \varphi\}$ дается формулой (1), а

$$Z_0(\kappa) = \int D\varphi \exp[-H\{\kappa, 0, \varphi\}] = \left(\prod_s \frac{2\pi}{\lambda_s^0 + \kappa^2} \right)^{n/2} \quad (79)$$

(λ_s^0 — собственные значения оператора \hat{p}^2). Введем под интеграл (78) три разложения единицы

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int d^4x |\varphi(x)|^4 \right)^4 \int d^4x_0 \prod_{\mu=1}^4 \delta \left(- \int d^4x |\varphi(x)|^4 (x - x_0)_\mu \right), \\ 1 &= \int d^4x |\varphi(x)|^4 \int_0^\infty d \ln R^2 \delta \left(- \int d^4x |\varphi(x)|^4 \ln \left(\frac{x - x_0}{R} \right)^2 \right), \\ 1 &= \int d^n u \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}\{\varphi\}), \end{aligned} \quad (80)$$

где единичный вектор \mathbf{v} фиксирован условием

$$\mathbf{v}\{\varphi\} \parallel \int d^4x |\varphi(x)|^l \varphi(x), \quad l > 1. \quad (81)$$

Делая замену переменных

$$x - x_0 = R\tilde{x}, \quad \varphi_\alpha(x_0 + R\tilde{x}) = R^{-1} \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}) \quad (82)$$

и изменяя порядок интегрирования, имеем, опуская тильды,

$$\begin{aligned} [G_M]_{N-1} &= \int_0^\infty d \ln R^2 Z_0(\kappa_R)^{-1} \int d^4x_0 \int d^n u R^{-M-4} \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \times \\ &\times \prod_{\mu=1}^4 \delta \left(- \int d^4x |\varphi(x)|^4 x_\mu \right) \delta \left(- \int d^4x |\varphi(x)|^4 \ln x^2 \right) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \\ &\times \left(\int d^4x |\varphi(x)|^4 \right)^5 \varphi_{\alpha_1} \left(\frac{x_1 - x_0}{R} \right) \dots \varphi_{\alpha_M} \left(\frac{x_M - x_0}{R} \right) \exp \{ -H\{\kappa_R, g, \varphi\} - N \ln g \}, \end{aligned} \quad (83)$$

где

$$\kappa_R \equiv \kappa R. \quad (84)$$

Замена (82) проведена также в (79), что сокращает множитель, возникающий от преобразования $D\varphi$. Смысл преобразований (80)–(83) состоит во введении интегрирований по произвольным параметрам инстантона: положению его центра x_0 , «ориентации» \mathbf{u} и радиусу R ; в интеграле (83) выбор этих параметров уже фиксирован δ -функциями: центр — в точке $x = 0$, ориентация — вдоль вектора \mathbf{u} , радиус, определяемый условием

$$\int d^4x \varphi_c(x)^4 \ln x^2 = 0, \quad (85)$$

— значением $R = 1$ для функции (72).

Проведем в (83) разложение вблизи значения g_c , определяемого (70), и произвольной сферически-симметричной функции $\varphi_c(x)$, убывающей на бесконечности, полагая

$$g = g_c + \delta g, \quad \varphi_\alpha(x) = [\varphi_c(x) + \delta\varphi_L(x)]u_\alpha + \delta\varphi_\alpha^T(x), \quad \delta\varphi^T \perp \mathbf{u} \quad (86)$$

и ограничиваясь членами второго порядка по приращениям; вводя коэффициенты разложения C_s^L и $C_s^{T,\alpha}$ по собственным функциям операторов (74)

$$\delta\varphi_L(x) = \sum_s C_s^L e_s^L(x), \quad \delta\varphi_\alpha^T(x) = \sum_s C_s^{T,\alpha} e_s^T(x), \quad (87)$$

получим

$$\begin{aligned} [G_M]_{N-1} = & \left(\int d^4x \varphi_c(x)^4 \right)^5 \int_0^\infty d \ln R^2 Z_0(\kappa_R)^{-1} \int d^4x_0 \int d^n u \delta(|\mathbf{u}|-1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M} R^{-4-M} \times \\ & \times \left(\int d^4x \varphi_c(x)^{l+1} \right)^{n-1} \varphi_c \left(\frac{x_1-x_0}{R} \right) \dots \varphi_c \left(\frac{x_M-x_0}{R} \right) \exp \{ -N \ln g_c - H \{ x_R, g_c, \varphi_c \} \} \times \\ & \times \int \frac{dg}{2\pi i} \int DC^L \int DC^T \prod_{\mu=0}^4 \delta \left(\sum_s \gamma_s^\mu C_s^L \right) \prod_{\alpha=0}^{n-1} \delta \left(\sum_s C_s^{T,\alpha} \beta_s \right) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2} N \left(\frac{\delta g}{g_c} \right)^2 - \frac{\delta g}{g_c} \sum_s C_s^L \omega_s - \sum_s C_s^L \sigma_s - \frac{1}{2} \sum_s (\lambda_s^L + \kappa_R^2) (C_s^L)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_s \sum_\alpha (\lambda_s^T + \kappa_R^2) (C_s^{T,\alpha})^2 \right\}, \quad (88) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_s &= g_c \int d^4x \varphi_c^3(x) e_s^L(x), \\ \sigma_s &= \int d^4x e_s^L(x) [-\Delta\varphi_c(x) + \kappa_R^2 \varphi_c(x) + g_c \varphi_c(x)^3], \\ \gamma_s^0 &= 4 \int d^4x \varphi_c^3(x) e_s^L(x) \ln x^2, \\ \gamma_s^\mu &= 4 \int d^4x \varphi_c^3(x) e_s^L(x) x_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \\ \beta_s &= \int d^4x \varphi_c^l(x) e_s^T(x). \end{aligned} \quad (89)$$

Преобразуя δ -функции в экспоненты по формуле

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\tau x} \quad (90)$$

и приводя выражение в экспоненте к сумме квадратов, получим для интеграла по g , C^L , C^T в (88) результат

$$\frac{g_c}{(2\pi)^{(n+5)/2}} \left(\prod_s \frac{2\pi}{\lambda_s^L + \kappa_R^2} \right)^{1/2} \left(\prod_s \frac{2\pi}{\lambda_s^T + \kappa_R^2} \right)^{(n-1)/2} (\langle \beta^2 \rangle_T)^{-(n-1)/2} \left(\prod_{\mu=1}^4 \langle \gamma^\mu \gamma^\mu \rangle \right)^{-1/2} \times$$

$$\times [N \langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle + \langle \omega^2 \rangle \langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle - \langle \omega \gamma^0 \rangle^2]^{-1/2} \exp \left\{ -N \ln g_c - H \{ \kappa_R, g_c, \varphi_c \} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \langle \sigma^2 \rangle - \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma \omega \rangle^2}{N + \langle \omega^2 \rangle} - \frac{1}{2} \frac{[\langle \sigma \gamma^0 \rangle (N + \langle \omega^2 \rangle) - \langle \sigma \omega \rangle \langle \omega \gamma^0 \rangle]^2}{(N + \langle \omega^2 \rangle) [\langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle (N + \langle \omega^2 \rangle) - \langle \omega \gamma^0 \rangle^2]} \right\}, \quad (91)$$

где введены обозначения

$$\langle fg \rangle = \sum_s \frac{f_s g_s}{\lambda_s^L + \kappa_R^2}, \quad \langle fg \rangle_T = \sum_s \frac{f_s g_s}{\lambda_s^T + \kappa_R^2}. \quad (92)$$

Среднее $\langle fg \rangle$ выражается через функцию Грина оператора $\hat{M}_L + \kappa_R^2$, что с учетом очевидной симметрии позволяет доказать уже использованное в (91) обращение в нуль величин

$$\langle \sigma \gamma^\mu \rangle = \langle \omega \gamma^\mu \rangle = 0, \quad \mu \neq 0; \quad \langle \gamma^\mu \gamma^{\mu'} \rangle = 0, \quad \mu \neq \mu'. \quad (93)$$

Для «правильного» инстантона, удовлетворяющего уравнению (71) с $\kappa \rightarrow \kappa_R$, коэффициенты $\sigma_s \equiv 0$ и в экспоненте (88) отсутствуют члены линейные по отклонениям. Неразрешимость уравнения (71) не позволяет обратить коэффициенты σ_s в нуль; для справедливости перехода от (83) к (91) они должны быть достаточно малыми, чтобы сдвиги переменных C_s^L , производимые при диагонализации квадратичной формы, не выводили разложение (88) за пределы его применимости. Возникает вопрос о возможности выбрать φ_c так, чтобы обеспечить требуемую малость σ_s . При выборе инстантона согласно разд. 7.3 сумма $\sum_s \sigma_s C_s^L$ оказывается пропорциональной сумме $\sum_s \gamma_s^0 C_s^L$, величина которой фиксируется значением равным нулю ввиду наличия в (88) соответствующей δ -функции; тем самым линейные по отклонениям члены исключаются из экспоненты (88) точно.

7.3. Выбор инстантона

Выберем функцию $\varphi_c(x)$ из условия минимума $H \{ \kappa_R, g_c, \varphi \}$ при дополнительном условии (85), фиксирующем радиус инстантона; это приводит к уравнению

$$-\Delta \varphi_c(x) + \kappa_R^2 \varphi_c(x) + g_c \varphi_c^3(x) + \mu \varphi_c^3(x) \ln x^2 = 0 \quad (94)$$

(μ — множитель Лагранжа [23]), используя которое, легко доказать, что

$$\sigma_s = -\frac{\mu}{4} \gamma_s^0, \quad 2\omega_s - \frac{\mu}{4} \gamma_s^0 = (\lambda_s^L + \kappa_R^2) \int d^4 x \varphi_c(x) e_s^L(x), \quad H \{ \kappa_R, g_c, \varphi_c \} = N, \quad (95)$$

откуда имеем соотношения

$$\langle \sigma^2 \rangle = \left(\frac{\mu}{4} \right)^2 \langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle, \quad \langle \sigma \omega \rangle = -\frac{\mu}{4} \langle \omega \gamma^0 \rangle, \quad \langle \sigma \gamma^0 \rangle = -\frac{\mu}{4} \langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle,$$

$$\langle \omega^2 \rangle = -2N + \frac{\mu}{8} \langle \omega \gamma^0 \rangle, \quad \langle \omega \gamma^0 \rangle = \frac{\mu}{8} \langle \gamma^0 \gamma^0 \rangle, \quad (96)$$

с учетом которых (91) сильно упрощается и (88) принимает вид

$$[G_M]_{N-1} = \left(\int d^4 x \varphi_c(x)^4 \right)^5 \int d^4 x_0 \int_0^\infty d \ln R^2 \int d^n u \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M} R^{-4-M} \times \\ \times \left(\int d^4 x \varphi_c^{l+1}(x) \right)^{n-1} \varphi_c \left(\frac{x_1 - \bar{x}_0}{R} \right) \dots \varphi_c \left(\frac{x_M - x_0}{R} \right) \left(\frac{D_0}{D_T} \right)^{(n-1)/2} \left(-\frac{D_0}{D_L} \right)^{1/2} \times \\ \times g_c (2\pi)^{-(n+5)/2} N^{-1/2} \prod_{\mu=0}^4 \langle \gamma^\mu \gamma^\mu \rangle^{-1/2} (\langle \beta^2 \rangle_T)^{-(n-1)/2} \exp(-N - N \ln g_c), \quad (97)$$

где введены обозначения для детерминантов

$$D_L = \prod_s (\lambda_s^L + \kappa_R^2), \quad D_T = \prod_s (\lambda_s^T + \kappa_R^2), \quad D_0 = \prod_s (\lambda_s^0 + \kappa_R^2). \quad (98)$$

7.4. ЯВНЫЙ ВИД ИНСТАНТОНА

Замена $\mu = (-g_c)\mu_0$ и переход к функции $\phi_c(x)$, согласно первому соотношению (72), исключает g_c из уравнения (94). При малых κ_R , когда $\mu_0 \sim \kappa_R^2 \ln \kappa_R$ (см. ниже), уравнение (94) выделяет два масштаба: масштаб $|x| \sim 1$, определяющий радиус локализации инстантонного «кора», и масштаб $|x| \sim \kappa_R^{-1}$, до которого простирается инстантонный «хвост»; это позволяет провести рассмотрение в двух перекрывающихся областях, $|x| \ll \kappa_R^{-1}$ и $|x| \gg 1$, и произвести сшивку решений.

Область $|x| \ll \kappa_R^{-1}$. При $\kappa_R = 0$, $\mu = 0$ уравнение (94) имеет точное решение (72), в котором условие (85) фиксирует выбор $R = 1$; учитывая члены, содержащие κ_R^2 и μ , как возмущение, имеем

$$\phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}}{z+1} \left[1 + \frac{1-z}{1+z} v(z) \right]_{z=x^2}, \\ v(z) = \frac{\kappa_R^2}{4} \int_0^z dz \frac{(1+z)^4}{(1-z)^2 z^2} \left[-\ln(1+z) + \frac{z+2z^2}{(1+z)^2} \right] + \mu_0 \frac{z}{z-1} \left[-\ln z - \frac{z}{6} + \frac{3}{2} \right]. \quad (99)$$

Вычисляя асимптотику $v(z)$ при $z \gg 1$ с учетом лишь растущих по z членов, имеем для области $1 \ll |x| \ll \kappa_R^{-1}$

$$\phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}}{x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \kappa_R^2 x^2 \ln |x| + \left[\frac{1}{6} \mu_0 - \frac{3}{4} \kappa_R^2 \right] x^2 + 3\kappa_R^2 \ln^2 |x| + \right. \\ \left. + \left[2\mu_0 - \frac{11}{2} \kappa_R^2 \right] \ln |x| - \frac{1}{x^2} \right\}. \quad (100)$$

Область $|x| \gg 1$. При отбрасывании нелинейных по $\phi_c(x)$ членов уравнение (94) имеет решение $B|x|^{-1} K_1(\kappa_R|x|)$, где $K_1(x)$ — функция Мак-Дональда; учитывая отброшенные члены как возмущение, имеем

$$\phi_c(x) = B|x|^{-1} K_1(\kappa_R|x|) \left\{ 1 - B^2 \int_{|x|}^\infty \frac{dy}{y K_1^2(\kappa_R y)} \int_y^\infty z^{-1} K_1^4(\kappa_R z) dz \right\}, \quad (101)$$

что в области $|x| \ll \kappa_R^{-1}$ при соответствующем выборе B приводит к результату

$$\phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}}{x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\kappa_R^2 x^2 \ln|x| + \frac{2C - 1 + 2\ln(\kappa_R/2)}{4} \kappa_R^2 x^2 + 3\kappa_R^2 \ln^2|x| + \right. \\ \left. + \kappa_R^2 \left(6C + \frac{1}{2} + 6\ln\left(\frac{\kappa_R}{2}\right) \right) \ln|x| - \frac{1}{x^2} \right\}, \quad (102)$$

где C — постоянная Эйлера. Выражения (100) и (102) совпадают при условии

$$\mu_0 = 3\kappa_R^2 (\ln \kappa_R + C + 1 - \ln 2). \quad (103)$$

Используя (99) для вычисления интеграла в (70), определяемого областью $|x| \lesssim 1$, имеем

$$N \ln g_c = N \ln \left(-\frac{I_4}{4N} \right) + N f(\kappa_R), \quad f(x) \equiv 3x^2 \left(\ln 2 - C - \frac{1}{2} - \ln x \right). \quad (104)$$

Здесь введено обозначение для интегралов

$$I_p = \int d^4 x \phi_c^p(x), \quad (105)$$

соответствующих безмассовой теории (т.е. для $\phi_c(x)$ вида (72) с $R = 1$).

7.5. Преобразование предэкспоненты в (97)

Подстановка (104) в (97) показывает, что экспонента ограничивает интегрирование по R областью $\kappa_R^2 \ln \kappa_R \lesssim N^{-1}$, что позволяет вычислять предэкспоненту в пределе $\kappa_R \rightarrow 0$; при этом решение уравнения (94) переходит в инстантон безмассовой теории (72) с $R = 1$. Ввиду появления у операторов \hat{M}_L и \hat{M}_T нулевых мод (75)–(77) входящие в (97) средние содержат расходимости

$$\langle \gamma^\mu \gamma^\mu \rangle \approx \frac{(\gamma^\mu)^2}{\lambda_\mu^L + \kappa_R^2}, \quad \langle \beta^2 \rangle_T \approx \frac{\beta_0^2}{\lambda_0^T + \kappa_R^2}, \quad (106)$$

которые сокращаются с соответствующими множителями, содержащимися в детерминантах D_L и D_T . Последние, следуя Брезану и Паризи [15] (см. подробнее в [6]), удобно выразить через функцию

$$D(z) = \det \left[1 - \frac{3z\phi_c^2(x)}{\hat{p}^2 + \kappa_R^2} \right] = \prod_s \left(1 - \frac{z}{\mu_s} \right), \quad (107)$$

где μ_s — собственные значения задачи

$$[\hat{p}^2 + \kappa_R^2 - 3\mu_s \phi_c^2(x)] \psi_s(x) = 0. \quad (108)$$

Строя теорию возмущений вблизи $z = 1$ и $z = 1/3$, нетрудно показать, что

$$\frac{D_L}{D_0} = \left[3 \int d^4 x \phi_c^2(x) e_0^{L^2}(x) \right]^{-1} \left[\frac{4}{I_6} \int d^4 x \left(\frac{\partial \phi_c}{\partial x_\mu} \right)^2 \right]^4 \bar{D}(1) \prod_{\mu=0}^4 (\lambda_\mu^L + \kappa_R^2),$$

$$\frac{D_T}{D_0} = \frac{I_2}{I_4} \bar{D} \left(\frac{1}{3} \right) (\lambda_T^0 + \kappa_R^2), \quad (109)$$

где чертой отмечено исключение из произведения (107) нулевых сомножителей при $z = 1$ и $z = 1/3$.

Произведение (107) содержит расходимости, определяемые расходимостью сумм $\sum_s \mu_s^{-1}$ и $\sum_s \mu_s^{-2}$; первая устраняется перенормировкой величины κ [15], для второй справедлив результат

$$\sum_s \frac{1}{\mu_s^2} = 9 \int_0^{\Lambda R} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda R} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\langle \phi_c^2 \rangle_q \langle \phi_c^2 \rangle_{-q}}{(k^2 + \kappa_R^2)[(k+q)^2 + \kappa_R^2]}, \quad \langle f \rangle_q \equiv \int d^4 x f(x) e^{iqx}, \quad (110)$$

получаемый путем вычисления $\ln D(z)$ с точностью до z^2 по теории возмущений. При $\kappa_R = 0$ имеем

$$\sum_s \frac{1}{\mu_s^2} = 9K_4 I_4 \left[\ln \Lambda R - \ln 2 + C + \frac{1}{3} \right]. \quad (111)$$

Расходимость при $\Lambda \rightarrow \infty$ в (111) может быть устранена перенормировкой заряда⁴⁾, однако нас интересует разложение типа (8), содержащее затравочный заряд g_0 и логарифмические расходимости в явном виде. Вводя перенормированную функцию

$$D_R(z) = \prod_s \left(1 - \frac{z}{\mu_s} \right) \exp \left(\frac{z}{\mu_s} + \frac{z^2}{2\mu_s^2} \right), \quad (112)$$

подставляя (106), (109), (111) в (97) и пользуясь соотношениями между интегралами, получаемыми дифференцированием по параметрам и интегрированием по частям, получим

$$\begin{aligned} [G_M(x_1, \alpha_1, \dots, x_M, \alpha_M)]_N &= c(-1)^N \left(\frac{4}{I_4} \right)^{N+M/2+5/2} \Gamma \left(N + \frac{M+n+4}{2} \right) \times \\ &\times \int d^n u \delta(|\mathbf{u}| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_M} \int_0^\infty d \ln R^2 \int d^4 x_0 R^{-4-M} \phi_c \left(\frac{x_1 - x_0}{R} \right) \dots \left(\frac{x_M - x_0}{R} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{n+8}{3} \ln(\Lambda R) - N f(\kappa_R) \right\}, \quad (113) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c &= \frac{2^{n-2} 3^{1/2}}{(2\pi)^{3+n/2}} \left(\frac{I_6}{4} \right)^2 J^{1/2} \exp \left\{ -\frac{3(n+4)}{4} + \frac{n+8}{3} [-\ln 2 + C + 1/3] \right\} \times \\ &\times \left(-\bar{D}_R(1) \bar{D}_R^{-n-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right)^{-1/2}, \quad (114) \end{aligned}$$

⁴⁾ Это можно сделать, следуя рассуждениям разд. 4.6 работы [6], используя наиболее общий вид контрчленов (см. формулы (3.26)–(3.28) в [10]).

$$J = \int d^4 x \phi_c^2(x) \left(\frac{\partial \phi_c(x)}{\partial R} \right)^2 \Big|_{R=1} \quad (115)$$

Нужные нам значения интегралов равны

$$I_3 = 4\sqrt{2}S_4, \quad I_4 = \frac{16}{3}S_4, \quad I_6 = \frac{64}{5}S_4, \quad J = \frac{16}{15}S_4; \quad S_4 = 2\pi^2. \quad (116)$$

7.6. Вычисление детерминантов

Выражение для d -мерного оператора Лапласа в сферических координатах $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{d-1})$ получается в рамках стандартной процедуры [24, § 3] индукцией по числу измерений:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{l}^2}{r^2}, \quad (117)$$

где \hat{l}^2 – дифференциальный оператор, действующий на угловые переменные. Сферическая функция Y_l l -го порядка есть однородный гармонический полином $u_l(x)$ степени l , рассматриваемый на единичной сфере $|x| = 1$ [24, § 25]; подставляя $u_l(x) = r^l Y_l(s)$, $s = x/|x|$ в уравнение Лапласа, получим задачу на собственные значения

$$\hat{l}^2 Y_l(s) = l(l+d-2)Y_l(s), \quad (118)$$

разрешимую лишь при целых l , так как уравнение Лапласа не имеет решений, отличных от полиномов [24, § 21.9]. Однородный полином степени l от d переменных имеет C_{l+d-1}^l коэффициентов (число сочетаний с повторениями из d различных объектов по l в каждом [25, стр. 568]); под действием оператора Лапласа он превращается в однородный полином степени $(l-2)$, равенство нулю которого дает C_{l+d-3}^{l-2} условий. Поэтому кратность вырождения N_l l -го собственного значения определяется разностью $C_{l+d-1}^l - C_{l+d-3}^{l-2}$, т.е.

$$N_l = \frac{(l+d-3)!}{(d-2)!} (d+2l-2). \quad (119)$$

Разделение переменных в (108) при $\kappa_R = 0$ приводит к уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{24\mu}{(r^2+1)^2} - \frac{l(l+2)}{r^2} \right] \psi(r) = 0 \quad (120)$$

для радиальной функции $\psi(r)$. Полагая $\mu = s(s+1)/6$ и делая замену $\psi = y \operatorname{ch}^{-s} t$, $t = \ln r$, получим

$$F\{y\} \equiv \operatorname{ch} t y''_{tt} + [2 \operatorname{ch} t - 2s \operatorname{sh} t] y'_t + \{ [s^2 - l(l+2)] \operatorname{ch} t - 2s \operatorname{sh} t \} y = 0. \quad (121)$$

Воздействие функционала $F\{y\}$ на экспоненту e^{kt} дает линейную комбинацию $e^{(k+1)t}$ и $e^{(k-1)t}$; легко понять, что нетривиальное решение уравнения (121) является суперпозицией n экспонент с показателями, отличающимися на $2t$, коэффициенты которой

подобраны так, чтобы удовлетворить уравнению (121). Для собственных значений и функций уравнения (120) получим

$$\psi_{nl}(r) = \left(\frac{r}{r^2 + 1}\right)^{n+l} [A_1 r^{-n} + A_2 r^{-n+2} + \dots + A_n r^{n-2}],$$

$$\mu_{nl} = (n+l)(n+l+1)/6, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (122)$$

где n — радиальное, l — орбитальное квантовые числа; очевидно наличие случайного вырождения — такого же, как в атоме водорода. Существенно различные μ_s пробегают ряд значений $s(s+1)/6$ с кратностью вырождения $s(s+1)(2s+1)/6$ ($s = 1, 2, \dots$); для входящих в (114) детерминантов получим

$$-\bar{D}_R(1) = 2 \exp \left\{ \frac{15}{2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \left(1 - \frac{6}{s(s+1)} \right) + \frac{6}{s(s+1)} + \frac{18}{s^2(s+1)^2} \right] \right\} \approx 578,$$

$$\bar{D}_R \left(\frac{1}{3} \right) = \exp \left\{ \sum_{s=2}^{\infty} \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \left[\ln \left(1 - \frac{2}{s(s+1)} \right) + \frac{2}{s(s+1)} + \frac{2}{s^2(s+1)^2} \right] \right\} \approx 0.872. \quad (123)$$

7.7. Вершинная часть и непертурбативный вклад

Для интеграла по $d^n u$ в (113) имеем [16]

$$\int d^n u \delta(|u| - 1) u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{2M}} = \frac{2\pi^{n/2}}{2^M \Gamma(M + n/2)} I_{\alpha_1 \dots \alpha_{2M}}, \quad (124)$$

где $I_{\alpha_1 \dots \alpha_{2M}}$ представляет сумму членов $\delta_{\alpha_1 \alpha_1} \dots \delta_{\alpha_j \alpha_j}$, полученных всевозможными спариваниями (в дальнейшем исключаем $I_{\alpha_1 \dots \alpha_{2M}}$ из определения G_{2M}). Пользуясь алгеброй факториальных рядов [6], легко показать, что переход к вершинной части $\Gamma^{(0,M)}$ происходит по формуле

$$[\Gamma^{(0,M)}(p_1, \dots, p_M)]_N = [G_M(p_1, \dots, p_M)]_N (p_1^2 + \kappa^2) \dots (p_M^2 + \kappa^2). \quad (125)$$

Проводя фурье-преобразование (113) и пользуясь соотношением для фурье-компонент

$$\langle \phi_c \rangle_p = \frac{\langle \phi_c^3 \rangle_p - \mu_0 \langle \phi_c^3 \ln x^2 \rangle_p}{p^2 + \kappa_R^2} \approx \frac{\langle \phi_c^3 \rangle_p}{p^2 + \kappa_R^2}, \quad (126)$$

следующим из уравнения инстантона (94), имеем

$$[\Gamma^{(0,2M)}(p_1, \dots, p_{2M})]_N = c \frac{2\pi^{n/2}}{2^M \Gamma(M + n/2)} \left(\frac{4}{I_4}\right)^{M+5/2} \left(-\frac{4}{I_4}\right)^N \Gamma\left(N + \frac{2M+n+4}{2}\right) \times \\ \times \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-4+2M} \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_1} \dots \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_{2M}} \exp \left\{ \frac{n+8}{3} \ln(\Lambda R) - N f(\kappa R) \right\}. \quad (127)$$

Вычисляя интеграл с логарифмической точностью, для $p_i = 0$ получим

$$[\Gamma^{(0,2M)}(p_i = 0, \kappa)]_N = c_{2M} (\ln N)^{-\gamma} \Gamma\left(N + \frac{n+8}{3}\right) \left(-\frac{4}{I_4}\right)^N \kappa^{4-2M} \exp\left(\frac{n+8}{3} \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right),$$

$$c_{2M} = c \left(\frac{4}{I_4} \right)^{M+5/2} \left(\frac{2}{3} \right)^\gamma (I_3)^{2M} \frac{2\pi^{n/2}\Gamma(\gamma)}{2^M\Gamma(M+n/2)}, \quad \gamma = M + \frac{n-4}{6}. \quad (128)$$

При $\kappa = 0$, $p_i = p$ с учетом результата

$$\langle \phi_c^3 \rangle_p = 8\sqrt{2}\pi^2 p K_1(p) \quad (129)$$

имеем

$$\begin{aligned} [\Gamma^{(0,2M)}(p)]_N &= \tilde{c}_{2M} \Gamma\left(N + \frac{n+2M+4}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4}\right)^N p^{4-2M} \exp\left(\frac{n+8}{3} \ln \frac{\Lambda}{p}\right), \\ \tilde{c}_{2M} &= c \frac{4\pi^{n/2}(8\pi^2)^{2M}}{\Gamma(M+n/2)} \left(\frac{4}{I_4}\right)^{M+5/2} \int_0^\infty dy y^{4M-5+(n+8)/3} K_1(y)^{2M}. \end{aligned} \quad (130)$$

Непертурбативный вклад в вершину $\Gamma^{(0,2M)}$ определим как

$$[\Gamma^{(0,2M)}]_{nonpert} = \sum_{N=N_0}^\infty [\Gamma^{(0,2M)}]_N (g_0 - i0)^N, \quad N_0 \gg 1. \quad (131)$$

Мнимая добавка к g_0 возникает из-за необходимости проводить аналитическое продолжение с положительных g_0 на отрицательные [2], которое для $\text{Im} \kappa^2 < 0$ проводится через нижнюю полуплоскость. Неperтурбативный вклад для асимптотики Липатова получим, подставляя (127) в (131), исключая заменой $b \rightarrow be^{i\varphi}$ мнимую часть величины κ из суммы по N и суммируя по формуле (90) работы [6],

$$\begin{aligned} [\Gamma^{(0,2M)}(p_1, \dots, p_{2M})]_{nonpert}^{Lipatov} &= i\pi c \frac{2\pi^{n/2}}{2^M\Gamma(M+n/2)} \left(\frac{4}{I_4}\right)^{M+5/2} \left(\frac{I_4}{4|g_0|}\right)^{M+(n+4)/2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{I_4}{4|g_0|}\right) \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-4+2M} \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_1} \dots \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp_{2M}} \exp\left\{\frac{n+8}{3} \ln(\Lambda R) - \frac{I_4}{4|g_0|} f(\kappa R)\right\}, \end{aligned} \quad (132)$$

что для $p_i = 0$ дает

$$\begin{aligned} [\Gamma^{(0,2M)}(p_i = 0, \kappa)]_{nonpert}^{Lipatov} &= i\pi c_{2M} \left(\frac{I_4}{4|g_0|}\right)^{(n+8)/3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{I_4}{4|g_0|}\right) \left(\ln \frac{1}{|g_0|}\right)^{-\gamma} \kappa^{4-2M} \exp\left(\frac{n+8}{3} \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right). \end{aligned} \quad (133)$$

Вершина $\Gamma^{(0,2)}$ совпадает с собственной энергией и из (128) и (133) следуют результаты (21) и (47). Выражение (130) при $M = 2$ позволяет воспроизвести результаты работ [14, 16] для коэффициентов разложения функции Гелл-Манна-Лоу (см. Приложение 1).

Автор признателен участникам семинаров в ИФП и ФИАН за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (гранты МОН 000 и МОН 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-02-19527).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Взаимосвязь различных ренормализаций

Определения функции Гелл-Манна-Лоу для Λ - и μ -ренормализаций имеют вид [10]

$$W^{(\Lambda)}(g_0) = \frac{\partial g_0}{\partial \ln \Lambda} \Big|_{g_\mu, \mu = \text{const}}, \quad W^{(\mu)}(g_\mu) = \frac{\partial g_\mu}{\partial \ln \mu} \Big|_{g_0, \Lambda = \text{const}}, \quad (\text{П.1})$$

а связь перенормированного заряда с затравочным определяется логарифмическими разложениями типа (54)

$$g_\mu = \sum_{N=1}^{\infty} B_N g_0^N = \sum_{N=1}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^{N-1} A_N^K \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} \right)^K, \quad (\text{П.2})$$

$$g_0 = \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{B}_N g_\mu^N = \sum_{N=1}^{\infty} g_\mu^N \sum_{K=0}^{N-1} \tilde{A}_N^K \left(\ln \frac{\mu}{\Lambda} \right)^K, \quad (\text{П.3})$$

где $B_1 = \tilde{B}_1 = 1$. Функция $g_\mu(g_0, \Lambda/\mu)$ удовлетворяет уравнению типа (15) с $V(g_0) \equiv 0$ и для коэффициентов A_N^K из (П.2) справедливы уравнения (55) с $W_M \equiv W_M^{(\Lambda)}$ и $V_M \equiv 0$; таким же образом связаны $W_N^{(\mu)}$ и \tilde{A}_N^K . Находя связь \tilde{A}_N^K и A_N^K при небольших N , легко убедиться, что коэффициенты $W_N^{(\Lambda)}$ и $W_N^{(\mu)}$ совпадают при $N = 2, 3$, но различаются в высших порядках. При больших N коэффициенты B_N определяются выражением (130) при $p = \mu$, $M = 2$, так как по определению $-2g_\mu = \Gamma_R^{(0,4)}(\mu) = Z^2 \Gamma^{(0,4)}(\mu)$ (коэффициент -2 вводится из условия $B_1 = 1$), а учет Z -фактора при больших N не требуется ввиду более медленного роста его коэффициентов. Обращение факториального ряда (П.2) дает при больших N

$$\tilde{B}_N \approx - \sum_{M=0,1,2,\dots} B_{N-M} \frac{(N \tilde{B}_2)^M}{M!} \approx -B_N \exp\left(-\frac{B_2}{a}\right), \quad (\text{П.4})$$

что позволяет определить \tilde{A}_N^K . Учитывая, что $A_2^1 = -K_4(n+8)$, имеем из (55)

$$W_N^{(\mu)} \approx -\tilde{A}_N^1 - W_2^{(\mu)} N \tilde{A}_{N-1}^0 \simeq \frac{n+8}{6} \tilde{c}_4 \Gamma\left(N + \frac{n+8}{2}\right) a^N \exp\left(-\frac{A_2^0}{a}\right), \quad (\text{П.5})$$

и подстановка $A_2^0 = -(n+8)K_4(1 - \ln(4/3))/2$ воспроизводит результаты работ [14, 16], в которых определения g_μ и g_0 отличаются множителем 3!

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Свойства неприводимой вершины R^0

Введем для неприводимой вершины $R^0(p_1, p_2, p_3, p_4)$ при $\kappa = 0$ трехимпульсное обозначение $R^0(p, k, q)$, где

$$2p = p_4 - p_3, \quad 2k = p_1 - p_2, \quad q = p_1 + p_2 = -p_3 - p_4, \quad (\text{П.6})$$

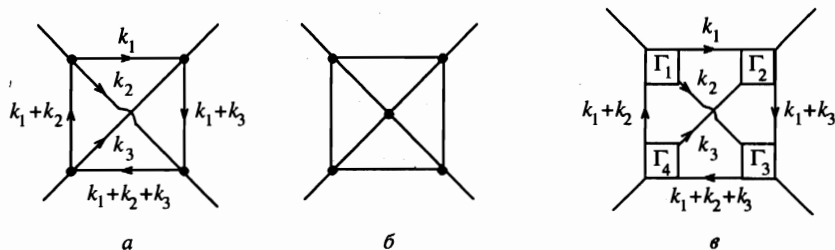


Рис. 5. Примеры скелетных *a*, *b* и нескелетных *v* диаграмм для вершины R^0 ; расстановка внутренних импульсов на диаграммах *a* и *v* соответствует нулевым внешним импульсам

a нумерация концов выбрана так, что $p \geq k \geq q \geq 0$. Вообще говоря, при $p \gg k \gg q$ для R^0 справедливо логарифмическое разложение

$$R^0(p, k, q) = \sum_{N=1}^{\infty} g_0^N \sum_{\substack{K, L, M, \\ K+L+M \leq N-1}} A_N^{K, L, M} \left(\ln \frac{\Lambda}{p}\right)^K \left(\ln \frac{\Lambda}{k}\right)^L \left(\ln \frac{\Lambda}{q}\right)^M \quad (\text{П.7})$$

и для доказательства зависимости вершины R^0 лишь от максимального импульса достаточно установить ее конечность при $k = q = 0, p \neq 0$; при этом $p_4 = p, p_3 = -p, p_1 = p_2 = 0$ и можно сказать, что импульс p «пропускается» из вершины 4 в вершину 3.

Идея доказательства основана на том, что нужно различать скелетные диаграммы типа *a*, *b* (рис. 5) и нескелетные *v*, получаемые из скелетных заменой простых вершин на четыреххвостные блоки. На примере вклада диаграммы *a*

$$R_{(a)}^0(p_i = 0) \sim g_0^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 G_{k_1} G_{k_2} G_{k_3} G_{k_1+k_2} G_{k_1+k_3} G_{k_1+k_2+k_3}, \quad (\text{П.8})$$

легко видеть, что скелетные диаграммы при нулевых внешних импульсах содержат лишь однологарифмические расходимости, возникающие от области интегрирования, в которой все внутренние импульсы одного порядка и малы; отсутствие других расходимостей связано с невозможностью найти один импульс k_i , определяющий аргументы двух G -функций, два импульса k_i и k_j , определяющие аргументы четырех G -функций и т. д. При пропуски импульса p через любую пару вершин однологарифмические расходимости обрезаются на импульсе p , так как он входит в аргумент хотя бы одной G -функции; тем самым диаграмма конечна при $k = q = 0$. Расходимости нескелетных диаграмм обрезаются так же, как расходимости скелетных, из которых они получены.

Приступим к формализации сделанных утверждений. Как известно [10, р. 141], диаграмма с E внешними линиями в N -м порядке теории возмущений имеет $I = 2N - E/2$ внутренних линий, $L = N - E/2 + 1$ независимых интегрирований (петель) и расходится при $d = 4$ на больших импульсах как k^{4-E} . В дальнейшем имеем в виду четыреххвостные диаграммы ($E = 4$) с L петлями, $2L$ внутренними линиями, $(L + 1)$ вершинами, расходящиеся логарифмически.

Определение. Назовем диаграмму скелетной, если в ней нельзя выбрать L' независимых интегрирований так, что $L' < L$ и импульсы интегрирования $k_1, k_2, \dots, k_{L'}$ полностью определяют аргументы $2L'$ или более функций Грина.

Лемма 1. Скелетная диаграмма содержит лишь однологарифмические расходимости, которые устраняются при пропуски импульса p через любую пару вершин.

Доказательство очевидно из определения и пояснений, данных после формулы (П.8).

Лемма 2. В скелетной диаграмме нельзя выделить поддиаграмму, имеющую вид четыреххвостного блока.

Пусть, от противного, это возможно. В выделенном блоке будет $M < L$ независимых интегрирований по импульсам k_1, k_2, \dots, k_M , которые будут входить лишь в $2M$ функций Грина, соответствующих внутренним линиям блока. Остальные $L' = L - M$ импульсов интегрирования будут полностью определять аргументы $2L - 2M = 2L'$ функций Грина, что противоречит определению скелетной диаграммы.

Лемма 3. В диаграмме, не являющейся скелетной, всегда можно выделить поддиаграмму, имеющую вид четыреххвостного блока.

В нескелетной диаграмме найдутся L' импульсов интегрирования, полностью определяющие аргументы $2L'$ функций Грина. Оставшиеся $M = L - L'$ импульсов интегрирования входят лишь в $2L - 2L' = 2M$ функций Грина; соответствующие $2M$ внутренних линий будут, вообще говоря, располагаться отдельными кластерами. Выделим один такой (i -й) кластер, содержащий N_i вершин, L_i петель и I_i линий и вынем его из диаграммы, оборвав E_i линий; очевидно, $I_i = 2N_i - E_i/2$, $L_i = N_i - E_i/2 + 1$, так что

$$I_i - 2L_i = E_i/2 - 2. \quad (\text{П.9})$$

Очевидно, все E_i четны; случаи $E_i = 0$ и $E_i = 2$ соответствуют несвязным диаграммам и собственно-энергетическим вставкам и предполагаются исключенными. Тогда $E_i \geq 4$ и в силу (П.9) имеем

$$I_i - 2L_i \geq 0. \quad (\text{П.10})$$

Суммируя по всем i и учитывая, что $\sum_i I_i = 2M$, $\sum_i L_i = M$, видим, что в (П.10) имеет место знак равенства, так что (см. (П.9)) $E_i = 4$ и все вынутые кластеры оказываются четыреххвостками. Поскольку хотя бы один кластер существует, то утверждение доказано.

Лемма 4. Нескелетная диаграмма может быть получена из некоторой скелетной путем замены всех или части простых вершин четыреххвостными блоками.

Последовательно выделяя в нескелетной диаграмме четыреххвостные блоки и заменяя их простыми вершинами, придем в конце концов к скелетной диаграмме. Проводя эту процедуру в обратном порядке, получим доказательство утверждения.

Лемма 5. Нескелетная диаграмма порядка N , полученная из скелетной порядка M , содержит логарифмическую расходимость порядка не больше, чем $N - M + 1$, которая обрезается пропусканием импульса p через любую пару вершин.

Выпишем для примера вклад диаграммы v (рис. 5), полученной из скелетной диаграммы a :

$$R_{(B)}^0(p_i = 0) \sim \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 G_{k_1} G_{k_2} G_{k_3} G_{k_1+k_2} G_{k_1+k_3} G_{k_1+k_2+k_3} \Gamma_1(0, -k_1, -k_2, k_1+k_2) \times \\ \times \Gamma_2(0, k_1, k_3, -k_1 - k_3) \Gamma_3(0, k_1 + k_3, k_2, -k_1 - k_2 - k_3) \Gamma_4(0, -k_1 - k_2, -k_3, k_1 + k_2 + k_3).$$

Расходимость возникает от области $k_i \sim k$, когда аргументы всех вершин $\sim k$:

$$R_{(B)}^0(p_i = 0) \sim \int \frac{dk}{k} \Gamma_1(k) \Gamma_2(k) \Gamma_3(k) \Gamma_4(k).$$

Блок Γ_i , содержащий N_i простых вершин, имеет максимальную расходимость $\sim (\ln \Lambda/k)^{N_i-1}$, если он входит в паркетную последовательность рис. 4а; с учетом $\sum_i N_i = N$ диаграмма с M блоками расходится не сильнее чем $(\ln \Lambda/k)^{N-M+1}$, причем расходимость устраняется при пропускании импульса p через любую пару вершин. Других расходимостей нет: если малыми ($\sim k$) являются не все импульсы, то диаграмма сходится при $k \rightarrow 0$ степенным образом, подавляя логарифмические расходимости блоков.

Таким образом, все диаграммы конечны при $k = q = 0$, $p \neq 0$ и $R^0(p, k, q)$ зависит лишь от максимального импульса p .

Литература

1. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
2. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, *Phys. Rev. B* **15**, 4476 (1977).
3. M. V. Sadovskii, *Sov. Sci. Rev. A. Phys.* **7**, 1 (1986).
4. D. J. Thouless, *J. Phys. C* **9**, L603 (1976).
5. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **102**, 1951 (1992).
6. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **106**, 560 (1994).
7. И. М. Лифшиц, *УФН* **83**, 617 (1964).
8. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
9. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
10. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.
11. С. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **66**, 647 (1974).
12. J. L. Cardy, *J. Phys. C* **11**, L321 (1978).
13. E. Brezin and G. Parisi, *J. Phys. C* **13**, L307 (1980).
14. Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ* **72**, 411 (1977).
15. E. Brezin and G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **19**, 269 (1978).
16. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D* **15**, 1544 (1977).
17. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
18. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982), стр. 317, 333.
19. И. Т. Дятлов, В. В. Судаков, К. А. Тер-Мартirosян, *ЖЭТФ* **32**, 767 (1957).
20. В. В. Судаков, *ДАН СССР* **111**, 338 (1956).
21. А. М. Поляков, *ЖЭТФ* **57**, 271 (1969).
22. V. G. Makhankov, *Phys. Lett. A* **61**, 431 (1977).
23. Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, т. 1, Высшая школа, Москва (1973).
24. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1967).
25. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).