

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО СОСТАВА

*А. А. Пантелеев*

*Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
142092, Троицк Московской обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 июля 1996 г.

Развита теория для описания спектров поглощения и испускания атомного перехода в поле интенсивной монохроматической волны произвольного поляризационного состава, включающая также квантовое описание процессов направленного вперед четырехволнового взаимодействия. Получены выражения для описания спектров поглощения и испускания на переходах смежных рабочему переходу. Развитое описание включает возмущение атомной подсистемы постоянным магнитным полем. Представлено исследование спектральных особенностей резонансной флуоресценции, ее поляризационного состава, углового распределения. Для перехода  $J = 1 \rightarrow J = 0$  исследуются нелинейный эффект Фарадея и свойства резонансной флуоресценции.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование свойств взаимодействия интенсивного излучения с резонансными средами относится к числу фундаментальных проблем современной оптики. Хорошо известно, что в поле сильной электромагнитной волны существенно изменяются спектры поглощения и испускания атомов. Основные теоретические и экспериментальные исследования этих спектров относятся к изучению спектров невырожденной двухуровневой системы [1–7], что подразумевает ее возбуждение волной фиксированной поляризации. При возбуждении атомов интенсивным линейно поляризованным излучением в работах [8, 9] исследовалась резонансная флуоресценция перехода  $J = 0 \rightarrow J = 1$  с учетом столкновительного перемешивания магнитных подуровней, а в [10, 11] — спектры поглощения и испускания  $D_2$ -линии натрия. В [12] была обобщена теория резонансной флуоресценции Моллоу [13] для вырожденного двухуровневого атома в поле монохроматической линейно поляризованной волны.

В работах [14–16] был развит подход для расчета спектров поглощения и испускания замагниченного перехода  $J = 0 \rightarrow J = 1$  в поле электромагнитной волны произвольной интенсивности для фарадеевской ( $\mathbf{k}_L \parallel \mathbf{H}$ ) и фойгтовской ( $\mathbf{k}_L \perp \mathbf{H}$ ) геометрий, где  $\mathbf{k}_L$  — волновой вектор волны накачки,  $\mathbf{H}$  — вектор магнитного поля. Было показано, что в спектре рассеяния, и в частности сигнала Ханле, характеризующего деполяризацию рассеянного излучения, может содержаться до семи пиков.

В монографии [17] с помощью метода пробного поля исследовались поляризационные, спектральные и угловые (с учетом теплового движения атомов) характеристики коэффициентов поглощения переходов с произвольными  $J$  в поле интенсивной электромагнитной волны определенной поляризации (линейной или круговой).

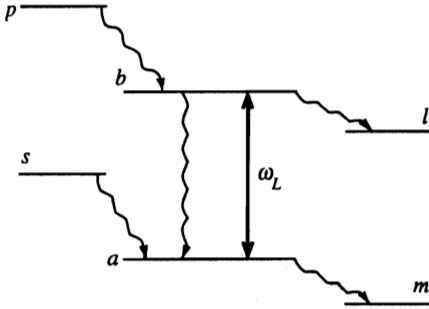


Рис. 1. Схема уровней

Распространение интенсивной электромагнитной волны в резонансной среде сопровождается возникновением направленного вперед невырожденного четырехволнового смешения. С математической точки зрения процессы направленного вперед невырожденного четырехволнового смешения определяются тем же (вторым) порядком теории возмущений по константе связи излучения с атомами, что и поглощение или усиление фотонов флуоресценции [18, 19]. Следует отметить, что в работах [18, 19] было указано на квантовую природу возникновения этих процессов: для состояний электромагнитного поля, им отвечающих, существуют спонтанные источники, аналогичные резонансной флуоресценции, определяющей возникновение рассеянного поля излучения. Квантовое описание этих процессов оказалось принципиальным для построения теории генерации сжатых состояний с помощью резонансного четырехволнового смешения [20, 21] и интерпретации результатов первого экспериментального наблюдения сжатых состояний света [22].

В работах [18, 19, 23] было доказано, что коэффициенты поглощения излучения и четырехволновой связи, описывающие вынужденные процессы, для квантованного излучения и пробных классических полей совпадают. Для классических полей они могут быть рассчитаны по теории возмущений из стандартного формализма атомной матрицы плотности [17]. Для расчета спектров резонансной флуоресценции использовался ряд подходов. Среди них выделим аппарат атомно-фотонной волновой функции [1, 2], использование квантовой теоремы регрессии [24, 13], диаграммную технику Келдыша для неравновесных функций Грина [23, 25, 26], метод Хакена [21, 27], аппарат атомно-фотонной матрицы плотности Скалли–Лэмба [28, 29]. Последний используется в данной работе.

В этой статье обобщаются результаты работ [14–16] на случай взаимодействия произвольно поляризованной монохроматической электромагнитной волны с резонансным атомным переходом с произвольным значением углового момента. Исследуются также спектры поглощения и испускания на переходах смежных с рабочим переходом (см. схему уровней на рис. 1). Работа построена следующим образом. В разд. 2 развит математический аппарат, дана модификация формализма в рамках представления неприводимых поляризационных операторов. В разд. 3 исследуются особенности поляризационного и углового распределения рассеянного излучения. Разд. 4 посвящен исследованию спектров резонансной флуоресценции. В разд. 5 развитый формализм используется для описания спектров флуоресценции перехода  $J = 1 \rightarrow J = 0$ . Исследуются также особенности нелинейного эффекта Фарадея для этого перехода. В Заключение представлены основные выводы и обсуждаются ограничения и границы применимости развитого формализма.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 2.1. Модель

Рассмотрим взаимодействие монохроматической волны, резонансной переходу  $a \rightarrow b$  (см. рис. 1), с ансамблем из атомов. Полагая, что электромагнитная волна имеет произвольную поляризацию, представим ее в виде суммы:

$$\mathbf{E} = \sum_{\sigma=0,\pm 1} \mathbf{e}^\sigma E_\sigma, \quad (1)$$

$$E_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x \pm iE_y), \quad E_0 = E_z,$$

$\mathbf{e}^\sigma$  — единичный вектор поляризации. При наличии постоянного магнитного поля, возмущающего атомную систему, полагаем, что оно направлено вдоль оси  $z$ . Используя дипольное и резонансное приближения, гамильтониан (в рад/с) этой системы представим в виде суммы:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_f + \hat{H}_{mag} + \hat{V}_L + \hat{V}_q, \quad (2)$$

где

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^N \sum_{\xi} \frac{\varepsilon_\xi}{\hbar} \hat{R}_{\xi\xi}^{(j)} \quad (3)$$

описывает невозмущенную атомную подсистему,  $\xi = \alpha JM = nM$  — набор квантовых чисел атомного состояния с энергией  $\varepsilon_\xi$ , полным угловым моментом  $J$  и его проекцией  $M$  на ось квантования ( $z$ ),  $\alpha$  — другие квантовые числа,  $\hat{R}_{\xi\xi} = |\xi\rangle\langle\xi|$  — проекционный атомный оператор. В (2)  $\hat{H}_f$  — гамильтониан квантового поля излучения:

$$\hat{H}_f = \sum_{k,\sigma} \omega_k \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma}, \quad (4)$$

где  $\omega_k$  — частота фотонов с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и  $\sigma$ -поляризацией, а  $\hat{a}_{k\sigma}^+$  и  $\hat{a}_{k\sigma}$  — их операторы рождения и уничтожения. Возмущение атомной подсистемы магнитным полем описывается выражением

$$\hat{H}_{mag} = \sum_{j=1}^N \sum_{\xi} g_\xi M \Omega \hat{R}_{\xi\xi}^{(j)}, \quad (5)$$

$g_\xi$  — фактор Ланде,  $\Omega = -\mu_B H/\hbar$  — ларморова частота. Взаимодействие волны накачки с переходом  $a \rightarrow b$  описывается выражением

$$\hat{V}_L = \sum_{j=1}^N \sum_{MM'} \left[ V_{ba}(MM') \hat{R}_{MM'}^{+(j)} + V_{ba}^*(M'M) \hat{R}_{M'M}^{-(j)} \right], \quad (6)$$

$$V_{ba}(M'M) = \sum_{\sigma} -d_{ba}(M'M) E_\sigma U_L(r) \frac{\exp(i\omega_L t)}{2\hbar}, \quad (7)$$

где  $d_{ba}(M'M) = d_{bM',aM}$  — матричный элемент дипольного момента,  $U_L(r)$  — пространственный модовый фактор. Используя теорему Вигнера–Экарта [30], выражение (7) представим в виде

$$V_{ba}(M'M) = \sum_{\sigma} V_{ba}(\sigma)(-1)^{J_a-M} C_{J_b M' J_a - M}^{1-\sigma} \exp(i\omega_L t), \quad (8)$$

$$V_{ba}(\sigma) = -\frac{(-1)^{\sigma} \|d_{ba}\| E_{\sigma} U_L(r)}{2\sqrt{3}\hbar},$$

где  $C_{J_b M' J_a - M}^{1-\sigma}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [30],  $\|d_{ba}\|$  — неприводимое значение матричного элемента дипольного момента. При этом выполняются условия

$$V_{ba}(MM') = V_{ba}^*(M'M), \quad V_{ba}(\sigma) = (-1)^{J_a - J_b - \sigma} V_{ba}^*(-\sigma). \quad (9)$$

Оператор  $\hat{R}_{\xi\xi'}^+ = |\xi\rangle\langle\xi'|$  при  $\xi \neq \xi'$  и  $\varepsilon_{\xi} < \varepsilon_{\xi'}$ , а оператор  $\hat{R}_{\xi\xi'}^- = |\xi\rangle\langle\xi'|$  при условии  $\varepsilon_{\xi} > \varepsilon_{\xi'}$ . Введение верхних индексов «+» и «-» связано с использованием резонансного приближения. Специально для перехода  $a \rightarrow b$  выделены операторы  $\hat{R}_{MM'}^+ = |aM\rangle\langle bM'|$ ,  $\hat{R}_{MM'}^- = |bM'\rangle\langle aM|$ .

Для проекционных операторов выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\left[ \hat{R}_{\xi\xi'}^{(j)}, \hat{R}_{\zeta\zeta'}^{(j')} \right] = \delta_{jj'} \left( \hat{R}_{\xi\xi'}^{(j)} \delta_{\zeta\xi'} - \hat{R}_{\zeta\zeta'}^{(j')} \delta_{\xi\xi'} \right). \quad (10)$$

где  $\delta_{jj'}$  — символ Кронекера.

Взаимодействие атомов с квантованным полем излучения описывается выражением

$$\hat{V}_q = \sum_{j=1}^N \sum_{k\sigma} \sum_{\xi\xi'} \left( g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma} \hat{R}_{\xi\xi'}^{+(j)} + g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{R}_{\xi\xi'}^{-(j)} \right), \quad (11)$$

где  $g_{\xi\xi'}^{k\sigma} = id_{\xi\xi'} U_{k\sigma}(r) \sqrt{2\pi\omega_k/\hbar W}$ ,  $W$  — объем квантования. Полагая  $d_{\xi\xi'} = d_{nn'}(MM')$ , используем теорему Вигнера–Экарта:

$$g_{\xi\xi'}^{k\sigma} = g_{nn'}^{k\sigma}(MM') = (-1)^{\sigma} C_{JM J' - M}^{1-\sigma} g_{nn'} / \sqrt{3}, \quad (12a)$$

$$g_{nn'} = i \|d_{nn'}\| U_k(r) \sqrt{2\pi\omega_k/\hbar W}. \quad (12b)$$

## 2.2. Основной формализм в $M$ -представлении

Для описания рассматриваемой системы используется формализм атомно-фотонной матрицы плотности Скалли–Лэмба [28]. Уравнение движения для оператора атомно-фотонной матрицы плотности  $\rho_{a-ph}$  имеет вид

$$i\dot{\rho}_{a-ph} = \left[ \hat{H}, \rho_{a-ph} \right] + i\hat{\Gamma}(\rho_{a-ph}), \quad (13)$$

где оператор  $\hat{\Gamma}_{a-ph}$  описывает релаксационные процессы. Атомная матрица плотности  $\rho$  определяется из оператора  $\rho_{a-ph}$  суммированием по фотонным переменным:  $\rho =$

= Sp( $\rho_{a-ph}$ ) $_{ph}$ , а оператор фотонного поля  $P$  — сверткой по атомным:  $P = \text{Sp}(\rho_{a-ph})_a$ . В нулевом приближении пренебрегаем влиянием квантового поля излучения на атомную подсистему. При этом уравнение движения для атомной матрицы плотности  $\rho$  имеет вид

$$i\dot{\rho} = \left[ \hat{H}_0 + \hat{H}_{mag} + \hat{V}_L, \rho \right] + i\hat{r} + i\hat{S} + i\hat{Q}, \tag{14}$$

где оператор  $\hat{r}$  описывает процессы радиационной релаксации,  $\hat{S}$  — влияние столкновений,  $\hat{Q}$  — накачку на уровни из других состояний. Компоненты атомной матрицы плотности определяются соотношением:  $\rho_{\xi\xi'} = \langle \rho \hat{R}_{\xi\xi'} \rangle$ , для которых имеем следующее уравнение:

$$i\dot{\rho}_{\xi\xi'} = \Delta_{\xi\xi'} \rho_{\xi\xi'} + \sum_{\xi_1=a,b} (V_{\xi\xi_1} \rho_{\xi_1\xi'} - \rho_{\xi\xi_1} V_{\xi_1\xi'}) + i r_{\xi\xi'} + i S_{\xi\xi'} + i Q_{\xi} \delta_{\xi\xi'}, \tag{15}$$

где  $\Delta_{\xi\xi'} = (\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})/\hbar + \Omega(g_n M - g_{n'} M')$ .

В операторе  $\hat{r}$ , описывающем радиационные процессы, можно выделить два слагаемых:

$$\hat{r} = -\hat{r}^{(1)} + \hat{r}^{(2)}, \tag{16}$$

где  $\hat{r}^{(1)}$  отвечает процессам радиационного ухода, а  $\hat{r}^{(2)}$  — прихода:

$$r_{\xi\xi'}^{(1)} = (\gamma_n + \gamma_{n'}) \rho_{\xi\xi'} / 2, \quad \gamma_n = \sum_{n'' < n} A_{nn''}, \tag{17}$$

$$r_{\xi\xi'}^{(2)} = \delta_{nn'} \sum_{n_1, M_1, M_1'} A(nMnM' | n_1 M_1 n_1 M_1') \rho_{n_1, n_1} (M_1 M_1'), \tag{18}$$

$$A(nMnM' | n_1 M_1 n_1 M_1') = A_{n_1, n} \sum C_{JM_1\sigma}^{J_1 M_1'} C_{JM_1'\sigma}^{J_1 M_1'}, \tag{19}$$

коэффициент  $A_{nn''}$  определяет скорость спонтанной релаксации на переходе  $n \rightarrow n''$ . Из выражений (17) и (18) видно, что затухание матрицы плотности имеет диагональную структуру, а член прихода  $r^{(2)}$  описывает не только «перенос» заселенности подуровней, но и когерентность между магнитными подуровнями. Из свойств коэффициентов Клебша–Гордана [30] для (19) вытекает условие

$$M - M' = M_1 - M_1'. \tag{20}$$

В представлении поляризационных операторов ( $\kappa q$ -представлении), которое будет рассмотрено ниже, член прихода оказывается диагональным относительно  $n$  и индексов вырождения  $M$ . Учет влияния столкновений, которое описывается оператором  $\hat{S}$ , является сложной задачей квантовой кинетики, сильно зависящей от условий газовой среды. В данной работе влияние столкновений учитывается чисто феноменологически. Укажем, что обычно в операторе  $\hat{S}$  так же, как и в  $\hat{r}$ , можно выделить члены ухода  $\hat{S}^{(1)}$  и прихода  $\hat{S}^{(2)}$ . Для часто используемой модели изотропных столкновений член ухода  $\hat{S}^{(1)}$  в  $M$ -представлении так же, как и  $\hat{r}^{(1)}$ , диагонален, а член прихода  $\hat{S}^{(2)}$  имеет структуру аналогичную при условии (20).

В силу того что волна накачки взаимодействует лишь с переходом  $a \rightarrow b$ , населенности остальных уровней определяются накачкой  $Q_{\xi\xi} = Q_{nn}/\sqrt{2J_n + 1} = \tilde{Q}_n$ , которую мы полагаем изотропной для всех подуровней:

$$\rho_{nn}(MM') = \delta_{MM'} Q_{nn}/\Gamma_n \sqrt{2J_n + 1}, \quad n \neq a, b, \quad (21)$$

где  $\Gamma_n = \gamma_n + v_n^{(c)}$  — затухание населенности  $n$ -состояния,  $v_n^{(c)}$  — скорость затухания, обусловленная столкновениями. Динамика перехода  $a \rightarrow b$  в приближении вращающейся волны описывается стандартными уравнениями:

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{aa}(MM') &= [g_a(M-M')\Omega - i\Gamma_a(MM')] \rho_{aa}(MM') + \\ &+ \sum_{M_1, M'_1, n=a,b} i\Gamma_a^n(M_1 M'_1) \rho_{nn}(M_1 M'_1) + \\ &+ \sum_{M_1} [\tilde{V}_{ab}(MM_1) \tilde{\rho}_{ba}(M_1 M') - \tilde{\rho}_{ab}(MM_1) \tilde{V}_{ba}(M_1 M')] + i\tilde{Q}_a \delta_{MM'}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{bb}(MM') &= [g_b(M-M')\Omega - i\Gamma_b(MM')] \rho_{bb}(MM') + \\ &+ i \sum_{M, M'} v_b^{(c)}(MM'|bM_1 M'_1) \rho_{bb}(M_1 M'_1) + \\ &+ \sum_{M_1} [\tilde{V}_{ba}(MM_1) \tilde{\rho}_{ab}(M_1 M') - \tilde{\rho}_{ba}(MM_1) \tilde{V}_{ab}(M_1 M')] + i\tilde{Q}_b \delta_{MM'}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} i\dot{\tilde{\rho}}_{ba}(MM') &= [\Delta_L + \Omega(g_b M - g_a M') - i\Gamma_{ba}(MM')] \tilde{\rho}_{ba}(MM') + \\ &+ \sum_{M_1} [\tilde{V}_{ba}(MM_1) \rho_{aa}(M_1 M') - \rho_{bb}(MM_1) \tilde{V}_{ba}(M_1 M')], \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\tilde{\rho}_{ab}(M'M) = \tilde{\rho}_{ba}^*(MM'), \quad (24b)$$

где

$$\tilde{V}_{ba}(MM') = V_{ba}(MM') \exp(-i\omega_L t), \quad \tilde{\rho}_{ba}(MM') = \rho_{ba}(MM') \exp(-i\omega_L t),$$

$$\Delta_L = \omega_{ba} - \omega_L,$$

$$\Gamma_{ba}(MM') = \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2} + v_{ba}^{(c)}(MM'), \quad \Gamma_n(MM') = \gamma_n + \sum_{M_1, M'_1} v_n^{(c)}(nM_1 M'_1 | MM'),$$

$$\Gamma_a^n(M_1 M'_1) = A(aM aM' | nM_1 nM'_1) + v_a^{(c)}(MM' | nM_1 M'_1).$$

Константа  $v_{ba}^{(c)}$  в общем случае является комплексной, т. е. столкновения приводят не только к деполяризации когерентности между состояниями, но и к сдвигу уровней. Величина  $v_n^{(c)}(MM' | n_1 M_1 M'_1)$  описывает приходы, обусловленные столкновительным перемешиванием населенности магнитных подуровней, или когерентность между ними для состояния  $n$  при  $n_1 = n$ , а при  $n_1 \neq n$  — приходы с верхних состояний. В выражениях (22) и (23) мы полагаем, что приходы с уровней  $p$  и  $s$  (см. рис. 1) входят в накачку

$Q_b$  и  $Q_a$ . Для случая, если уровень  $a$  является основным и накачка отсутствует ( $Q = 0$ ), уравнения (22) и (23) должны быть дополнены условием

$$\sum_{M;n=a,b} \rho_{nn}(MM) = 1.$$

Систему уравнений (22)–(24) представим в матричном виде:

$$i\rho = \Lambda\rho + iQ, \tag{25}$$

где  $\rho$  — столбец компонент матрицы плотности,

$$\rho^T = (\rho_{aa}(-J_a, -J_a), \rho_{aa}(-J_a, -J_a + 1), \dots, \rho_{bb}(MM'), \dots, \bar{\rho}_{ba}(MM'), \dots, \bar{\rho}_{ab}(MM'), \dots),$$

$$Q^T = (\bar{Q}_a, 0, \dots).$$

После свертки по атомным переменным в уравнении (13) имеем

$$i\dot{P} = [H_{ph}, P] + \left( \sum_{k\sigma, \xi\xi', j} g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \hat{R}_{\xi\xi'}^{+(j)} \hat{\Phi}_{k\sigma}^- + g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \hat{R}_{\xi\xi'}^{-(j)} \hat{\Phi}_{k\sigma}^+ - \text{H.c.} \right), \tag{26}$$

где использованы вспомогательные операторы  $\hat{\Phi}_{k\sigma}^+ = \hat{a}_{k\sigma}^+ \rho_{a-ph}$ ,  $\hat{\Phi}_{k\sigma}^- = \hat{a}_{k\sigma} \rho_{a-ph}$ . Для медленной составляющей оператора  $P$  уравнение (2) сводится к виду

$$\dot{P} = -i \left\{ \sum_{k\sigma, \xi\xi', j} \left[ g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \Phi_{\xi\xi'}^{-(j)} + g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \Phi_{\xi\xi'}^{+(j)} - \left( g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \Phi_{\xi\xi'}^{-(j)} \right)^+ - \left( g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \Phi_{\xi\xi'}^{+(j)} \right)^+ \right] \right\}. \tag{27}$$

Оператор  $P$  позволяет определить числа фотонов в данной моде:  $n_{k\sigma} = \langle P \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma} \rangle$ . Линейное уравнение для  $n_{k\sigma}$  следует из уравнения для  $P$  во втором порядке теории возмущений по константе связи  $g$ . Для этого будем искать решение для операторов  $\hat{\Phi}$  в первом порядке  $g$ . Используя (13) для операторов  $\hat{\Phi}_{k\sigma}^+$  и  $\hat{\Phi}_{k\sigma}^-$ , получим уравнения

$$i\dot{\hat{\Phi}}_{k\sigma}^+ = \left[ \hat{H}_0 + \hat{H}_{mag} + \hat{V}_L, \hat{\Phi}_{k\sigma}^+ \right] - \omega_k \hat{\Phi}_{k\sigma}^+ + i\hat{\Gamma} [\hat{\Phi}_{k\sigma}^+] + \sum_{\sigma'} \left( \hat{T}_{\sigma'}^+ \rho^{(0)} \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P - \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'} \rho^{(0)} \hat{T}_{\sigma'}^+ + \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{T}_{\sigma'}^- \rho^{(0)} - \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'} \rho^{(0)} \hat{T}_{\sigma'}^- \right), \tag{28}$$

$$i\dot{\hat{\Phi}}_{k\sigma}^- = \left[ \hat{H}_0 + \hat{H}_{mag} + \hat{V}_L, \hat{\Phi}_{k\sigma}^- \right] + \omega_k \hat{\Phi}_{k\sigma}^- + i\hat{\Gamma} [\hat{\Phi}_{k\sigma}^-] + \sum_{\sigma'} \left( \hat{a}_{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma'} P \hat{T}_{\sigma'}^- \rho^{(0)} - \hat{a}_{k\sigma} P \hat{a}_{k\sigma'} \rho^{(0)} \hat{T}_{\sigma'}^- + \hat{a}_{k'\sigma'} \hat{a}_{k\sigma} P \hat{T}_{\sigma'}^+ \rho^{(0)} - \hat{a}_{k\sigma} P \hat{a}_{k'\sigma'} \rho^{(0)} \hat{T}_{\sigma'}^+ \right), \tag{29}$$

где

$$\hat{T}_{\sigma}^{\pm} = \sum_{\xi\xi'} g_{\xi\xi'}^{k\sigma} \hat{R}_{\xi\xi'}^{\mp},$$

$\rho^{(0)}$  — стационарное решение системы (22)–(24). Последние два слагаемых в уравнениях (28) и (29) описывают взаимодействие волны накачки с двумя симметрично отстроенными от нее по частоте квантованными модами:

$$\omega_k + \omega_{k'} = 2\omega_L, \quad (30a)$$

при условии

$$\mathbf{k}_\sigma + \mathbf{k}'_{\sigma'} \approx \mathbf{k}_{L\sigma} + \mathbf{k}_{L\sigma'}. \quad (30b)$$

### 2.2.1. Рассеяние на переходе $a \rightarrow b$

Для описания процессов рассеяния на переходе  $a \rightarrow b$  рассмотрим проекции операторов  $\hat{\Phi}^+$  и  $\hat{\Phi}^-$  на состояния  $a$  и  $b$ . Используя приближения вращающейся волны, выделим быстроосциллирующие составляющие:

$$\begin{aligned} \Phi_{aa}^\pm(MM') &= \tilde{\Phi}_{aa}^\pm(MM') \exp(\pm i\omega_L t), & \Phi_{bb}^\pm(MM') &= \tilde{\Phi}_{bb}^\pm(MM') \exp(\pm i\omega_L t), \\ \Phi_{ab}^+(MM') &= \tilde{\Phi}_{ab}^+(MM') \exp(2i\omega_L t), & \Phi_{ba}^-(MM') &= \tilde{\Phi}_{ba}^-(MM') \exp(-2i\omega_L t), \\ \Phi_{ba}^+(MM') &\propto 1, & \Phi_{ab}^-(MM') &\propto 1. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение столбцы  $\Phi_{k\sigma}^+$  и  $\Phi_{k\sigma}^-$  для медленных составляющих атомных компонент соответствующих операторов. Пусть порядок расположения компонент в этих столбцах совпадает с порядком компонент атомной матрицы плотности в столбце  $\rho$  из уравнения (25), тогда уравнения для  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  можно представить в виде

$$i\dot{\Phi}_{k\sigma}^\pm = (\Lambda \mp \nu_k \mathbf{I}) \Phi_{k\sigma}^\pm + \Sigma_{k\sigma}^\pm, \quad (31)$$

где  $\nu_k = \omega_k - \omega_L$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, а  $\Lambda$  — матрица из уравнения (25). Учитывая структуру уравнений (28) и (29), столбец  $\Sigma$  представим в виде суммы:

$$\Sigma = {}^{(1)}\Sigma + {}^{(4)}\Sigma. \quad (32)$$

Здесь  ${}^{(1)}\Sigma$  отвечает изотропным процессам поглощения и излучения фотонов,  ${}^{(4)}\Sigma$  — четырехволновым процессам при условии (30). Явные выражения для компонент столбцов  $(\Sigma_{k\sigma}^+)_{jM,mM'} = \Sigma_{jm}^+(k\sigma|MM')$  (где  $j, m = a, b$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Sigma_{jm}^+(k\sigma|MM') &= \sum_{M''\sigma'} \left[ \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P g_{ba}^{k\sigma'}(MM'') \rho_{am}^{(0)}(M''M) \delta_{jb} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'} g_{ba}^{k\sigma'}(M''M') \rho_{jb}^{(0)}(MM'') \delta_{ma} \right], \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\Sigma_{jm}^+(k\sigma|MM') &= \sum_{k'\sigma'M''} \left[ \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \hat{a}_{k\sigma}^+ P g_{ab}^{k'\sigma'}(MM'') \rho_{bm}^{(0)}(M''M') \delta_{ja} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k'\sigma'} g_{ab}^{k'\sigma'}(M''M') \rho_{ja}^{(0)}(MM'') \delta_{mb} \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Находим стационарное решение для компонент операторов  $\Phi_{k\sigma}^\pm$ :

$$\Phi_{k\sigma}^+ = -(\Lambda \mp \nu_k \mathbf{I})^{-1} \Sigma_{k\sigma}^+. \quad (35)$$

Подставляя значение  $(\Phi_{k\sigma})_{bM,aM'} = \Phi_{ba}(k\sigma|MM')$  в (27), уравнение для оператора фотонного поля  $P$  преобразуем к виду



$$\begin{aligned} \dot{P} = & \sum_{\sigma\sigma',kk'} \left[ A_{\sigma\sigma'}^{(k)} (\hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'} - P \hat{a}_{k\sigma'} \hat{a}_{k\sigma}^+) - B_{\sigma\sigma'}^{(k)} (\hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P - \hat{a}_{k\sigma'} P \hat{a}_{k\sigma}^+) + \right. \\ & + C_{\sigma\sigma'}^{(k)} (\hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k'\sigma'}^+ P - \hat{a}_{k'\sigma'}^+ P \hat{a}_{k\sigma}^+) - \\ & \left. - D_{\sigma\sigma'}^{(k)} (\hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k'\sigma'}^+ - P \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \hat{a}_{k\sigma}^+) + (k \leftrightarrow k') + \text{H.c.} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где коэффициенты  $A, B, C, D$  определяются выражением

$$\begin{aligned} \sum_{MM'j} ig_{ab}^{k\sigma} (M' M) \Phi_{ba}^{+(j)} (k\sigma k'\sigma' | MM') = & \left( A_{\sigma\sigma'}^{(k)} \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'} - B_{\sigma\sigma'}^{(k)} \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P + \right. \\ & \left. + C_{\sigma\sigma'}^{(k)} \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k'\sigma'}^+ P - D_{\sigma\sigma'}^{(k)} \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $\Phi_{ba}^+(k\sigma k'\sigma' | MM')$  находится из решения уравнения (35) без суммирования по индексу  $\sigma'$  в (33), (34). Используя уравнение (36) для фотонов, получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a_{k\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle = & - \sum_{\sigma''} \left( \alpha_{\sigma\sigma''}^{(k)} \langle a_{k\sigma'}^+ a_{k\sigma''} \rangle + \left( \alpha_{\sigma'\sigma''}^{(k)} \right)^* \langle a_{k\sigma''}^+ a_{k\sigma} \rangle \right) - \\ & - \sum_{k,k',\sigma''} \left( \beta_{\sigma\sigma''}^{(k)} \langle a_{k\sigma'}^+ a_{k'\sigma''}^+ \rangle + \left( \beta_{\sigma'\sigma''}^{(k)} \right)^* \langle a_{k'\sigma''}^+ a_{k\sigma} \rangle \right) + \left( A_{\sigma\sigma'}^{(k)} \right)^* + A_{\sigma'\sigma}^{(k)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle = & - \sum_{\sigma''} \left( \alpha_{\sigma\sigma''}^{(k)} \langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma''} \rangle + \alpha_{\sigma'\sigma''}^{(k)} \langle a_{k'\sigma''}^+ a_{k\sigma} \rangle \right) - \\ & - \sum_{\sigma''} \left( \beta_{\sigma\sigma''}^{(k)} \langle a_{k\sigma''}^+ a_{k'\sigma'}^+ \rangle + \beta_{\sigma'\sigma''}^{(k')} \langle a_{k'\sigma''}^+ a_{k\sigma} \rangle \right) + C_{\sigma'\sigma}^{(k)} + C_{\sigma\sigma'}^{(k')}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma}^+ \rangle = \langle a_{k'\sigma'} a_{k\sigma} \rangle^+, \quad (40)$$

где  $\langle a_{k\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle = \langle P \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma} \rangle$ ,  $\langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle = \langle P \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \hat{a}_{k\sigma} \rangle$ ,  $\langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma}^+ \rangle = \langle P \hat{a}_{k'\sigma'}^+ \hat{a}_{k\sigma}^+ \rangle$ ,  $\alpha_{\sigma\sigma'}^{(k)} = A_{\sigma\sigma'}^{(k)} - B_{\sigma\sigma'}^{(k)}$ ,  $\beta_{\sigma\sigma'}^{(k)} = C_{\sigma\sigma'}^{(k)} - D_{\sigma\sigma'}^{(k)}$ .

Корреляторы  $\langle a_{k\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle$  соответствуют хорошо известной поляризационной матрице Фано. Корреляторы  $\langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma} \rangle$ ,  $\langle a_{k'\sigma'}^+ a_{k\sigma}^+ \rangle$  описывают процессы направленного вперед четырехволнового смешения при условии (30), коэффициенты  $\alpha_{\sigma\sigma'}$  — поглощение и дисперсию излучения, а  $\beta_{\sigma\sigma'}$  — четырехволновую связь мод. Подробная их интерпретация дана в работе [16]. Свободные члены в (38) и (39) описывают спонтанные источники для соответствующих корреляторов. При  $\sigma = \sigma'$  в (38) величина  $\mathcal{A}_{\sigma\sigma}$  ( $\mathcal{A}_{\sigma\sigma} = A_{\sigma\sigma} + A_{\sigma\sigma}^*$ ) характеризует спектр резонансной флуоресценции фотонов  $\sigma$ -поляризации.

Напряженность электромагнитного поля квантовых мод можно определить следующим образом:  $E_{k\sigma} = \langle \hat{a}_{k\sigma} P \rangle E_w$ , где  $E_w$  — напряженность поля единичного фотона. Используя уравнение (36), получим систему уравнений

$$\frac{d}{dt} E_{k\sigma} = - \sum_{\sigma'} \alpha_{\sigma\sigma'}^{(k)} E_{k\sigma'} - \sum_{\sigma'k'} \beta_{\sigma\sigma'}^{(k)} E_{k'\sigma'}^*. \quad (41)$$

Эта система совпадает с уравнениями для пробных классических полей, взаимодействующих с переходом  $a \rightarrow b$  в присутствии волны накачки  $E_L$ . При этом коэффициенты

$\alpha$  и  $\beta$  совпадают с поляризуемостями, рассчитанными из стандартных уравнений для матрицы плотности в первом порядке теории возмущений по  $E_\sigma$  и произвольном по  $E_L$ . В общем случае система (38)–(40) содержит 36 уравнений. Если в ней отбросить члены, отвечающие направленному вперед четырехволновому взаимодействию, которые существенны лишь для описания рассеяния вперед, система сократится до девяти уравнений. При этом системы уравнений (41) и (38)–(40) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\epsilon = -\mathbf{K}\epsilon, \quad (42)$$

где

$$\epsilon = \begin{pmatrix} E_+ \\ E_0 \\ E_- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_{++} & \alpha_{+0} & \alpha_{+-} \\ \alpha_{0+} & \alpha_{00} & \alpha_{0-} \\ \alpha_{-+} & \alpha_{-0} & \alpha_{--} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}^+ + \mathbf{A}, \quad (43)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{++} & \mathcal{A}_{+0} & \mathcal{A}_{+-} \\ \mathcal{A}_{0+} & \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{0-} \\ \mathcal{A}_{-+} & \mathcal{A}_{-0} & \mathcal{A}_{--} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \langle a_+^+ a_+ \rangle & \langle a_+^+ a_0 \rangle & \langle a_+^+ a_- \rangle \\ \langle a_0^+ a_+ \rangle & \langle a_0^+ a_0 \rangle & \langle a_0^+ a_- \rangle \\ \langle a_-^+ a_+ \rangle & \langle a_-^+ a_0 \rangle & \langle a_-^+ a_- \rangle \end{pmatrix}.$$

Для компактности записи в индексах  $\pm 1$  единицу опускаем. Для величин  $A_{\sigma\sigma'}$  и  $\alpha_{\sigma\sigma'}$  верхний индекс  $k$  опускаем, так как не учитываются процессы направленного вперед четырехволнового смещения, и уравнения движения включают только моду с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

### 2.2.2. Рассеяние на смежных переходах

Для описания процессов поглощения и испускания на переходах  $p \rightarrow b$  и  $s \rightarrow a$ , применим проекционные операторы, отвечающие этим переходам, к уравнению (28), тогда

$$i\Phi_{pb}^+(k\sigma|MM') = [\Delta_{pb} + (g_p M - g_b M')\Omega - i\Gamma_{pb}(MM')] \Phi_{pb}^+(k\sigma|MM') +$$

$$+ \sum_M \tilde{\Phi}_{pa}^+(k\sigma|MM') \tilde{V}_{ab}(M_1 M') + \sum_{\sigma' M_1} g_{pb}(k\sigma'|M M_1) \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P -$$

$$- g_{pb}(k\sigma|MM') \rho_{pp}^{(0)}(MM) \hat{a}_{\sigma k}^+ P \hat{a}_{\sigma k}, \quad (44)$$

$$i\Phi_{pa}^+(k\sigma|MM_1) = [\Delta_{pb} + \Delta_L + (g_p M - g_a M_1)\Omega - i\Gamma_{pa}(MM_1)] \Phi_{pa}^+(k\sigma|MM_1) +$$

$$+ \sum_{M_2} \Phi_{pb}^+(k\sigma|MM_2) V_{ba}(M_2 M_1) +$$

$$+ \sum_{\sigma' M_2} g_{pb}(k\sigma'|M M_2) \tilde{\rho}_{ba}^{(0)}(M_2 M_1) \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P, \quad (45)$$

где  $\Delta_{pb} = \omega_{pb} - \omega_k$ ,  $\tilde{\Phi}_{pa}^+ = \Phi_{pa}^+ \exp(i\omega_L t)$ . Компоненты матрицы плотности  $\tilde{\rho}_{ba}^{(0)}$  и  $\rho_{bb}^{(0)}$  являются стационарным решением системы (22)–(24), а  $\rho_{pp}^{(0)}(MM)$  определяется выражением (21). Для перехода  $s \rightarrow a$  уравнения аналогичны при замене  $p \rightarrow s$ ,  $b \leftrightarrow a$ ,  $\Delta_L \rightarrow -\Delta_L$ .

Для перехода  $b \rightarrow l$  уравнение (28) приводится к виду

$$i\Phi_{bl}^+(k\sigma|MM') = [\Delta_{bl} + \Omega(g_b M - g_l M') + i\Gamma_{bl}(MM')] \Phi_{bl}^+(k\sigma|MM') + \sum_{M_1} \tilde{V}_{ba}(MM_1) \tilde{\Phi}_{al}^+(k\sigma|M_1 M') + g_{bl}(k\sigma|MM') \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma} P \rho_{ll}^{(0)}(M' M') - \sum_{M_1 \sigma'} \tilde{\rho}_{bb}^{(0)}(MM_1) g_{bl}^{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'}, \quad (46)$$

$$i\dot{\Phi}_{al}^+(k\sigma|M_1 M') = [\Delta_{bl} - \Delta_L + \Omega(g_a M_1 - g_l M') - i\Gamma_{al}(MM')] \tilde{\Phi}_{al}^+ + \sum_{M_2} \tilde{V}_{ab}(M_1 M_2) \tilde{\Phi}_{bl}^+(k\sigma|M_2 M') - \sum_{M_2 \sigma'} \tilde{\rho}_{ab}^{(0)}(M_1 M_2) g_{bl}(k\sigma'|M_2 M') \hat{a}_{k\sigma}^+ P \hat{a}_{k\sigma'}, \quad (47)$$

где  $\Phi_{al}^+ = \tilde{\Phi}_{al}^+ \exp(-i\omega_L t)$ . Для перехода  $a \rightarrow m$  уравнения аналогичны (44), (45) с заменой  $b \leftrightarrow a$ ,  $l \rightarrow m$ ,  $\Delta_L \rightarrow -\Delta_L$ .

Подставляя стационарные решения уравнений (44), (45) и (46), (47) в (27), получим уравнения для оператора фотонного поля  $P$ , аналогичное (36), но без слагаемых, отвечающих процессам направленного вперед четырехволнового взаимодействия ( $C = D = 0$ ). Динамика фотонного поля будет описываться уравнениями (42) и (43). Для переходов  $p \rightarrow b$  и  $s \rightarrow a$   $A_{\sigma\sigma'} = A_{\sigma\sigma} \delta_{\sigma\sigma'}$ , т. е. имеет место обычное спонтанное испускание без корреляции между квантами различных поляризаций. Это означает отсутствие интерференционных эффектов, а вот при поглощении на этих переходах интерференционные эффекты имеют место:  $B_{\sigma\sigma'} \neq 0$  при  $\sigma \neq \sigma'$ . Это связано с наличием когерентности между магнитными подуровнями состояний  $a$  и  $b$ , которая возникает под воздействием волны накачки. Для переходов  $b \rightarrow l$  и  $a \rightarrow m$  в процессах поглощения квантов интерференционные эффекты, напротив, отсутствуют,  $B_{\sigma\sigma'} = B_{\sigma\sigma} \delta_{\sigma\sigma'}$ , так как нет когерентности между подуровнями состояний  $l$  и  $m$ . А в спектре спонтанного комбинационного рассеяния (при наличии различных поляризаций в волне накачки) интерференционные эффекты присутствуют:  $\mathcal{A}_{\sigma\sigma'} \neq 0$  при  $\sigma \neq \sigma'$ .

### 2.3. Применение $\kappa q$ -представления

Из уравнений (22), (23) видно, что слагаемые, описывающие релаксационные процессы, являются существенно недиагональными. Это же замечание относится и к уравнению (31) для величин  $\Phi_{k\sigma}^\pm$ . Этот недостаток исчезает при использовании представления поляризационных операторов или  $\kappa q$ -представления [30], которое имеет широкое применение в задачах спектроскопии, атомных столкновений и др. [31, 32].

При использовании этого представления система уравнений (22)–(24) преобразуется к виду

$$i\dot{\rho}_{aa}(\kappa q) = [q\Omega_a - i\Gamma_a(\kappa)] \rho_{aa}(\kappa q) + iA_{ba}(\kappa) \rho_{bb}(\kappa q) + iQ_a(\kappa) - \sum_{\kappa_1 q_1 \sigma} U_{aa}^{b\sigma}(\kappa q|\kappa_1 q_1) \left[ (-1)^{\kappa_1 - \kappa} \tilde{V}_{ab}(\sigma) \tilde{\rho}_{ba}(\kappa_1 q_1) + \tilde{\rho}_{ab}(\kappa_1 q_1) \tilde{V}_{ba}(\sigma) \right], \quad (48)$$

$$i\dot{\rho}_{bb}(\kappa q) = [q\Omega_b - i\Gamma_b(\kappa)] \rho_{bb}(\kappa q) + iQ_b(\kappa) - \sum_{\kappa_1 q_1 \sigma} U_{ba}^{a\sigma}(\kappa q|\kappa_1 q_1) \left[ (-1)^{\kappa_1 - \kappa} \tilde{V}_{ba}(\sigma) \tilde{\rho}_{ab}(\kappa_1 q_1) + \tilde{\rho}_{ba}(\kappa_1 q_1) \tilde{V}_{ab}(\sigma) \right], \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
i\dot{\bar{\rho}}_{ba}(\kappa_1 q_1) = & [\Delta_L + q_1(\Omega_b + \Omega_a)/2 - i\Gamma_{ba}(\kappa_1)] \bar{\rho}_{ba}(\kappa_1 q_1) - \\
& - \sum_{\kappa_2 q_2 \sigma} \bar{V}_{ba}(\sigma) [(-1)^{\kappa_2 - \kappa_1} U_{ba}^{a\sigma}(\kappa_1 q_1 | \kappa_2 q_2) \rho_{aa}(\kappa_2 q_2) + U_{ab}^{a\sigma}(\kappa_1 q_1 | \kappa_2 q_2) \rho_{bb}(\kappa_2 q_2)] + \\
& + \frac{\Omega_b - \Omega_a}{2} \left[ q_1 \frac{J_a(J_a + 1) - J_b(J_b + 1)}{\kappa_1(\kappa_1 + 1)} \bar{\rho}_{ba}(\kappa_1 q_1) + \right. \\
& \left. + f(\kappa_1, q_1) \bar{\rho}_{ba}(\kappa_1 - 1, q_1) + f(\kappa_1 + 1, q_1) \bar{\rho}_{ba}(\kappa_1 + 1, q_1) \right], \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\bar{\rho}_{ba}(\kappa, -q) = (-1)^{J_a - J_b + q} \bar{\rho}_{ba}^*(\kappa, q), \quad (51)$$

где

$$U_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma}(\kappa q | \kappa_1 q_1) = (-1)^{J_\beta + J_\alpha + \kappa_1 - q_1} \sqrt{(2\kappa_1 + 1)(2\kappa_2 + 1)} C_{\kappa q \kappa_1 - q_1}^{1-\sigma} \begin{Bmatrix} \kappa & 1 & \kappa_1 \\ J_\gamma & J_\alpha & J_\beta \end{Bmatrix}, \quad (52)$$

$$f(\kappa_1, q_1) = \frac{1}{\kappa_1} \left\{ [(J_a + J_b + 1)^2 - \kappa_1^2] [\kappa_1^2 - (J_a - J_b)^2] \frac{\kappa_1^2 - q_1^2}{4\kappa_1^2 - 1} \right\}^{1/2}, \quad (53)$$

$$A_{ba}(\kappa) = (-1)^{J_a + J_b + \kappa + 1} (2J_b + 1) \begin{Bmatrix} J_b & J_a & \kappa \\ J_a & J_a & 1 \end{Bmatrix} A_{ba}. \quad (54)$$

Здесь  $\Omega_j = g_j \Omega$ ,  $A_{ba} = 4\omega_{ba}^3 \|d_{ba}\|^2 / 3\hbar c^3 (2J_b + 1)$ .

Релаксационные константы  $\Gamma_n(\kappa)$  и  $\Gamma_{ba}(\kappa)$  определяются стандартным образом [31, 32]. Полагаем, что столкновения носят изотропный характер, поэтому величины  $\Gamma$  и  $Q$  не зависят от  $q$ . Существенным достоинством системы уравнений (48)–(51), в отличие от (22)–(24), является диагональность по релаксационным константам. Однако, как видно из уравнения (50), эта система усложняется из-за связи компонент с разным рангом по  $\kappa$ . Эта прямая связь исчезает, когда факторы Ланде уровней  $a$  и  $b$  равны ( $\Omega_a = \Omega_b$ ) или для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  и, естественно, при отсутствии магнитного поля.

Записывая систему (48)–(51) как

$$i\dot{\rho} = \Xi \cdot \rho + Q, \quad (55)$$

систему уравнений для вспомогательного оператора  $\Phi_{k\sigma}^\pm(\kappa q)$ , аналогичную (31), представим в виде

$$i\dot{\Phi}_{k\sigma}^\pm = (\Xi \mp \nu_k \mathbf{I}) \Phi_{k\sigma}^\pm + \Sigma_{k\sigma}^+. \quad (56)$$

При этом компоненты столбца  $\Sigma_{k\sigma}^+$  определяются выражением

$$\begin{aligned}
\Sigma_{jm}^+(k\sigma | \kappa q) = & \sum_{\kappa_1 q_1 \sigma'; d=a, b; k''} \left\{ (-1)^{\kappa_1 - \kappa} U_{mj}^{d\sigma'}(\kappa q | \kappa_1 q_1) (1 - \delta_{md}) \times \right. \\
& \times \left[ \hat{a}_{k\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma'} P g_{ba}(\sigma) \rho_{am}^{(0)}(\kappa_1 q_1) \delta_{jb} + \hat{a}_{\sigma' k'}^+ \hat{a}_{\sigma k}^+ P g_{ab}(\sigma) \rho_{bm}^{(0)}(\kappa_1 q_1) \delta_{ja} \right] + \\
& \left. + U_{jm}^{d\sigma'}(\kappa q | \kappa_1 q_1) \rho_{jd}^{(0)}(\kappa_1 q_1) [\hat{a}_{\sigma k}^+ P \hat{a}_{\sigma' k} g_{ba}(\sigma') \delta_{ab} \delta_{ma} + g_{ab}(\sigma') \hat{a}_{\sigma k}^+ P \hat{a}_{\sigma' k'}^+ \delta_{da} \delta_{mb}] \right\}. \quad (57)
\end{aligned}$$

Уравнение для оператора плотности фотонного поля, резонансного переходу  $a \rightarrow b$ , с учетом  $kq$ -представления операторов  $\Phi^\pm$  имеет вид

$$\frac{d}{dt}P = -i \sum_{k\sigma, q} [\Phi_{ba}^+ (k\sigma|1q) g_{ba}^*(\sigma) + \Phi_{ab}^- (k\sigma|1q) g_{ab}^*(\sigma) - \text{H.c.}], \quad (58)$$

значения компонент операторов  $\Phi^\pm(k\sigma|1q)$  находятся из уравнения (56). Получаемое в итоге уравнение для оператора  $P$  полностью совпадает с уравнением (36), выведенным из  $M$ -представления.

Применение  $kq$ -представления для описания процессов рассеяния на переходах, смежных с переходом  $a \rightarrow b$ , сводится к применению этого представления к уравнениям (44)–(47).

### 3. СВОЙСТВА РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ: УГЛОВЫЕ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Интенсивность излучения, рассеянного на большие углы, в рассматриваемой нами системе определяется корреляторами  $\langle a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma'} \rangle$ , динамика которых описывается системой (43). В выбранной системе координат полагалось, что они имеют те же векторы поляризации, что и волна накачки. Для интерпретации экспериментальных наблюдений и теоретического описания распространения излучения в протяженной среде представляет интерес модификация этих величин в повернутой системе координат. Связь между корреляторами  $\langle a_\lambda^+ a_{\lambda'} \rangle$  и  $\langle a_\sigma^+ a_{\sigma'} \rangle$ , где  $\hat{a}_\lambda^+$  и  $\hat{a}_\lambda$  — операторы рождения и уничтожения фотонов в повернутой на углы Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  системе координат, определяется выражением (для простоты индекс опускаем)

$$\langle a_\lambda^+ a_{\lambda'} \rangle = \sum_{\sigma\sigma'} \varepsilon_{\lambda\lambda'}^{\sigma\sigma'} \langle a_\sigma^+ a_{\sigma'} \rangle, \quad \varepsilon_{\lambda\lambda'}^{\sigma\sigma'}(\alpha, \beta, \gamma) = (D_{\sigma\lambda}^1)^* D_{\sigma'\lambda'}, \quad (59)$$

где  $D_{\sigma\lambda}^1(\alpha, \beta, \gamma)$  — функции Вигнера [30]. При этом уравнения для корреляторов  $\langle a_\lambda^+ a_{\lambda'} \rangle$  аналогичны системе (43) с соответствующей заменой коэффициентов  $A$  и  $B$ , например:

$$\mathcal{A}_{\lambda\lambda'} = \sum_{\sigma\sigma'} \varepsilon_{\lambda\lambda'}^{\sigma\sigma'} \mathcal{A}_{\sigma\sigma'}. \quad (60)$$

При этом величину  $\mathcal{A}_{\sigma\sigma'}$  можно рассматривать как спектральную характеристику. Заметим, что используя соотношение [30]

$$D_{M_1 N_1}^{J_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{M_2 N_2}^{J_2}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{M, N} C_{J_1 M_1}^{J M} D_{M N}^J(\alpha, \beta, \gamma) C_{J_1 N_1 J_2 N_2}^{J N},$$

получим хорошо известную в литературе поляризационно-угловую зависимость спонтанного излучения [33]

$$\mathcal{A}_{\lambda\lambda'} = \sum_{\substack{\sigma\sigma' \\ L=0,1,2}} (-1)^{\lambda'+\sigma'} (2L+1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ \sigma' & -\sigma & \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ \lambda' & -\lambda & -\mu \end{pmatrix} D_{\chi\mu}^L \mathcal{A}_{\sigma\sigma'} \quad (61)$$

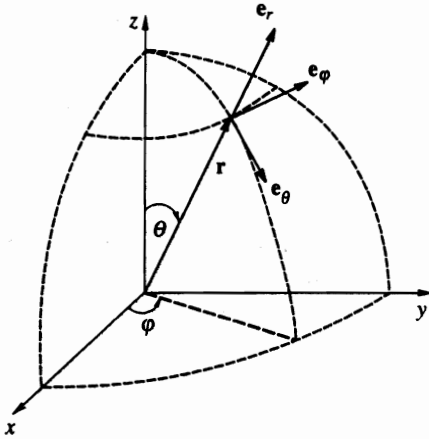


Рис. 2. Сферическая система координат

с учетом свойств  $3jm$ -символов  $\mu = \lambda' - \lambda, \chi = \sigma' - \sigma$ .

Пренебрегая дисперсией, введем тензор интенсивного рассеянного излучения:

$$J_{\lambda\lambda'} = c \int \langle a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda'} \rangle \hbar \omega \delta(\omega - \omega_k) \frac{dk d\omega}{(2\pi)^4}. \tag{62}$$

Рассеяние в направлении единичного вектора  $e$  определяется выражением

$$J_{\lambda\lambda'}(e) = \int \frac{\hbar \omega_k^3 d\omega_k}{4\pi^2 c^2} \langle a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda'} \rangle \delta(O - O_e) dO, \tag{63}$$

здесь  $O$  — телесный угол. Для спектрального тензора интенсивности имеем

$$J_{\lambda\lambda'}(\omega_k, \lambda) = \frac{\hbar \omega_k^3}{4\pi^2 c^2} \langle a_{\lambda}^+ a_{\lambda'} \rangle = Q_{\omega} \langle a_{\lambda}^+ a_{\lambda'} \rangle. \tag{64}$$

Рассмотрим практически важный случай сферической геометрии (см. рис. 2) и для фотонов с векторами поляризации  $e_{\varphi}$  и  $e_{\theta}$  введем корреляторы  $\langle a_{\varphi}^+ a_{\varphi} \rangle$  и  $\langle a_{\theta}^+ a_{\theta} \rangle$ , где  $\hat{a}_{\varphi}$  и  $\hat{a}_{\theta}$  — соответствующие операторы уничтожения фотонов. Используя выражение (59), получим

$$\langle a_{\theta}^+ a_{\theta} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} (D_{\sigma-1}^1 - D_{\sigma 1}^1)^* (D_{\sigma'-1}^1 - D_{\sigma' 1}^1) \langle a_{\sigma}^+ a_{\sigma'} \rangle, \tag{65}$$

$$\langle a_{\varphi}^+ a_{\varphi} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} (D_{\sigma-1}^1 + D_{\sigma 1}^1)^* (D_{\sigma'-1}^1 + D_{\sigma' 1}^1) \langle a_{\sigma}^+ a_{\sigma'} \rangle. \tag{66}$$

Здесь  $D_{\sigma\pm 1}^1 = D_{\sigma\pm 1}^1(\varphi, \theta, 0)$ . Используя явный вид  $D$ -функции [30], выражение (66) запишем в компактном виде

$$\begin{aligned} \langle a_{\varphi}^+ a_{\varphi} \rangle = \frac{1}{2} [ & \langle a_{+}^+ a_{+} \rangle + \langle a_{-}^+ a_{-} \rangle + \cos(2\varphi) (\langle a_{+}^+ a_{-} \rangle + \langle a_{-}^+ a_{+} \rangle) + \\ & + i \sin(2\varphi) (\langle a_{-}^+ a_{+} \rangle - \langle a_{+}^+ a_{-} \rangle)]. \end{aligned} \tag{67}$$

При рассеянии излучения вдоль оси  $r$  (см. рис. 2) можно ввести параметры Стокса следующим образом:

$$\eta_1 = (J_\theta(45, 0) - J_\varphi(45, 0)) / J_t, \tag{68a}$$

$$\eta_2 = (J_{++} - J_{--}) / J_t, \tag{68б}$$

$$\eta_3 = (J_\theta(0, 0) - J_\varphi(0, 0)) / J_t, \tag{68в}$$

здесь  $J_{\theta(\varphi)}(\varphi, \theta)$  — интенсивность фотонов, линейно поляризованных вдоль вектора  $e_\theta$  ( $e_\varphi$ ), определяемая аналогично выражению (64);  $J_t$  — полная интенсивность. Используя выражения (64) и (67), получим

$$\eta_1 = \frac{i(\langle a_+^+ a_+ \rangle - \langle a_+^+ a_- \rangle)}{\langle a_+^+ a_+ \rangle + \langle a_-^+ a_- \rangle}, \tag{69a}$$

$$\eta_2 = \frac{\langle a_+^+ a_+ \rangle - \langle a_-^+ a_- \rangle}{\langle a_+^+ a_+ \rangle + \langle a_-^+ a_- \rangle}, \tag{69б}$$

$$\eta_3 = -\frac{\langle a_+^+ a_- \rangle + \langle a_-^+ a_+ \rangle}{\langle a_+^+ a_+ \rangle + \langle a_-^+ a_- \rangle}. \tag{69в}$$

Для наблюдения вдоль оси  $z$  число уравнений сокращается до четырех, и система (43) в данном случае определяется для величины

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \langle a_+^+ a_+ \rangle & \langle a_+^+ a_- \rangle \\ \langle a_-^+ a_+ \rangle & \langle a_-^+ a_- \rangle \end{pmatrix}. \tag{70}$$

При этом можно заметить, что если рассеянное излучение собирается в резонаторе, то система уравнений (43) с математической точки зрения полностью эквивалентна уравнениям из работы [20], в которой исследовалась генерация сжатых состояний. В рассматриваемой нами системе корреляторы  $\langle a_+^+ a_- \rangle$  и  $\langle a_-^+ a_+ \rangle$  являются аналогами корреляторов  $\langle a_1 a_3 \rangle$  и  $\langle a_1^+ a_3^+ \rangle$  из работ [18–20]. Возникает вопрос: возможна ли генерация сжатых состояний в данном случае? Проведенный нами численный анализ этой системы для переходов  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  и  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  в широком диапазоне параметров основных величин (отстройка от резонанса, интенсивность волны накачки, напряженность магнитного поля, добротность резонатора) такой возможности не обнаружил. По-видимому, невозможность возникновения сжатых состояний связана не просто с особенностями спектральных характеристик в уравнениях движения, которые определяются свойствами указанных выше переходов. Причина этого связана со свойствами фотонных состояний и заключается в следующем. Бифотонное состояние  $\hat{b} = \mu \hat{a}_1 + \nu \hat{a}_3^+$ , которое исследовалось в работах [20, 21], подразумевает выполнение коммутационного соотношения  $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$ , из которого следует условие для коэффициентов  $\mu, \nu$ :  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ . Это означает, что для операторов  $\hat{a}_1$  и  $\hat{a}_3^+$  возможно решение  $\hat{a}_1 \propto \text{ch } \chi$ ,  $\hat{a}_3 \propto \text{sh } \chi$  (здесь  $\chi$  — динамическая переменная), которое, как известно [34], приводит к генерации сжатого состояния. В рассматриваемом нами случае из коммутационного соотношения для бифотонного состояния  $\hat{b} = \nu \hat{a}_+ + \mu \hat{a}_-$  следует условие  $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$  и возможное решение для операторов  $\hat{a}_+$  и  $\hat{a}_-$  вида  $\hat{a}_+ \propto \cos \chi$ ,  $\hat{a}_- \propto \sin \chi$ . Решение этого типа к генерации сжатых состояний не приводит.

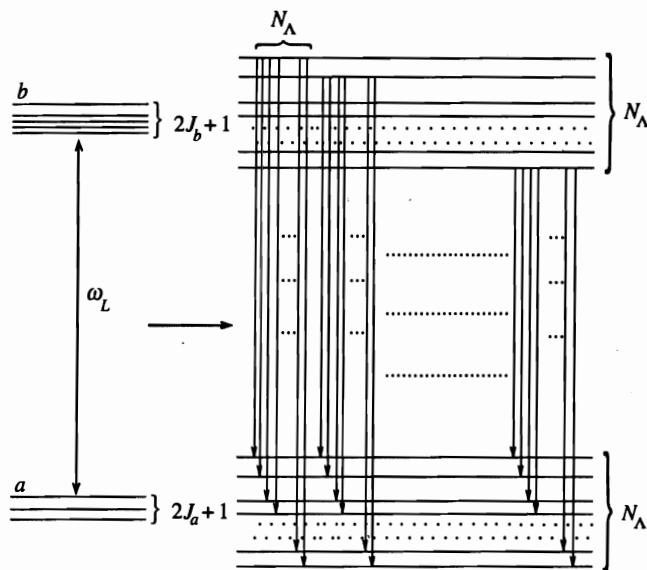


Рис. 3. Схема квазиэнергетических состояний резонансного перехода в поле интенсивной электромагнитной волны

#### 4. СВОЙСТВА РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ: РЕЗОНАНСНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ

Изучение свойств резонансной флуоресценции имеет большую практическую ценность в лазерной спектроскопии и ее приложениях. При взаимодействии лазерного излучения с оптически тонкой средой, т. е. когда поглощение невелико, одной из основных характеристик является резонансная флуоресценция. В этом случае из уравнений (43) следует, что корреляторы  $\langle a_{\sigma}^+, a_{\sigma} \rangle$  определяются величинами  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}$ , описывающими спектры резонансной флуоресценции. Величины  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}$  при  $\sigma' \neq \sigma$  характеризуют интерференционные эффекты при испускании фотонов различной поляризации, которые возникают из-за когерентности между магнитными подуровнями.

Рассмотрим свойства резонансной флуоресценции для перехода  $a \rightarrow b$ . В достаточно сильных полях спектр имеет мультиплетную структуру и может быть аппроксимирован набором лоренцианов:

$$\mathcal{A}_{\sigma\sigma} \propto \sum_{j=1}^{N_{\Lambda}^2} \left( \frac{f_j^{(\sigma)}}{\nu + \Omega_j^R + i\Gamma_j} + \text{c.c.} \right), \quad (71)$$

где  $\Omega_j^R + i\Gamma_j$  — собственные значения матрицы, размерность которой определяется величиной  $\dim \Lambda = 4(I_a + I_b + 1)^2 = N_{\Lambda}^2$ ,  $f_j^{(\sigma)}$  — константа, определяющая вклад данного члена. Число пиков определяется величиной  $Z_{\Lambda} = N_{\Lambda}^2 - N_{\Lambda} + 1$ . Этот результат может быть интерпретирован с точки зрения состояний одетого атома: в сильном поле этот переход расщепляется на  $N_{\Lambda}$  квазиэнергетических уровней вверху и внизу (см. рис. 3). Переходы между ними и определяют спектр резонансной флуоресценции. В некоторых



случаях, например при точном резонансе волны накачки с частотой перехода ( $\Delta_L = 0$ ) или при отсутствии магнитного поля, спектр квазиэнергий становится эквидистантным и число пиков уменьшается ( $Z_\Lambda$  — максимальное число пиков). В общем случае для произвольных значений интенсивности волны накачки, ее отстройки от резонанса и величины магнитного поля из выражения (37) следует, что  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu)$  определяется отношением двух полиномов относительно  $\nu$ : размерности  $N_\Lambda^2$  в знаменателе и  $N_\Lambda^2 - 1$  — в числителе (напомним, что  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}$  определяется суммой  $A_{\sigma'\sigma} + A_{\sigma'\sigma}^*$ ). Используя выражения (33) и (35), из (37) находим, что полный сигнал резонансной флуоресценции, т. е. проинтегрированный по спектру, определяется выражением

$$S_{\sigma'\sigma} = N \sum_{M, M', M''} g_{ab}^{k\sigma} (M' M) g_{ba}^{k\sigma'} (M'' M') \rho_{bb}^{(0)} (M M''). \quad (72)$$

Заметим, что здесь при анализе использовалось  $M$ -представление. Результат, естественно, не зависит от типа представления. Укажем, что размерность матрицы  $\Xi$  совпадает с размерностью  $\Lambda$ . В  $\kappa q$ -представлении выражение для  $S_{\sigma'\sigma}$  получается соответствующим преобразованием (72). Для описания эффекта Ханле [35], характеризующего деполяризацию рассеянного излучения в магнитном поле, в оптически тонкой среде используем выражения (64), (67). Тогда

$$S_\varphi = \frac{1}{2} [S_{++} + S_{--} + \cos(2\varphi)(S_{+-} + S_{-+}) + i \sin(2\varphi)(S_{-+} - S_{+-})], \quad (73)$$

где  $S_\varphi$  — сигнал Ханле линейно поляризованного излучения вдоль вектора  $e_\varphi$ . Выражения (73) и (72) обобщают результаты работы Авана и Коэн-Таннуджи [36].

Рассмотрим практически важный случай, когда нижний уровень является основным. При этом спектр можно представить в виде

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma} = \mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{el} + \mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{inel}, \quad (74)$$

где  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{el} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu)$  описывает рассеяние без изменения частоты кванта,  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{el} \propto \delta(\nu)$  — рэлеевское рассеяние, а  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{inel}$  — неупругое рассеяние, т. е. с изменением частоты кванта.

В  $M$ -представлении  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{el}$  определяется выражением

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}^{el}(\nu) = 2\pi N \sum_{M M' M_1 M_2} g_{ab}^{k\sigma} (M M') g_{ba}^{k\sigma'} (M_1 M_2) \bar{\rho}_{ab}^{(0)} (M_2 M_1) \bar{\rho}_{ba}^{(0)} (M' M) \delta(\nu). \quad (75)$$

Укажем, что при наличии сильно деполяризующих столкновений вклад упругой компоненты всегда мал. В чисто радиационном режиме релаксации ее вклад определяется параметрами

$$\tilde{V}_{ab}(M M') / |\Delta_L + (g_b M - g_a M') \Omega + i A_{ba} / 2|.$$

Если хоть один из них велик, то определяющей будет неупругая компонента, если же все они малы, основной будет упругая.

Для спонтанного излучения на переходах смежных с  $a \rightarrow b$  максимальное число пиков в спектре составляет  $(2J_n + 1)N_\Lambda$ ,  $n = l, m, s, p$ . При этом даже если один из уровней является основным, излучение является некогерентным. В разд. 2.2 отмечалось, что из уравнений (44), (45), видно, что для переходов  $p \rightarrow b$  и  $s \rightarrow a$  в спектре испускания отсутствуют интерференционные члены:  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma'\sigma} \mathcal{A}_{\sigma\sigma}$ .

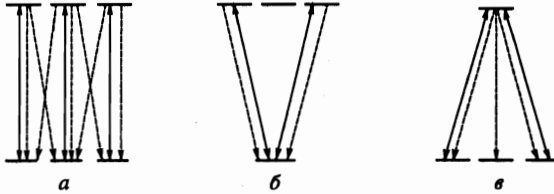


Рис. 4. Схема переходов при возбуждении атомов линейно поляризованным светом (а), V-типа (б) и Λ-типа (в) при возбуждении лево- и правополяризованным излучением. Штриховыми линиями изображается спонтанное излучение

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И РАССЕЯНИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРЕХОДЕ  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$

При описании взаимодействия электромагнитной волны произвольного поляризационного состава с резонансным переходом можно выделить три основных типа переходов между атомными подуровнями. Схематически они изображены на рис. 4. На рис. 4а показан простейший тип: переходы между двухуровневыми подсистемами, а на рис. 4б и 4в представлены схемы, относящиеся к Λ- и V-типам взаимодействия излучения с подуровнями. Их комбинации позволяют описать все возможные переходы.

Недавно в работах [12, 37] было развито описание и исследованы спектры резонансной флуоресценции вырожденной двухуровневой системы (с произвольными значениями  $J_a$  и  $J_b$  без учета влияния магнитного поля, т. е.  $H = 0$ ) в поле монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны произвольной интенсивности (см. рис. 4а). При этом отсутствуют интерференционные эффекты: величины  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma} = 0$  ( $\sigma' \neq \sigma$ ) в нашем описании.

Простейшей системой, описывающей переходы V-типа, является взаимодействие электромагнитной волны с переходом  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  (рис. 4б). Спектр резонансной флуоресценции и интерференционные явления для этой системы, а также влияние вырожденных процессов на их свойства недавно исследовались в работах [15, 16]. Хорошо исследованы для этого перехода эффекты Фарадея и оптического выстраивания [14, 38].

Существенно менее исследовано как взаимодействие, так и спектры рассеяния интенсивной электромагнитной волны на переходе  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  (см. рис. 4в). Этот переход является простейшей системой, описывающей переходы Λ-типа. Его исследование имеет самостоятельный интерес и важно для понимания процессов взаимодействия электромагнитной волны с атомными переходами сложной структуры.

5.1. Нелинейный эффект Фарадея для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$

В фарадеевской геометрии угол вращения плоскости поляризации монохроматической электромагнитной волны, прошедшей через оптически тонкую газовую среду, определяется выражением

$$\varphi = (n_+ - n_-)\omega_L l / 2c, \tag{76}$$

где  $l$  — размер среды,  $n_\sigma$  — показатель преломления, который для среды с рабочим переходом  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  равен  $n_\sigma = 1 + 2\pi N \text{Re}(d_{\sigma b} \rho_{b\sigma} / E_{L\sigma})$ ,  $N$  — плотность атомов. В этом разделе приняты обозначения  $\rho_{bb}^{(0)}(00) = \rho_{bb}$ ,  $\tilde{\rho}_{ba}^{(0)}(0\sigma) = \rho_{b\sigma}$ ,  $\rho_{aa}^{(0)}(\sigma\sigma') = \rho_{\sigma\sigma'}$ .

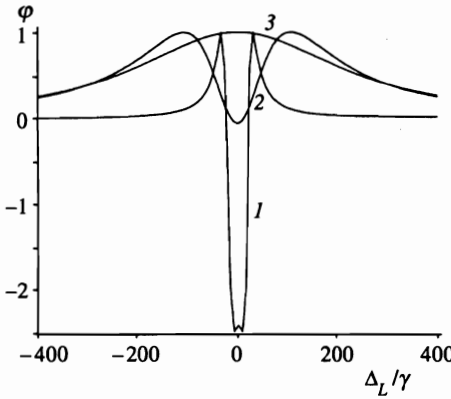


Рис. 5. Нормированная на единицу зависимость угла вращения плоскости поляризации излучения от его отстройки от резонанса при  $\Omega/\gamma = 20$ ,  $V_{\pm}/\gamma = 0.1$  (кривая 1), 20 (кривая 2) и 50 (кривая 3)

Значение  $\rho_{b\sigma}$  находим из стационарного решения уравнений (22)–(24) для данного перехода. На рис. 5 представлена зависимость  $\varphi$  от отстройки электромагнитной волны от резонанса для различных значений параметра  $V_{\sigma} = \tilde{V}_{ba}(0\sigma)$ . Здесь и далее в расчетах мы полагаем  $\Gamma_a(\sigma\sigma) = \gamma$ ,  $\Gamma_a(\sigma\sigma') = 6\gamma$  ( $\sigma \neq \sigma'$ ),  $\Gamma_b = 3\gamma$ ,  $\Gamma_{ba} = 9\gamma$ ,  $A_{ba} \ll \gamma$ . Из рис. 5 видно, что с ростом интенсивности зависимость  $\varphi$  от отстройки изменяется существенно. Качественно эта модификация формы линии  $\varphi(\Delta_L)$  совпадает с результатами для этой зависимости в среде с рабочим переходом  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  [14]. Поэтому для переходов с более сложной структурой атомных подуровней следует ожидать аналогичных результатов. Заметим, что это согласуется с экспериментальными результатами работы [39].

Полагая, что на входе в среду электромагнитная волна была линейно поляризована вдоль оси  $y$ , следует ожидать, что возникновение ортогональной ей компоненты, обусловленной вращением плоскости поляризации на малый угол  $\varphi$ , будет описываться выражением

$$I_x \propto I_L \varphi^2, \tag{77}$$

где  $I_L$  — интенсивность излучения на входе в среду,  $I_x = |E_+ - E_-|^2$ . Это выражение является корректным лишь вдали от резонанса, когда можно пренебречь поглощением излучения. Вблизи резонанса возникновение ортогональной компоненты будет обусловлено как различной величиной дисперсии для лево- и правополяризованных волн, так и различием их поглощения. Из уравнений Максвелла для медленно меняющихся амплитуд следует

$$\frac{\partial I_x}{\partial z} = P_x^*(E_+ - E_-) + \text{с.с.}, \tag{78}$$

где  $P_x \propto i(d_{b+\rho_{+b}} - d_{b-\rho_{-b}})$ . В оптически тонком случае  $E_+ - E_- \propto P_x$ , тогда

$$I_x \propto |d_{b+\rho_{+b}} - d_{b-\rho_{-b}}|^2. \tag{79}$$

Выражения (77) и (79) совпадают лишь в точном резонансе. Различие в зависимостях  $I_x(\Delta_L)$  и  $I_x(\Omega)$ , рассчитанных по формулам (77) и (79), демонстрируется на рис. 6 и 7. Выражения (77) и (79) почти совпадают в сильном поле волны накачки  $V_{\pm} > \Delta_L$  или

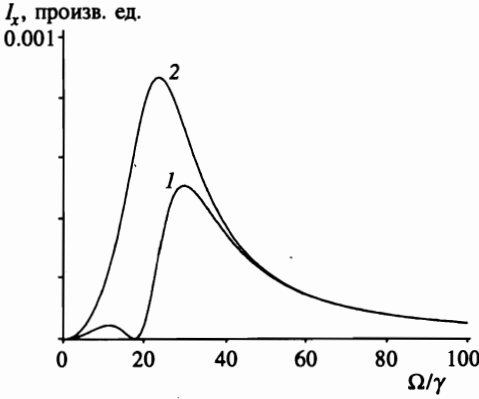


Рис. 6. Зависимости  $I_x(\Omega)$ , рассчитанные по формулам (77) (кривая 1) и (78) (кривая 2) при  $V_{\pm}/\gamma = 1$ ,  $\Delta_L/\gamma = 20$

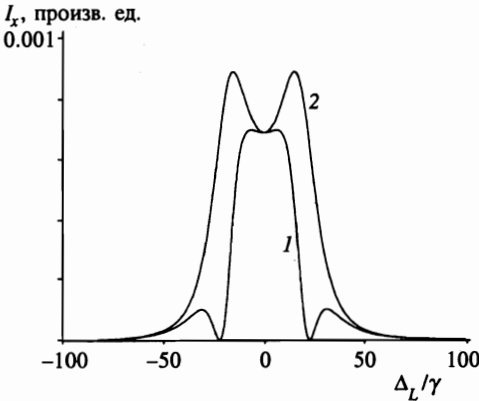


Рис. 7. Зависимости  $I_x(\Delta_L)$ , рассчитанные по формулам (77) (кривая 1) и (79) (кривая 2) при  $V_{\pm}/\gamma = 1$ ,  $\Omega/\gamma = 20$

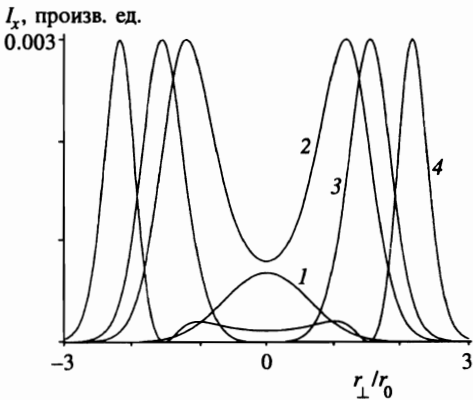


Рис. 8. Поперечное распределение  $I_x$  при гауссовом распределении волны накачки по сечению пучка при  $\Delta_L = 0$ ,  $\Omega/\gamma = 20$  и параметрах  $V_{\pm}/\gamma = 1$  (кривая 1), 10 (кривая 2), 20 (кривая 3), 50 (кривая 4)

в сильном магнитном поле  $\Omega \gg \Delta_L$ . Наиболее отличаются они в области параметров  $\Omega \sim \Delta_L, V_{\pm} \ll \Delta_L$  (см. рис. 6, 7).

Укажем, что для интенсивного излучения в поперечном распределении  $I_x$  могут наблюдаться особенности. Предположим гауссово распределение интенсивности излучения на входе:

$$U_L = \exp [-(r_{\perp}/r_0)^2], \tag{80}$$

где  $r_{\perp}$  — поперечная координата, а  $r_0$  — размер пучка. На рис. 8 представлена зависимость  $I_x(r_{\perp})$ , рассчитанная из выражения (79) с учетом зависимости (80). Распределение  $I_x(r_{\perp})$  напоминает хорошо известное в литературе коническое излучение [40–42], однако имеет совершенно другую природу. Это распределение обусловлено двумя основными факторами: уменьшением угла вращения плоскости поляризации вследствие насыщения и поперечным распределением входящего излучения. Полученный результат качественно объясняет экспериментальные результаты работы [43], где исследовался эффект Фарадея для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  атомов неона. Количественное рассмотрение должно учитывать тепловое движение атомов, которым мы пренебрегаем в данной работе и которое существенно для условий эксперимента [43].

### 5.2. Спектры спонтанного испускания перехода $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$

Используя формализм, развитый в разд. 2 данной статьи для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$ , исследуем его спектры спонтанного испускания в поле сильной электромагнитной волны. На рис. 9 представлены спектры рассеяния атомов в фойгтовской геометрии ( $\mathbf{k}_L \perp \mathbf{H}$ ) при тех же параметрах атомной подсистемы, что и в предыдущем разделе. Явные выражения для спектров рассеяния содержатся в [44]. Из рис. 9 видно, что в соответствии с результатами разд. 4 в спектре рассеяния может наблюдаться до 13 пиков. Существенным отличием рассматриваемого перехода от перехода  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  является то, что рассеянное излучение независимо от поляризационного состава возбуждающего излучения содержит  $\pi$ - и  $\sigma_{\pm}$ -компоненты. Величина  $\mathcal{A}_x$  описывает спектры флуоресценции, линейно поляризованной вдоль оси  $x$  и рассеянной вдоль оси  $y$ . На рис. 10а представлен спектр  $\mathcal{A}_x$  для волны накачки, вектор линейной поляризации которой  $\mathbf{e}_L$  ортогонален направлению магнитного поля,  $\mathbf{e}_L \parallel \mathbf{e}_y$ . Из (60), (67) следует, что  $\mathcal{A}_x$  определяется выражением

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_{++} + \mathcal{A}_{--} + \mathcal{A}_{+-} + \mathcal{A}_{-+}. \tag{81}$$

При этом полный сигнал рассеяния  $S_x$  определяется населенностью верхнего уровня:

$$S_x = \int \mathcal{A}_x \frac{d\nu}{2\pi} \propto \rho_{bb}. \tag{82}$$

Это связано со структурой перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$ , для которого из выражения (72) следует

$$S_{\sigma'\sigma} \propto \delta_{\sigma'\sigma} \rho_{bb}. \tag{83}$$

Сравнивая полученные результаты (при  $\mathbf{e}_L \parallel \mathbf{e}_y$ , т.е.  $V_0 = 0$ ) с результатами работ [15, 36], где для такой же геометрии исследовалось рассеяние монохроматической волны на переходе  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$ , укажем наиболее существенные отличия.

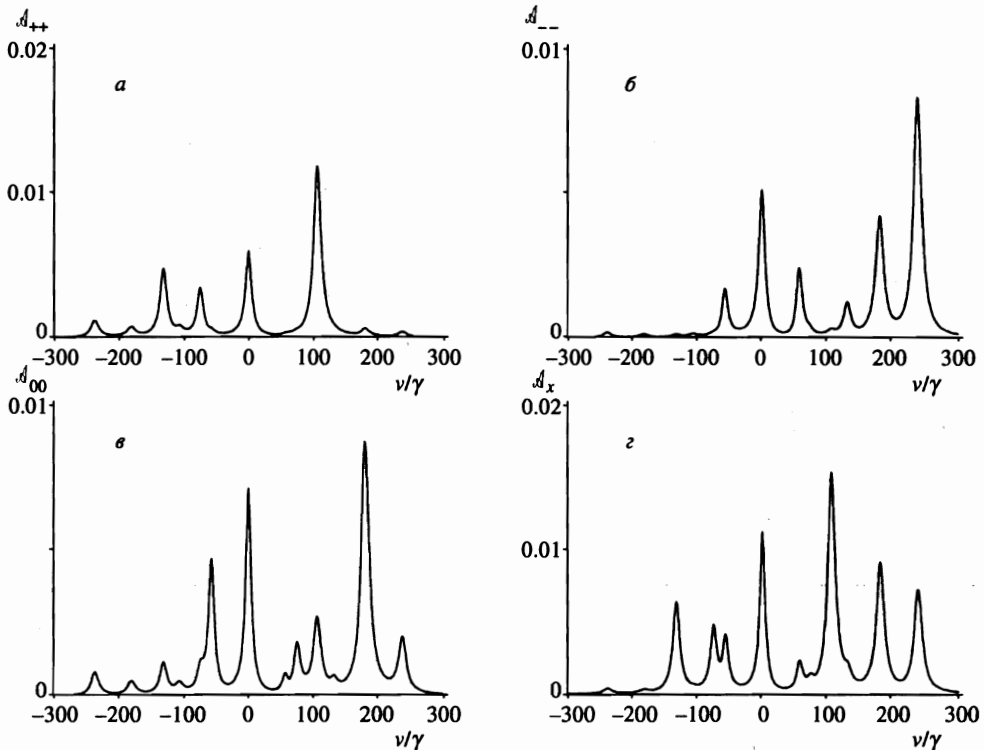


Рис. 9. Спектры резонансной флуоресценции различной поляризации при параметрах  $V_{\pm}/\gamma = 50$ ,  $\Delta_L/\gamma = 80$ ,  $V_0/\gamma = 70$ ,  $\Omega/\gamma = 60$

Во-первых, в рассеянном излучении для перехода  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  отсутствует  $\pi$ -компонента (столкновительное перемешивание магнитных подуровней отсутствует). Во-вторых, существенно различны интерференционные процессы: значительно отличаются свойства отвечающих им величин  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}$  и  $S_{\sigma'\sigma}$  ( $\sigma \neq \sigma'$ ). На рис. 10б, в представлена спектральная зависимость  $\mathcal{A}_{\pm}$ , из которой видно, что она является знакопеременной величиной. Более того, из выражения (83) следует, что  $S_{\sigma'\sigma} = 0$  для  $\sigma \neq \sigma'$ . Это означает, что эффект Ханле (изменение поляризационных характеристик рассеянного излучения под влиянием магнитного поля) для перехода  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  в отличие от перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  проявляется в основном в изменении спектров испускания. На рис. 11 представлена зависимость  $S_x$  от величины магнитного поля. Сравнивая ее с аналогичной зависимостью  $S_x$  для перехода  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  [36], видим, что отсутствует интерференционный провал при  $\Omega = 0$ . Влияние магнитного поля сводится к влиянию на заселенность магнитного поля: максимум  $S_x$  достигается при  $\Omega = \pm\Delta_L$ , а при  $\Omega \gg \Delta_L$ ,  $V_\sigma, \Gamma_{ba}$  населенность верхнего уровня (и, следовательно,  $S_x$ ) уменьшается вследствие увеличения отстройки излучения от резонансов.

При возбуждении перехода волной одной поляризации  $V_\sigma$  ( $V_{\sigma'} = 0$ ,  $\sigma' \neq \sigma$ ) спектр флуоресценции  $\mathcal{A}_{\sigma\sigma}$ , отвечающий этому переходу, будет описываться хорошо известными выражениями для невырожденной открытой двухуровневой системы [17]. В достаточно сильных полях он имеет форму триплета. При этом спектры других компонент

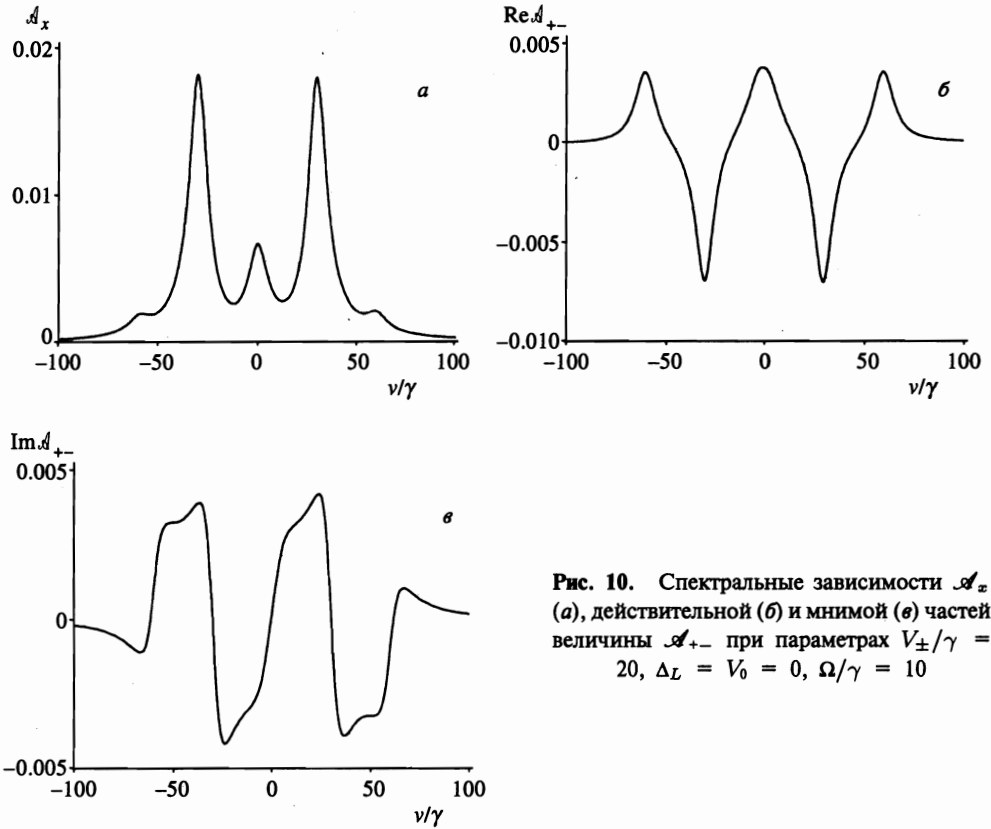


Рис. 10. Спектральные зависимости  $\mathcal{A}_x$  (а), действительной (б) и мнимой (в) частей величины  $\mathcal{A}_{+-}$  при параметрах  $V_{\pm}/\gamma = 20$ ,  $\Delta_L = V_0 = 0$ ,  $\Omega/\gamma = 10$

$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}$  будут иметь форму дублетов и описываться выражениями

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu) \propto i \frac{\rho_{bb}(\nu + \tilde{\Delta}_{\sigma'\sigma}) + V_{\sigma}^* \rho_{b\sigma}}{(\nu - \tilde{\Delta}_{\sigma'}) (\nu + \tilde{\Delta}_{\sigma'\sigma}) - |V_{\sigma}|^2} + \text{с.с.}, \quad (84)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{\sigma} = \Delta_L - \Omega\sigma + i\Gamma_{ba}, \quad \tilde{\Delta}_{\sigma'\sigma} = \Omega(\sigma' - \sigma) - i\Gamma_a(\sigma'\sigma),$$

$$V_{\sigma}^* \rho_{b\sigma} = -(\Gamma_b \rho_{bb} - Q_b) \tilde{\Delta}_{\sigma} / 2\Gamma_{ba}. \quad (85)$$

При  $Q_b = 0$ .

$$\rho_{bb} = \frac{2\Gamma_{ba}|V_{\sigma}|^2 Q_{\sigma}}{|\tilde{\Delta}_{\sigma}|^2 \Gamma_b \Gamma_a + 2\Gamma_{ba}|V_{\sigma}|^2 (\Gamma_b + \Gamma_a - A_{ba}/3)}. \quad (86)$$

Используя (85) при  $Q_b = 0$ , (84) можно привести к виду

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu) \propto \text{Im} \left( \rho_{bb} \frac{\nu + \tilde{\Delta}_{\sigma'\sigma} - \tilde{\Delta}_{\sigma} \Gamma_b / 2\Gamma_{ba}}{(\nu - \tilde{\Delta}_{\sigma'}) (\nu + \tilde{\Delta}_{\sigma'\sigma}) - |V_{\sigma}|^2} \right). \quad (87)$$

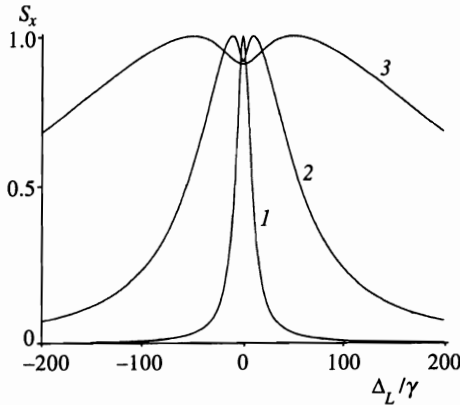


Рис. 11. Нормированная на единицу зависимость величины  $S_x$  от магнитного поля при  $\Delta_L = V_0 = 0$  и параметрах  $V_{\pm}/\gamma = 0.1$  (кривая 1), 10 (кривая 2), 50 (кривая 3)

Рассмотрим предел, когда нижний уровень является основным, режим релаксации — радиационный:  $\Gamma_b = 2\Gamma_{ba} = A_{ba}$ ,  $\Gamma_a(\sigma'\sigma) = 0$ . Рассматриваемая система является открытой, поэтому, чтобы формально существовало стационарное решение, будем полагать наличие накачки на нижний уровень рабочего перехода. Тогда имеем

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu) \propto \frac{\rho_{bb}}{2} \frac{|V_{\sigma}|^2 A_{ba}}{|(\nu + \Delta_{\sigma'\sigma})(\nu + \bar{\Delta}_{\sigma'}) - |V_{\sigma}|^2|^2}, \tag{88}$$

где  $\Delta_{\sigma'\sigma} = \Omega(\sigma' - \sigma)$ . Как и следует ожидать, полная интенсивность  $\sigma'$ -компоненты

$$\int \mathcal{A}_{\sigma'\sigma} d\nu \propto \rho_{bb}$$

и, следовательно, линейна по интенсивности волны накачки  $I_{L\sigma}$  (см. (86)). В слабых полях  $V_{\sigma} \ll A_{ba}$  спектр спонтанного излучения  $\sigma'$ -компоненты представляет собой очень узкий пик шириной порядка  $|V_{\sigma}|^2/|\Delta_{\sigma}|$ . При этом с учетом выражения (86) для  $\rho_{bb}$  из (88) следует, что  $\mathcal{A}_{\sigma'\sigma}(\nu) \propto O(V_{\sigma}^4)$ , или пропорционально  $I_{L\sigma}^2$ . Полученный результат аналогичен спектральным свойствам резонансной флуоресценции двухуровневого атома в поле слабой электромагнитной волны [13]: упругая (или рэлеевская) компонента пропорциональна  $I_{L\sigma}$ , а неупругая (или смещенная) —  $I_{L\sigma}^2$ . В случае вырожденного двухуровневого атома при облучении слабой волной  $\sigma$ -поляризации результат Моллоу [13] обобщается следующим образом:

$$\mathcal{A}_{\sigma'\sigma} \propto \delta(\nu) I_{L\sigma} \delta_{\sigma'\sigma} + f_{\sigma'\sigma}^{inel}(\nu) I_{L\sigma}^2, \tag{89}$$

где  $f_{\sigma'\sigma}^{inel}(\nu)$  — форма линейной неупругой компоненты, см. (88). Проведенный анализ выполнен для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$ . Однако результат (89) может быть обобщен на переходы с произвольными значениями углового момента при условии, что нижний уровень — основной, а режим релаксации — радиационный.

Представленное исследование спектров поляризационно-комбинационного рассеяния перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  относится по своему типу к рассеянию на переходе  $b \rightarrow l$  (см. рис. 1) для невырожденных состояний, которое исследовалось в [45]. Выражения (84) и (89) согласуются с результатами работы [45].



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развит аппарат для описания процессов невырожденного резонансного рассеяния монохроматической электромагнитной волны произвольного поляризационного состава. Получены выражения для описания спектров резонансной флуоресценции, коэффициентов поглощения (усиления) рассеянных фотонов, их направленного вперед четырехволнового взаимодействия. Развита аппарат для расчета поляризационно-спектральных характеристик поглощения и испускания излучения на переходах между лазерно-связанным и другими состояниями. Этот результат обобщает описание, развитое в работе [45].

Показано, что в общем случае динамика рассеянного излучения, сопровождающего распространение электромагнитной волны, определяется системой из 36 уравнений. При описании рассеяния излучения на большие углы, когда процессы направленного вперед четырехволнового смещения становятся несущественными, эта система сокращается до 9 уравнений.

В оптически тонкой среде характеристики рассеянного излучения определяются резонансной флуоресценцией атомов. В работе исследованы поляризационные, спектральные и угловые характеристики резонансной флуоресценции. Хорошо известно, что если нижний уровень является основным, то в спектре рассеяния содержится и рэлеевская (упругая), и смещенная (неупругая) компоненты. Получены явные выражения для упругой компоненты, включающие интерференционные эффекты между фотонами флуоресценции различной поляризации. В работе учитывается возможное влияние на атомы постоянного магнитного поля. Получены выражения для описания деполаризации излучения (эффекта Ханле) в магнитном поле при рассеянии электромагнитной волны произвольной интенсивности. Получены выражения, позволяющие описывать спектральные свойства сигнала Ханле и его полную интенсивность, которые обобщают полученные ранее результаты в некоторых частных случаях [15, 16, 36].

В общем случае динамика лазерно-связанного перехода (с произвольными  $J$ ) определяется набором конфигураций переходов между двухуровневыми и трехуровневыми системами  $V$ - и  $\Lambda$ -типов (см. рис. 4). Для исследования свойства рассеяния излучения системами  $\Lambda$ -типа в работе изучались свойства перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$ . Исследование нелинейного эффекта Фарадея для этого перехода показало, что форма линии угла вращения плоскости поляризации волны накачки качественно и количественно по параметру  $I_L/I_{sat}$  (здесь  $I_{sat}$  — интенсивность насыщения) совпадает с результатами для перехода  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$ . Это дает основание полагать, что результаты, полученные для этих переходов, могут быть обобщены на переходы с произвольными значениями углового момента (в рамках дипольного приближения). Для перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  исследовались спектры резонансной флуоресценции и свойства сигнала Ханле. Укажем на существенное различие в свойствах интерференционных эффектов для переходов  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  и  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$ . Это различие связано с тем, что при рассеянии волн различной поляризации на переходе  $J_a = 0 \rightarrow J_b = 1$  атомная система в конечном итоге приходит в одно состояние, а на переходе  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  — в разные. При этом в первом случае имеют место значительные интерференционные эффекты, а во втором случае — лишь спектральные нелинейные. Для полного сигнала (интеграла по спектру) эти эффекты вообще отсутствуют, так как по законам квантовой механики интерференционные явления имеют место лишь для процессов с одинаковыми конечными состояниями.

Укажем, что в модельном исследовании спектров резонансной флуоресценции перехода  $J_a = 1 \rightarrow J_b = 0$  с основным нижним состоянием и радиационным режимом релаксации при возбуждении излучением с фиксированной  $\sigma$ -поляризацией была обнаружена особенность в спонтанном излучении  $\sigma$ -поляризации ( $\sigma' \neq \sigma$ ). Эта особенность проявляется для слабых полей  $I_{L\sigma} \ll I_{sat}$ : имеет место сужение спектральной линии испускания, которая становится почти  $\delta$ -функцией. При этом спектральная плотность рассеянной  $\sigma'$ -компоненты пропорциональна  $I_{L\sigma}^2$ . Этот результат верен для переходов с произвольными значениями углового момента.

Развитое в работе описание не учитывает теплового движения атомов, т. е. результаты справедливы, когда доплеровское уширение много меньше уширений, обусловленных другими явлениями. Значительное тепловое движение атомов приводит не только к изменению спектров поглощения (усиления) и испускания атомов, но и делает их существенно анизотропными относительно направления распространения волны накачки. Формальное кинематическое обобщение на случай теплового движения атомов не представляет труда. Однако корректный учет изменения числа частиц с фиксированным значением скорости вследствие столкновений, фотовозбуждения и т. д. [17, 32] требует отдельного рассмотрения и тщательного исследования.

В данной работе предполагалось, что волна накачки может иметь произвольную интенсивность. При этом не учитывалось изменение релаксационных констант вследствие влияния сильного поля (см., например, [46]). Учет этого явления может быть существенным для распространения излучения в оптически плотных средах, когда определяющими становятся вынужденные процессы, так как при этом в определенной области параметров могут значительно модифицироваться спектры поглощения (усиления) и четырехволнового взаимодействия [47–49]. На спектры резонансной флуоресценции изменение релаксационных констант атома в сильном поле влияет значительно меньше [47]. Возможно, это явление будет существенно влиять на интерференционные эффекты, однако это требует отдельного исследования.

Автор выражает благодарность А. Н. Старостину, Ф. А. Ломая, Д. И. Чехову за полезные обсуждения и интерес к работе, а также Н. И. Курчатовой за помощь в оформлении статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17390).

## Литература

1. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, ЖЭТФ **41**, 456 (1961).
2. B. R. Mollow, Progress in Optics XIX, 3 (1981).
3. B. R. Mollow, Phys. Rev. A **5**, 2217 (1972).
4. F. Y. Wu, S. Ezekiel, M. Ducloy, and B. R. Mollow, Phys. Rev. Lett. **38**, 1077 (1977).
5. W. Harting, W. Rasmussen, R. Shieder, and H. Walther, Z. Phys. A **278**, 205 (1976).
6. Y. Zhu, O. Wu, A. Lezama, D. J. Gauthier, and T. W. Mossberg, Phys. Rev. A **41**, 6574 (1990).
7. G. S. Agarwal, Y. Zhu, D. J. Gauthier, and T. W. Mossberg, JOSA B **8**, 1163 (1991).
8. J. Cooper, R. J. Ballagh, and K. Burnet, Phys. Rev. A **22**, 535 (1980).
9. P. D. Kleiber, K. Burnet, and J. Cooper, Phys. Rev. Lett. **47**, 1595 (1981).
10. А. Г. Леонов, А. А. Пантелеев, А. Н. Старостин, Д. И. Чехов, ЖЭТФ **105**, 1536 (1994).

11. D. V. Gaidarenko, A. G. Leonov, A. A. Panteleev, A. N. Starostin, and D. I. Chehov, *Laser Physics* **3**, 151 (1993).
12. M. Trippenbach, B. Gao, and J. Cooper, *Phys. Rev. A* **45**, 6555 (1992).
13. B. R. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
14. А. А. Пантелеев, *ЖЭТФ* **99**, 1684 (1991).
15. Ф. А. Ломая, А. А. Пантелеев, *ЖЭТФ* **103**, 1970 (1993).
16. Ф. А. Ломая, А. А. Пантелеев, *ЖЭТФ* **106**, 886 (1994), **108**, 23 (1995).
17. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. И. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).
18. M. Sargent III, D. A. Holm, and M. S. Zubary, *Phys. Rev. A* **31**, 3112 (1985).
19. S. Stenholm, D. A. Holm, and M. Sargent III, *ibid.* 3124.
20. D. A. Holm and M. Sargent III, *Phys. Rev. A* **35**, 2150 (1987).
21. M. D. Reid and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **34**, 4929 (1986).
22. R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985).
23. А. А. Пантелеев, В. А. Росляков, А. Н. Старостин, М. Д. Таран, *ЖЭТФ* **97**, 1777 (1990).
24. M. Lax, *Phys. Rev.* **129**, 2342 (1963).
25. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1515 (1964).
26. H. R. Zaidi, *Can. J. Phys.* **59**, 737 (1981).
27. H. Haken, *Handbuch der Physik*, Springer-Verlag, Berlin (1970), Vol. XXV/2c.
28. M. O. Scully and W. E. Lamb Jr., *Phys. Rev.* **159**, 208 (1967).
29. Е. В. Бакланов, *ЖЭТФ* **65**, 2203 (1973).
30. Д. А. Варшалавич, А. П. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
31. К. Блум, *Теория матрицы плотности*, Мир, Москва (1983).
32. A. Omont, *Prog. Quant. Electr.* **5**, 69 (1977).
33. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
34. D. F. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983).
35. *Z. Phys. D* **18**(1) (1991) (спец. выпуск посвященный 90-летию В. Ханле).
36. P. Avan and C. Cohen-Tannoudji, *J. de Phys. Lett.* **36**, L85 (1975).
37. B. Gao, *Phys. Rev. A* **50**, 4139 (1994).
38. Е. Б. Александров, Г. И. Хвостенко, М. П. Чайка, *Интерференция вырожденных атомных состояний*, Наука, Москва (1991).
39. О. Э. Бувевич, А. Ф. Григорьев, А. Ф. Семерок, В. А. Фирсов, *Письма в ЖЭТФ* **45**, 322 (1987).
40. *J. Opt. Soc. Amer.: B* **7**(6) (1990) (спец. выпуск, посвященный поперечным эффектам в нелинейно-оптических системах).
41. J. F. Valley, G. Khitrova, H. M. Gibbs, J. W. Grantham, and Xu Jiajin, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2362 (1990).
42. А. Н. Старостин, А. А. Пантелеев, В. И. Лебедев, С. В. Ротин, А. Г. Леонов, Д. И. Чехов, *ЖЭТФ* **108**, 1203 (1995).
43. P. Junger, A. Lindberg, and B. Stahlberg, *Phys. Rev. A* **48**, 1369 (1993).
44. А. А. Пантелеев, Препринт ТРИНИТИ, Москва (1996).
45. B. R. Mollow, *Phys. Rev. A* **8**, 1949 (1973).
46. Э. Г. Пестов, *Труды ФИАН* **187**, 60 (1988).
47. А. А. Пантелеев, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **106**, 1606 (1994).
48. Э. Г. Пестов, *Краткие сообщения по физике ФИАН* № 12, 20 (1989).
49. А. Н. Ораевский, Э. Г. Пестов, *КЭ* **16**, 1422 (1989).