*ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 2, стр. 478–495* 

# АНОМАЛЬНАЯ КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ МОЩНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*В. П. Силин*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
*117333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 июня 1996 г.

Для плазмы в поле интенсивного излучения, когда амплитуда осцилляций электрона в электромагнитном поле превышает тепловую скорость, получены уравнения переноса девятимоментного приближения. Показано, что для плазмы с высокой кратностью ионизации $Z$ коэффициент электронной теплопроводности возрастает в $Z$ раз. Показано, что видоизменение под действием поля излучения силы трения электронов при их столкновениях с ионами приводит к возможности ускорения электронов и к изменению знака статической и низкочастотной электропроводностей.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие техники короткоимпульсных лазеров [1] сделало актуальным развитие кинетики плазмы в поле мощного электромагнитного излучения не только применительно к области СВЧ частот, но и применительно к области частот лазерного излучения. При этом можно считать недостаточно развитой столкновительную кинетику полностью ионизованной плазмы, в которой мощное излучение поглощается электронами благодаря их столкновениям с ионами или, как еще говорят, благодаря эффекту обратного тормозного поглощения [2]. Обычно, когда мощность излучения невелика, кинетические коэффициенты, характеризующие свойства плазмы, от электромагнитного поля не зависят (см., например, [3, 4]), а вклад излучения в неравновесные потоки определяется разложением в ряд по степеням билинейных комбинаций напряженности поля излучения [5]. Такое положение реализуется тогда, когда тепловая скорость электрона $v_T$ существенно превышает амплитуду $v_E$ скорости его осцилляций в поле электромагнитного излучения. В случае ионов плазмы с высокой кратностью ионизации,

$$Z = |e_i/e|, \tag{1.1}$$

условие применимости такой обычной теории оказывается более жестким,

$$Zv_E^2 \ll v_T^2, \tag{1.2}$$

ибо в противном случае распределение электронов оказывается весьма существенно отличающимся от максвелловского, что теоретически было предсказано в [6] (см. также [7, 8]), а экспериментально подтверждено в [9]. Причина такого отличия распределения от максвелловского заключается в том, что в условиях нарушения неравенства (1.2), когда

$$Zv_E^2 > v_T^2 > v_E^2, \tag{1.3}$$

электрон-электронные столкновения оказываются сравнительно редкими, и распределение электронов не успевает релаксировать к максвелловскому. Определенные шаги на пути построения теории переноса в условиях (1.3) делались в работе [10] в рамках локальной теории, а в работе [11] в рамках нелокального рассмотрения теплопереноса. В то же время отметим автомодельное пространственно-неоднородное и нестационарное распределение работы [12], аналитически полученное в области параметров (1.3), которое существенно отличается от известного распределения работы [7] в области больших скоростей электронов, что может привести к важным следствиям.

С ростом интенсивности греющего плазму излучения, когда правая часть неравенства (1.3) нарушается, возникает подавление электрон-ионных столкновений, ибо частота таких столкновений убывает как $v_E^{-3}$ [13]. Однако при условии

$$Zv_T > v_E > v_T, \tag{1.4}$$

как это показано в работе [14], распределение электронов греющейся плазмы оказывается не только нестационарным, но и анизотропным.

Нас будет интересовать область еще больших полей, когда[1)]

$$v_E > Zv_T. \tag{1.5}$$

При этом условии электрон-ионные столкновения настолько сильно подавлены по сравнению с электрон-электронными, что можно использовать распределение Максвелла для электронов. Именно так и было принято в теории нелинейной высокочастотной проводимости плазмы [13] при условиях (1.5). Результаты работы [13] во многом подтвердились, что вызвало большое число последователей, среди которых авторы [15, 16]. Значительное внимание уделялось модификации кулоновского логарифма, определяющего электрон-ионные столкновения. Определенный итог таких исследований подведен в работе [17], где выявлены условия для проявления различных эффектов, описываемых кулоновским логарифмом. Это обсуждается также и в работе [18], в которой рассмотрено важное свойство плазмы в поле интенсивного излучения, каким является релаксация температур электронов и ионов, при условии (1.5). При этом, в частности, рассмотрен и нагрев электронов благодаря поглощению интенсивного излучения. В отношении других процессов переноса в полностью ионизованной плазме, находящейся в поле мощного высокочастотного излучения, частота которого значительно превышает частоту электронных столкновений, теория пока недостаточно разработана. В настоящем сообщении мы восполняем такой пробел. При этом мы воспользуемся методом моментов Греда (см., например, [19]). Подчеркнем также, что основания кинетики плазмы в интересующем нас случае быстропеременных процессов заложены в работах [20, 21] (см. также [19]).

Во втором разделе выведено основное кинетическое уравнение для усредненной по периоду высокочастотного поля излучения электронной функции распределения, позволяющее строить теорию медленных процессов переноса. В третьем разделе записаны уравнения переноса девятимоментного приближения метода Греда. В четвертом разделе

---

[1)] Условие (1.5) выполняется, если плотность потока энергии излучения $q_R = cE^2/4\pi$ удовлетворяет условию $\lambda^2 q_R > Z^2(\pi mc^3/e^2)\kappa_B T$, где $\lambda$ — длина волны излучения. Если измерять температуру электронов в электронвольтах ($\kappa_B T = \Theta_e$), длину волны в микронах, а плотность потока энергии излучения в Вт/см$^2$, то это условие сводится к $\lambda^2$ [мкм] $q_2$[Вт/см$^2$] $\geq Z^2\Theta_e$[эВ] $\cdot 10^{13}$.

сформулирован приближенный, реализующийся при условии (1.5) подход, позволяющий последовательно и сравнительно просто описать влияние электрон-ионных столкновений. Показано, что как сила трения, так и зависимость выделяющегося в плазме тепла, обусловленного упорядоченным движением электронов, определяются тензором эффективной частоты столкновений. В пятом разделе показано, что анизотропия воздействия излучения на плазму, характеризующаяся его поляризацией, проявляется в том, что сила трения может приводить не только к торможению электронов, но и к их ускорению. Такое ускорение может быть причиной спонтанной генерации токов (а потому и магнитных полей), а также причиной генерации токов, индуцированных квазистатическим электрическим полем и градиентом давления. Шестой раздел посвящен аномалии статической и низкочастотной проводимостей, которая в направлениях плоскости перпендикулярной лучу излучения оказывается отрицательной. Это явление подобно высокочастотной аномалии, предсказанной в работах [22–24]. В седьмом разделе показано, что благодаря подавлению электрон-ионных столкновений при условии (1.5) электронная теплопроводность под действием мощного излучения возрастает примерно в $Z$ раз.

В Приложении 1 даны необходимые формулы, характеризующие зависимость средних по периоду осцилляций поля излучения от его поляризации, а в Приложении 2 для расширения основного материала статьи в случае круговой поляризации излучения дан детальный вывод полученной в [24] закономерности перехода от излучения малой мощности к пределу большой мощности. Наконец, восьмой раздел статьи подводит итоги.

## 2. ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем рассматривать полностью ионизованную плазму в высокочастотном электромагнитном поле:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}\right], \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}\right]. \tag{2.2}$$

Здесь амплитуды напряженности электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и магнитного $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ полей являются слабо изменяющимися функциями времени за период $2\pi/\omega$ высокочастотного поля. Последнее с помощью уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

позволяет записать следующую приближенную формулу:

$$\mathbf{B} = \frac{c}{i\omega}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \frac{c}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\frac{e}{m}\left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{2}\left\{\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*e^{i\omega t}\right\} + \right.$$

$$+\frac{1}{2i\omega}\left[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}e^{-i\omega t}-\mathbf{E}^*e^{i\omega t}\right)\right]-\frac{1}{\omega^2}\left[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}e^{-i\omega t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}e^{i\omega t}\right)\right]\Bigg)=J_{ee}[f,f]+J_{ei}[f,f]. \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ — квазистатическое или низкочастотное электрическое поле, $e$ и $m$ — заряд и масса электрона, $J_{ee}$ и $J_{ei}$ — интегралы столкновений соответственно электронов с электронами и электронов с ионами.

Под влиянием высокочастотного поля распределение электронов оказывается быстро изменяющимся во времени и анизотропным, поскольку такое поле приводит к быстрым осцилляциям электронов со скоростью

$$\mathbf{u}_E(t)=\frac{ei}{2m\omega}\left\{\mathbf{E}e^{-i\omega t}-\mathbf{E}^*e^{i\omega t}\right\}. \tag{2.6}$$

В этой связи удобно использовать новую функцию

$$F(\mathbf{u},\mathbf{r},t)=f(\mathbf{v},\mathbf{r},t), \tag{2.7}$$

где

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{u}_E(t). \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7) и (2.8) позволяют преобразовать кинетическое уравнение (2.7) к следующему:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\mathbf{u}\frac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}+\left(\frac{e}{m}\mathbf{E}_0-\frac{e^2}{4m^2\omega^2}\frac{\partial|\mathbf{E}|^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}+$$
$$+e^{-i\omega t}\frac{e}{2m\omega i}\left\{-\mathbf{E}\frac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{u}\mathbf{E})-\frac{i}{\omega}\left[\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]\right)\right\}+$$
$$+e^{i\omega t}\frac{e}{2m\omega i}\left\{\mathbf{E}^*\frac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}-\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}\left(\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{u}\mathbf{E}^*)+\frac{i}{\omega}\left[\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}\right]\right)\right\}+$$
$$+e^{-2i\omega t}\frac{e^2}{4m^2\omega^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{E})^2}{\partial\mathbf{r}}-\frac{i}{\omega}\left[\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]\right\}\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}+$$
$$+e^{2i\omega t}\frac{e^2}{4m^2\omega^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{E}^*)^2}{\partial\mathbf{r}}+\frac{i}{\omega}\left[\mathbf{E}^*\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}\right]\right\}\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}=$$
$$=J_{ei}\left[\mathbf{u}+\mathbf{u}_E(t),F(\mathbf{u})\right]+J_{ee}\left[F(\mathbf{u}),F(\mathbf{u})\right]. \tag{2.9}$$

Подчеркнем, что так как электрон-электронный интеграл столкновений зависит от относительной скорости двух сталкивающихся электронов, то преобразование (2.8) не вносит в $J_{ee}$ зависимости от высокочастотного поля. Напротив, электрон-ионный интеграл столкновений в (2.9) зависит от $\mathbf{u}_E(t)$.

Из уравнения (2.9) можно видеть, что если амплитуда осцилляций в высокочастотном поле $a_E = eE/m\omega^2$ достаточно мала по сравнению с масштабами неоднородности поля $L_E$ и распределения электронов $L$, то можно получить сравнительно простое уравнение для усредненной по периоду быстрых осцилляций функции распределения $\langle F\rangle = F_0$. При этом будем считать также выполненными неравенства (ср. [13])

$$\frac{u}{\omega L}\ll 1,\quad \frac{eE_0}{m\omega u}\ll 1,\quad \frac{u_E a_E}{L_E u}\ll 1. \tag{2.10}$$

Тогда при усреднении уравнения (2.9) можно пренебречь вкладом гармоник функции $F$. В результате получаем

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 - \frac{e^2}{4m^2\omega^2}\frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{u}} = \\ = \langle J_{ei}\left[\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t), F_0(\mathbf{u})\right]\rangle + J_{ee}\left[F_0(\mathbf{u}), F_0(\mathbf{u})\right]. \tag{2.11}$$

Это уравнение используем ниже для выяснения того своеобразия переноса в плазме, которое обусловлено сильным высокочастотным электромагнитным полем.

## 3. ДЕВЯТИМОМЕНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Воспользуемся далее методом Греда, когда в девятимоментном приближении функция распределения может быть представлена в виде (ср. [19])

$$F_0(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t) = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{(2\pi)^{3/2} v_T^3} \exp\left\{-\frac{m\left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right]^2}{2\kappa_B T(\mathbf{r}, t)}\right\} \times \\ \times \left\{1 - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) m \left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right]}{n(\mathbf{r}, t)\left[\kappa_B T(\mathbf{r}, t)\right]^2}\left(1 - \frac{m\left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right]^2}{5\kappa_B T(\mathbf{r}, t)}\right)\right\}. \tag{3.1}$$

Здесь $\kappa_B$ — постоянная Больцмана, $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность числа электронов, $\mathbf{u}^e$ и $T(\mathbf{r}, t)$ — средняя скорость электронов и их температура:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n}\int d\mathbf{u}\,\mathbf{u} F_0, \quad T(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{3\kappa_B n}\int d\mathbf{u}\frac{m}{2}\left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right]^2 F_0, \tag{3.2}$$

$v_T = \sqrt{\kappa_B T/m}$ — тепловая скорость электронов, а плотность теплового потока электронов определена формулой

$$\mathbf{q} = \int d\mathbf{u}\left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right] \cdot \frac{1}{2} m \left[\mathbf{u} - \mathbf{u}^e(\mathbf{r}, t)\right]^2 F_0(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t). \tag{3.3}$$

Кинетическое уравнение (2.11) дает следующую систему уравнений переноса[2)]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{u}^e) = 0, \tag{3.4}$$

$$mn\left(\frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial t} + \left(\mathbf{u}^e\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}^e\right) + \frac{\partial n\kappa_B T}{\partial \mathbf{r}} - n\left(e\mathbf{E}_0 - \frac{e^2}{4m\omega^2}\frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial \mathbf{r}}\right) = \mathbf{R}^{ei}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}^e\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{3}T\operatorname{div}\mathbf{u}^e + \frac{2}{3n\kappa_B}\operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{2}{3n\kappa_B}Q^{ei}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \left(\mathbf{u}^e\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{q} + \frac{1}{5}\left(7\mathbf{q}\operatorname{div}\mathbf{u}^e + 7\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}^e + 2\mathbf{q}_s\frac{\partial \mathbf{u}^e_s}{\partial \mathbf{r}}\right) + \\ + \frac{5}{2}\frac{n\kappa_B T}{m}\frac{\partial \kappa_B T}{\partial \mathbf{r}} = \Delta\mathbf{Q}_{ee} + \Delta\mathbf{Q}_{ei} - \frac{5\kappa_B T}{2m}\mathbf{R}^{ei}. \tag{3.7}$$

---

[2)] В формуле (3.7) по повторяющемуся индексу $s$ проводится суммирование.

Здесь по обычной терминологии метода Греда сила трения

$$\mathbf{R}^{ei} = \int d\mathbf{u}\, m(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e) \left\langle J_{ei} \left[\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t), F_0(\mathbf{u})\right] \right\rangle , \tag{3.8}$$

тепло, выделяющееся в электронной компоненте за счет столкновений с ионами,

$$Q^{ei} = \int d\mathbf{u} \cdot \frac{1}{2} m(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e)^2 \left\langle J_{ei} \left[\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t), F_0(\mathbf{u})\right] \right\rangle \tag{3.9}$$

и, наконец,

$$\Delta\mathbf{Q}_{ee} = \int d\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e) \cdot \frac{1}{2} m(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e)^2 J_{ee}[F_0, F_0], \tag{3.10}$$

$$\Delta\mathbf{Q}_{ei} = \int d\mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e) \cdot \frac{1}{2} m(\mathbf{u} - \mathbf{u}^e)^2 \left\langle J_{ei} \left[\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t), F_0(\mathbf{u})\right] \right\rangle . \tag{3.11}$$

Ниже мы установим вид выражений (3.8)–(3.11), что сделает систему уравнений переноса (3.4)–(3.7) замкнутой. Будут получены сведения о том качественном изменении электронного переноса, которое возникает под действием электромагнитного поля мощного излучения.

## 4. ЭЛЕКТРОН-ИОННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Интеграл столкновений электронов с ионами в поле излучения в рамках классической механики был получен в работах [20, 21] (см. также [13]). Необходимое квантовое рассмотрение проведено в [17]. Следует подчеркнуть, что работы [17, 13] показали, что в кинетике плазмы в поле мощного излучения можно использовать интеграл столкновений Ландау с необходимым уточнением выражения для кулоновского логарифма $\Lambda_{ei}$. Именно интегралом столкновений Ландау мы и воспользуемся ниже, отсылая читателя к работам [17, 13] для установления вида кулоновского логарифма, который в разреженной плазме всегда велик по сравнению с единицей.

Далее не будем интересоваться малыми порядка отношения масс электрона и иона, имея в виду работу [18] по изучению релаксации температур компонент плазмы, находящейся в поле мощного излучения. Тогда (ср. [19])

$$J_{ei} \left[\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t), F(\mathbf{u})\right] = \frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m^2} \frac{\partial}{\partial u_k} D_{kj} \left(\mathbf{u} + \mathbf{u}_E(t)\right) \frac{\partial F}{\partial u_j}, \tag{4.1}$$

где

$$D_{kj}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_E) = \left\{ (\mathbf{u} + \mathbf{u}_E)^2 \delta_{kj} - (\mathbf{u} + \mathbf{u}_E)_k (\mathbf{u} + \mathbf{u}_E)_j \right\} |\mathbf{u} + \mathbf{u}_E|^{-3}. \tag{4.2}$$

Для простоты, а в то же время и общности изложения откажемся от рассмотрения частного случая плоской поляризации излучения, при котором скорость осцилляций электрона $\mathbf{u}_E(t)$ может обращаться в нуль, и рассмотрим эллиптически поляризованное излучение. При этом будем считать, что минимальное значение скорости $u_E(t)$ велико по сравнению с тепловой скоростью электронов. Это позволяет разложить (4.2) по степеням $u_E^{-1}$:

$$D_{lj} = u_E^{-3} \left\{ u_E^2 \delta_{lj} - u_{El} u_{Ej} + \left[ -3(\mathbf{u}_E \mathbf{u}) u_E^{-2} (\delta_{lj} u_E^2 - u_{El} u_{Ej}) + \right. \right.$$
$$\left. + 2(\mathbf{u}_E \mathbf{u}) \delta_{lj} - u_{El} u_j - u_{Ej} u_l \right] + u^2 \delta_{lj} - u_l u_j - 6(\mathbf{u}_E \mathbf{u})^2 u_E^{-2} \delta_{lj} +$$
$$+ 3u_{El} u_j (\mathbf{u}_E \mathbf{u}) u_E^{-2} + 3u_{Ej} u_l (\mathbf{u}_E \mathbf{u}) u_E^{-2} - \frac{3}{2} u^2 u_E^{-2} \times$$
$$\left. \times \, (\delta_{lj} u_E^2 - u_{El} u_{Ej}) + \frac{15}{2} (\mathbf{u}_E \mathbf{u})^2 u_E^{-4} (\delta_{lj} u_E^2 - u_{El} u_{Ej}) + \ldots \right\}. \tag{4.3}$$

Используем приближение (4.3) для нахождения силы трения. Имея в виду (4.1)–(4.3), можно записать (3.8) в следующем виде:

$$(\mathbf{R}^{ei})_k = \frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m} \int d\mathbf{u}\, F_0 \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j} D_{kj} \right\rangle, \tag{4.4}$$

где согласно (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial u_j} D_{kj} = \frac{1}{u_E^3} \left\{ -2u_{Ek} - 2u_k + 6 \frac{u_{Ek} u_{Ej}}{u_E^2} u_j \right\}. \tag{4.5}$$

В соответствии с разложением Фурье (П.1.4)

$$\langle u_{El}/u_E^3 \rangle = 0, \quad \langle u_{El} u_{Ej} u_{Ei}/u_E^5 \rangle = 0. \tag{4.6}$$

Поэтому в соответствии с (3.1) сила трения может быть представлена в виде

$$(\mathbf{R}^{ei})_k = -mn\nu_{kj} u_j^e, \tag{4.7}$$

где

$$\nu_{kj} = \frac{4\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m^2} \left\{ \left\langle \frac{1}{u_E^3(t)} \right\rangle \delta_{kj} - 3 \left\langle \frac{u_{Ek}(t) u_{Ej}(t)}{u_E^5(t)} \right\rangle \right\} \tag{4.8}$$

— тензор эффективной частоты столкновений электронов и ионов. Ниже мы рассмотрим своеобразные свойства этого тензора, определяющиеся поляризацией излучения, которые можно ожидать уже из-за того, что след тензора (4.8) равен нулю.

Обратимся теперь к рассмотрению тепла $Q^{ei}$, выделяющегося при столкновениях электронов и ионов. В соответствии с формулой (4.1) формула (3.9) принимает вид

$$Q^{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m} \int d\mathbf{u}\, F_0 \left\langle D_{jj} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^e)_k \frac{\partial D_{kj}}{\partial u_j} \right\rangle. \tag{4.9}$$

В приближении (4.3) имеем

$$D_{jj} = \frac{2}{u_E} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}_E}{u_E^3} - \frac{u^2}{u_E^3} + 3\frac{(\mathbf{u}_E \mathbf{u})^2}{u_E^5}. \tag{4.10}$$

Это выражение, а также (4.5) при учете (4.6) в девятимоментном приближении (3.1) позволяет получить

$$Q^{ei} = Q_{IB} + \frac{1}{2} \mathbf{R}^{ei} \mathbf{u}^e, \tag{4.11}$$

где первое слагаемое

$$Q_{IB} = \frac{4\pi e^2 e_i^2 n n_i \Lambda_{ei}}{m} \left\langle \frac{1}{u_E} \right\rangle \tag{4.12}$$

представляет собой тепло, выделяющееся благодаря эффекту обратного тормозного поглощения в пренебрежении упорядоченным движением электронов. Второе слагаемое имеет происхождение, связанное, во-первых, с работой силы трения $-\mathbf{u}^e\mathbf{R}^{ei}$, как это обычно бывает в плазме и без мощного излучения, а во-вторых, с влиянием упорядоченного движения электронов на обратное тормозное поглощение $(3/2)\mathbf{u}^e\mathbf{R}^{ei}$.

Наконец, рассмотрим вклад электрон-ионных столкновений в правую часть уравнения (3.7). Выражение (3.11) в приближении (4.3) сводится к следующему:

$$(\Delta\mathbf{Q}_{ei})_j = \frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m^2} \int d\mathbf{u}\, F_0 m \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}^e)^2 \frac{\partial\langle D_{jk}\rangle}{\partial u_k} + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{u}-\mathbf{u}^e)_k(\mathbf{u}-\mathbf{u}^e)_j \frac{\partial\langle D_{kl}\rangle}{\partial u_l} + (\mathbf{u}-\mathbf{u}^e)_j\langle D_{ll}\rangle + 2(\mathbf{u}-\mathbf{u}^e)_k\langle D_{jk}\rangle \right\}. \tag{4.13}$$

Используя явные выражения (4.3), (4.5), (4.9), получаем

$$(\Delta\mathbf{Q}_{ei})_j = -\frac{1}{2}\nu_{jk}\left\{11 n\kappa_B T u_k^e + \frac{34}{5}q_k\right\}. \tag{4.14}$$

Вклад в правую часть уравнения (3.7), обусловленный электрон-ионными столкновениями, принимает вид

$$(\Delta\mathbf{Q}_{ei})_j - \frac{5\kappa_B T}{2m}(\mathbf{R}^{ei})_j = -\nu_{jk}\left(3n\kappa_B T u_k^e + \frac{17}{5}q_k\right). \tag{4.15}$$

Далее получим некоторые физические следствия полученных здесь соотношений.

## 5. ГЕНЕРАЦИЯ ТОКОВ УСКОРЯЕМЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Полученные в Приложении 1 соотношения позволяют представить тензор (4.9) эффективной частоты столкновений электронов и ионов в виде

$$\nu_{lj} = \nu(E)N_{lj}, \tag{5.1}$$

где тензор $N_{lj}$ определен формулами (П.1.9), а

$$\nu(E) = 8\sqrt{2}\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei} m^{-2} v_E^{-3}, \tag{5.2}$$

где $v_E^2 = (e^2E^2/m^2\omega^2)$. По порядку величины эффективная частота (5.2) в $(v_E/v_T)^3$ раз меньше обычной частоты столкновений электронов с ионами в отсутствие мощного излучения [13]. Согласно (П.1.10) для случая циркулярно поляризованного излучения сила трения (4.7) принимает вид

$$\mathbf{R}^{ei} = (R_x^{ei}, R_y^{ei}, R_z^{ei}) = -mn\nu(E)\left(-\frac{1}{2}u_x^e, -\frac{1}{2}u_y^e, u_z^e\right). \tag{5.3}$$

Если $z$-компонента этой формулы отвечает уменьшению усредненной $z$-компоненты скорости, то две другие компоненты формулы (5.3) отвечают ускорению электронов, обусловленному работой, совершаемой полем мощного излучения.

Подобная ситуация имеет место в другом предельном случае поляризации близкой к плоской. Так, в случае (П.1.13)

$$\mathbf{R}^{ei} = -mn\nu(E)(N_{xx}u_x^e, N_{yy}u_y^e, N_{zz}u_z^e). \tag{5.4}$$

Поскольку согласно (П.1.3) приближенно

$$N_{zz} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{E^2}{E_y^2} = -N_{yy}, \quad N_{xx} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \ln\frac{4E}{E_y}, \tag{5.5}$$

во-первых, эффективная частота столкновений оказывается много больше той, которая возникает в случае круговой поляризации, ибо $E \gg E_y$, а во-вторых, электроны тормозятся, как и в случае круговой поляризации, вдоль оси $z$, а вдоль двух других осей они ускоряются. Действительно, если в уравнении (3.5) пренебречь пространственной неоднородностью и медленно меняющимся электрическим полем, то в соответствии с (5.1) получим

$$\frac{du_k^e}{dt} = -\nu(E)N_{kj}u_j^e. \tag{5.6}$$

В случае (5.4), (5.5) ускорение наиболее интенсивно вдоль оси $y$, т. е. перпендикулярно плоскости поляризации. Тогда в предположении $E = \text{const}$ имеем

$$u_y^e(t) = u_y^e(0)\exp(t/t_{ac}), \tag{5.7}$$

где для характерного времени темпа ускорения получаем

$$t_{ac} = \pi\sqrt{2}\,E_y^2/E^2\nu(E). \tag{5.8}$$

Такое ускорение электронов ведет к генерации в плазме спонтанных токов мощным греющим излучением, а следовательно, и к генерации спонтанных магнитных полей.

Наличие в плазме квазистатического поля $\mathbf{E}_0$ (или градиента давления) делает процесс ускорения электронов при их столкновениях с ионами и одновременном поглощении мощного излучения вынужденным. При этом вместо уравнения (5.6) имеем

$$\frac{du_k^e}{dt} + \nu(E)N_{kj}u_j^e = \frac{e}{m}E_{0k}. \tag{5.9}$$

В случае (5.4), (5.5) и $E_0 = \text{const}$ для ускорения вдоль оси $y$ за время $t_0$ действия импульса мощного излучения получаем

$$u_y^e = \frac{eE_{0y}}{m}t_{ac}\left\{\exp\left(\frac{t_0}{t_{ac}}\right) - 1\right\}, \tag{5.10}$$

где время ускорения дается формулой (5.8).

В заключение этого раздела используем формулу (П.1.5), для того чтобы представить зависимость выделяемого в плазме тепла (4.1) от поляризации излучения:

$$Q_{IB} = \frac{8\sqrt{2}\,e^2e_i^2nn_i\Lambda_{ei}}{mv_E\sqrt{1+\rho^2}}\,\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right). \tag{5.11}$$

В случае излучения близкого к плоскополяризованному, когда $\rho^2$ близко к единице,

$$\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) \approx \frac{1}{4}\ln\left[\frac{32}{1-\rho^2}\right].$$

Возникающий при этом большой логарифм подобен выявленному в теории поглощения мощного излучения плоской поляризации [13, 15] и зависящему от отношения $v_T^2/v_E^2$. Соответствующее сравнение показывает, что приближение (4.3) пригодно тогда, когда $1-\rho^2 \gg v_T^2/v_E^2$. Подчеркнем, что в случае почти плоской поляризации время нагрева плазмы $\sim \left[\nu(E)\ln\left(E/E_y\right)\right]^{-1}$, что значительно превышает время ускорения (5.8).

## 6. АНОМАЛИЯ ПРОВОДИМОСТИ

Используем теперь уравнение (3.5) для определения статической проводимости. При этом пренебрежем инерциальным слагаемым. Тогда это уравнение дает

$$\mathbf{R}^{ei} = \frac{\partial n\kappa_B T}{\partial \mathbf{r}} - ne\mathbf{E}_{eff}, \tag{6.1}$$

где

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E}_0 - \frac{e}{4m\omega^2}\frac{\partial|\mathbf{E}|^2}{\partial \mathbf{r}}. \tag{6.2}$$

Для дальнейшего удобно использовать тензор $\tau_{kj}$ времени свободного пробега электрона относительно столкновений с ионами, определяемый соотношением

$$\tau_{kj}\nu_{kl} = \delta_{jl}. \tag{6.3}$$

В соответствии с формулой (5.1) и введенным в Приложении 1 тензором $T_{kj}$ можем записать

$$\tau_{kj} = \frac{1}{\nu(E)}T_{kj}. \tag{6.4}$$

Эти формулы позволяют получить из (4.7)

$$mnu_j^e = -\tau_{jk}R_k^{ei} = -\frac{1}{\nu(E)}T_{kj}R_k^{ei}. \tag{6.5}$$

Поскольку плотность электрического тока $\mathbf{j} = en\mathbf{u}^e$, из формул (6.1) и (6.5) получаем

$$j_i = \sigma_{ik}\left[\mathbf{E}_{eff} - \frac{1}{en}\frac{\partial n\kappa_B T}{\partial \mathbf{r}}\right]_k, \tag{6.6}$$

где тензор статической проводимости имеет вид

$$\sigma_{ik} = \frac{e^2 n}{m}\tau_{ik} = \frac{e^2 n}{m\nu(E)}T_{ik}. \tag{6.7}$$

В случае круговой поляризации излучения тензор $T_{ik}$ диагонален и $T_{xx} = T_{yy} = -2$, $T_{zz} = 1$. Это означает, что компонента тензора проводимости $\sigma_{zz}$ положительна и отвечает обычной диссипации. Напротив, в плоскости, перпендикулярной лучу греющего плазму излучения, компоненты тензора проводимости отрицательны. В случае близкой к плоской поляризации излучения компоненты тензора $T_{ik}$ даются формулами (П.1.14). В частном случае $\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$ и $E_y^2 \ll E_x^2$ тензор проводимости диагонален и

$$\sigma_{zz} = \frac{e^2 n\pi\sqrt{2}\,E_y^2}{m\nu(E)E_x^2} = -\sigma_{yy}, \quad \sigma_{xx} = -\frac{e^2 n\pi\sqrt{2}}{m\nu(E)\left[\ln(4E/E_y) - 1\right]}. \tag{6.8}$$

Здесь компоненты тензора проводимости, перпендикулярные лучу, снова отрицательны. Аномалия особенно сильна в направлении вектора электрического поля греющего плазму излучения.

Уравнение (3.5) может быть использовано и в случае переменного поля

$$E_0(t) = E_0 \exp(-i\omega_0 t). \tag{6.9}$$

В пренебрежении пространственной неоднородностью, когда $\mathbf{u}^e(t) = \mathbf{u}^e \exp(-i\omega_0 t)$, уравнение (3.5) дает

$$-i\omega_0 u_k^e + \nu(E) N_{kj} u_j^e = \frac{e}{m} E_{0k}. \tag{6.10}$$

В простейшем случае, когда тензор $N_{kj}$ диагонален, имеем $j_i = \sigma_{ii}(\omega_0)E_{0i}$. Здесь по индексу $i$ нет суммирования, а проводимость при частоте $\omega_0$ имеет вид

$$\sigma_{ii}(\omega_0) = \frac{e^2 n}{m} \frac{i\omega_0 + \nu(E)N_{ii}}{\omega_0^2 + [\nu(E)N_{ii}]^2}. \tag{6.11}$$

Отрицательные значения действительной части проводимости при $N_{ii} < 0$ отвечают возможности генерации и усиления переменного электрического поля под влиянием греющего плазму излучения большой мощности. Такое явление для высокочастотного переменного поля ($\omega_0 > \omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$) было предсказано в работах [22–24]. Если в формуле (6.11) принять $\omega_0 \gg \nu(E)N_{ii}$, то в частном случае излучения круговой поляризации и при использовании формул (П.2.5) получаем соответствующий результат работы [24].

## 7. МЕЖЭЛЕКТРОННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Обратимся теперь к рассмотрению вклада, обусловленного столкновениями электронов с электронами, в правую часть (3.7). Интеграл столкновений имеет вид

$$J_{ee}[F_0, F_0] = \frac{2\pi e^4 \Lambda_{ee}}{m^2} \frac{\partial}{\partial u_k} \int d\mathbf{u}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')^2 \delta_{kj} - (\mathbf{u} - \mathbf{u}')_k (\mathbf{u} - \mathbf{u}')_j}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \times$$
$$\times \left( \frac{\partial}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial u_j'} \right) F_0(\mathbf{u}) F_0(\mathbf{u}'). \tag{7.1}$$

Влиянием поля излучения на кулоновский логарифм $\Lambda_{ee}$ можно пренебречь. Простые вычисления (ср. [19]) дают

$$\Delta\mathbf{Q}_{ee} = -\frac{16}{15}\frac{v_T}{l_{ee}}\mathbf{q}, \tag{7.2}$$

где $l_{ee} = m^2 v_T^4/\sqrt{\pi}\, e^4 n \Lambda_{ee}$ — средняя длина свободного пробега электрона. Учитывая (4.14), получаем для правой части уравнения (3.7)

$$\left(\Delta\mathbf{Q}_{ee} - \frac{5\kappa_B T}{2m}\mathbf{R}^{ei} + \Delta\mathbf{Q}_{ei}\right)_j = \frac{3\kappa_B T}{m}\left(\mathbf{R}^{ei}\right)_j - \frac{16}{15}\frac{v_T}{l_{ee}}q_j - \frac{17}{5}\nu_{jk}q_k. \tag{7.3}$$

Таким образом, система уравнений девятимоментного приближения (3.4)–(3.7) замкнута. В настоящей статье последним слагаемым правой части (7.3) будем далее пренебрегать в силу $v_T/l_{ee} \gg |\nu_{jk}|$.

Определим с помощью уравнения (3.7) коэффициент теплопроводности. Для этого, как это обычно делается в методе моментов, пренебрежем в левой части уравнения (3.7) всеми слагаемыми, кроме последнего. Тогда получим

$$\mathbf{q} = -\frac{75}{32} n\kappa_B v_T l_{ee}\left\{\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{6}{5}\frac{\mathbf{R}^{ei}}{\kappa_B n}\right\}, \tag{7.4}$$

где $R^{ei}$ дается формулой (6.1). В простейшей ситуации, когда $\mathbf{u}^e = 0$, формула (7.4) дает закон Фика

$$\mathbf{q} = -\chi\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}, \tag{7.5}$$

где $\chi$ — коэффициент теплопроводности. Формуле (7.4) отвечает приближенное значение

$$\chi_1 = \frac{75}{32} n\kappa_B v_T l_{ee}. \tag{7.6}$$

В отсутствие мощного греющего плазму излучения то же девятимоментное приближение приводит к коэффициенту теплопроводности [19]

$$\chi_0 = \chi_1\left[1 + \frac{13Z}{4\sqrt{2}}\right]^{-1}. \tag{7.7}$$

Таким образом, для плазмы с ионами высокой кратности ионизации ($Z \gg 1$) воздействие на плазму поля мощного излучения увеличивает коэффициент теплопроводности примерно в $2Z$ раз.

Коэффициент теплопроводности $\chi_1$ совпадает с получаемым с помощью метода Гильберта–Чепмена–Энскога в приближении одного полинома Сонина–Лагерра. В приближении двух полиномов получаем

$$\chi_2 = \frac{375}{128}\frac{\kappa_B v_T^5 m^2}{\sqrt{\pi}\, e^4 \Lambda_{ee}}, \tag{7.8}$$

что на 25% превышает первое приближение.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в предыдущих разделах результаты кинетики полностью ионизованной плазмы в поле мощного электромагнитного излучения позволили получить уравнения обобщенной электронной гидродинамики девятимоментного приближения. Отметим здесь обнаруженные следствия такой гидродинамики. Прежде всего остановимся на следствиях формулы (4.11) для тепла, выделяющегося в плазме благодаря электрон-ионным столкновениям. Эта формула состоит, во-первых, из слагаемого (4.12), подобного тому, которое обсуждалось ранее для некоторых поляризаций излучения и которое отвечает обычному эффекту столкновительного поглощения. Во-вторых, формула (4.11) описывает вклад, определяющийся наличием упорядоченного усредненного движения электронов. Формальное отличие выражения, описывающего такой вклад, от соответствующего общего выражения для плазмы без поля мощного излучения состоит в обратном знаке и множителе (1/2) перед произведением $\mathbf{u}^e\mathbf{R}^{ei}$. Однако фактическое отличие более важно, ибо согласно (4.7) и (5.1) выражение может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{R}^{ei}\mathbf{u}^e = -\frac{1}{2}mnu_k^e\nu_{kj}u_j^e = -\frac{1}{2}\nu(E)mnu_k^eN_{kj}u_j^e. \tag{8.1}$$

Свойства тензора частоты электрон-ионных столкновений таковы, что в зависимости от ориентации скорости $\mathbf{u}^e$ усредненного движения электронов и поляризации излучения выражение (8.1) может быть как положительно, так и отрицательно. При этом в том случае, когда определяющая выражение (8.1) квадратичная форма

$$u_k^e\nu_{kj}u_j^e \tag{8.2}$$

является положительно определенной, имеем ситуацию, отвечающую обычной роли столкновений как причине диссипации. При этом вклад тепла (8.1) оказывается отрицательным. Это означает, что поправка (8.1) к поглощаемой плазмой плотности мощности (4.12) уменьшает полную поглощаемую мощность. Обратная ситуация имеет место тогда, когда квадратичная форма (8.2) может быть неположительно определенной.

Такая обратная ситуация обсуждена в пятом разделе. Зависимость знаков диагональных элементов тензора электрон-ионной частоты столкновений от поляризационных свойств излучения приводит, как показано в пятом разделе, к возможности столкновительного ускорения электронов под действием высокочастотного поля мощного излучения. Такое ускорение приводит как к спонтанной, так и вынужденной квазистатическим электрическим полем генерации токов в плазме. За время нагрева, при котором тепловая скорость электрона изменяется от $v_T(0)$ до величины порядка $v_E$, скорость электронов, ускоряемых благодаря наличию квазистатического электрического поля, может достигать величины порядка $(eE_0/m\nu(E))v_E/v_T(0)$. Выявленная возможность отрицательной частоты электрон-ионных столкновений проявляется в отрицательной электропроводности плазмы в режиме постоянного тока. В режиме переменного электрического поля отрицательная действительная часть комплексной электропроводности отвечает как усилению, так и генерации такого поля [22–24].

В отношении переноса тепла[3] выявлена закономерность, важная в практически интересном случае воздействия мощного излучения на плазму с высокой кратностью ионизации $Z$. При этом, поскольку мощное излучение подавляет электрон-ионные столкновения и практически не влияет на электрон-электронные, коэффициент электронной теплопроводности плазмы в поле интенсивного излучения увеличивается пропорционально $Z$.

Все обсуждаемые явления могут быть отнесены к непосредственному нелинейному проявлению обратного тормозного поглощения мощного электромагнитного излучения в кинетических свойствах плазмы.

Работа выполнена в рамках проекта № 96-02-17002-а Российского фонда фундаментальных исследований и частично поддержана программой «Оптика и лазерная физика».

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тепло, выделяющееся при электрон-ионных столкновениях, и сила трения определяются усредненными по периоду поля излучения выражениями

$$\left\langle \frac{1}{u(t)} \right\rangle \text{ и } \left\langle \frac{1}{u^3(t)} \right\rangle \delta_{kj} - \left\langle \frac{u_{Ek}(t) u_{Ej}(t)}{u_E^5(t)} \right\rangle . \tag{П.1.1}$$

Рассмотрим зависимость этих величин от поляризации греющего плазму излучения. Пусть $E = (E_x e^{i\varphi_x}, E_y e^{i\varphi_y}, 0)$, где $E_x$ и $E_y$ — действительные амплитуды, а разность $\varphi_x - \varphi_y$ определяет сдвиг фаз компонент поляризованного излучения. Тогда, обозначив $E_x = E\cos\alpha$, $E_y = E\sin\alpha$, можно записать

$$u_E(t) = \big(u_{Ex}(t), u_{Ey}(t), 0\big) ,$$

где

$$u_{Ex}(t) = v_E \cos\alpha \sin(\omega t - \varphi_x), \quad u_{Ey}(t) = v_E \sin\alpha \sin(\omega t - \varphi_y),$$

а $v_E^2 = (eE/m\omega)^2$. Соответственно этому можно записать

$$u_E^2(t) = \frac{1}{2} v_E^2 \left\{1 - \rho^2 \cos(\omega t - 2\psi)\right\} , \tag{П.1.2}$$

где

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\cos^2\alpha \sin 2\varphi_x + \sin^2\alpha \sin 2\varphi_y}{\cos^2\alpha \cos 2\varphi_x + \sin^2\alpha \cos 2\varphi_y}, \quad \rho^4 = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2(\varphi_x - \varphi_y). \tag{П.1.3}$$

Используя разложение в ряд Фурье

---

[3] Подчеркнем, что отвечающее рассмотрению этой системы пренебрежение нелокальностью теплопереноса естественно, в частности, тогда, когда длина волны излучения много больше длины свободного пробега электрона, определяющейся электрон-электронными столкновениями.

$$\left(\frac{v_E}{\sqrt{2}\,u_E(t)}\right)^n = \frac{1}{\left[1-\rho^2\cos(\omega t-2\psi)\right]^{n/2}} = A_0^{(n/2)}(\rho^2) + \\ + 2\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n/2)}(\rho^2)\cos\left[2m(\omega t-\psi)\right], \tag{П.1.4}$$

легко понять, что соотношение (4.6) выполнено.

В соответствии с разложением (П.1.4)

$$\left\langle\frac{1}{u(t)}\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{v_E}A_0^{(1/2)}(\rho^2) = \frac{2^{3/2}}{v_E\pi\sqrt{1+\rho^2}}\,\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right). \tag{П.1.5}$$

Здесь согласно [25] (8.111.2) $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Аналогично

$$\left\langle\frac{1}{u_E^3(t)}\right\rangle = \frac{2^{3/2}}{v_E^3}A_0^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{2^{3/2}a_0}{v_E^3} = \frac{2^{5/2}}{v_E^3\pi(1-\rho^2)\sqrt{1+\rho^2}}\,\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right), \tag{П.1.6}$$

где согласно [25] (2.574.4) $\mathbf{E}(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Для отличных от нуля элементов тензора $\langle u_{Ek}(t)u_{Ej}(t)/u^5(t)\rangle$ согласно разложению (П.1.4) получаем

$$\left\langle\frac{u_{Ex}^2(t)}{u_E^5(t)}\right\rangle = \frac{2^{3/2}}{v_E^3}(a_1\cos^2\alpha + a_2), \quad \left\langle\frac{u_{Ey}^2(t)}{u_E^5(t)}\right\rangle = \frac{2^{3/2}}{v_E^3}(a_1\sin^2\alpha + a_2),$$

$$\left\langle\frac{u_{Ex}(t)u_{Ey}(t)}{u_E^5(t)}\right\rangle = \frac{2^{3/2}}{v_E^3}a_1\sin\alpha\cos\alpha\cos(\varphi_x-\varphi_y), \tag{П.1.7}$$

где

$$a_1 = A_0^{(5/2)}(\rho^2) - \frac{1}{\rho^2}A_1^{(5/2)}(\rho^2), \quad a_2 = \frac{1-\rho^4}{2\rho^2}A_1^{(5/2)}(\rho^2). \tag{П.1.8}$$

В последних формулах коэффициенты разложения (П.1.4) имеют вид

$$A_0^{(5/2)}(\rho^2) = \frac{2}{3\pi(1+\rho^2)^{1/2}(1-\rho^2)}\left\{\frac{4}{1-\rho^2}\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) - \mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\right\},$$

$$A_1^{(5/2)}(\rho^2) = \frac{2}{3\pi(1+\rho^2)^{3/2}(1-\rho^2)}\left\{\frac{1+3\rho^4}{1-\rho^2}\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) - \mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\right\}.$$

Если тензор (П.1.1) обозначить $2^{3/2}v_E^{-3}N_{kj}$, то для отличающихся от нуля элементов тензора $N_{kj}$ имеем

$$N_{xx} = a_0 - 3a_2 - 3a_1\cos^2\alpha, \quad N_{yy} = a_0 - 3a_2 - 3a_1\sin^2\alpha, \\ N_{xy} = N_{yx} = 3a_1\sin\alpha\cos\alpha\cos(\varphi_x-\varphi_y), \quad N_{zz} = a_0. \tag{П.1.9}$$

В частном случае круговой поляризации излучения, когда $\alpha = \pi/4$, а $\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$, имеем

$$\left\langle u_E^{-1}(t)\right\rangle = \sqrt{2}/v_E, \text{ а } N_{kj} = -\frac{1}{2}[\delta_{kx}\delta_{jx} + \delta_{ky}\delta_{jy}] + \delta_{kz}\delta_{jz}. \tag{П.1.10}$$

Несколько сложнее обстоит дело в другом предельном случае поляризации близкой к плоской, когда $\rho^2$ близко к единице. Тогда, в частности, имеем

$$A_0^{(1/2)}(\rho^2) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \ln \frac{32}{1-\rho^2}. \tag{П.1.11}$$

Для величин, определяющих тензор $N_{kj}$ (П.1.9), получаем

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{\frac{1}{1-\rho^2} + \frac{1}{8}\ln\frac{32}{1-\rho^2} + \frac{1}{8}\right\}, \quad 3a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{-\frac{1}{1-\rho^2} + \frac{3}{8}\ln\frac{32}{1-\rho^2} + \frac{17}{8}\right\},$$

$$a_0 - 3a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left\{-\frac{1}{1-\rho^2} + \frac{1}{8}\ln\frac{32}{1-\rho^2} - \frac{9}{8}\right\}. \tag{П.1.12}$$

В частности, если $\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$ и $E_y \ll E_x$, то $1-\rho^2 = 2\sin^2\alpha$ и тензор $N_{kj}$ оказывается диагональным:

$$N_{xx} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{4}{\sin\alpha} - 1\right\}, \quad N_{yy} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{\sin\alpha} + \frac{5}{4}\right\},$$

$$N_{zz} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{\sin\alpha} + \frac{1}{4}\right\}. \tag{П.1.13}$$

При произвольной разности фаз $\varphi_x - \varphi_y$, но $\rho^2$ близком к единице тензор $T_{lj} = (N_{lj})^{-1}$, обратный тензору $N_{kj}$, имеет следующие отличные от нуля элементы:

$$T_{xx} = \frac{\pi\sqrt{2}}{d}\left\{-\cos^2\alpha + \frac{1}{8}(1-\rho^2)\left[(1-3\sin^2\alpha)\ln\frac{32}{1-\rho^2} - 9 + 17\sin^2\alpha\right]\right\},$$

$$T_{yy} = \frac{\pi\sqrt{2}}{d}\left\{-\sin^2\alpha + \frac{1}{8}(1-\rho^2)\left[(1-3\cos^2\alpha)\ln\frac{32}{1-\rho^2} - 9 + 17\cos^2\alpha\right]\right\},$$

$$T_{zz} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\rho^2). \tag{П.1.14}$$

Отметим, что относительно малые слагаемые в формулах (П.1.12) определяют выражение

$$d = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{1-\rho^2} - 1, \tag{П.1.15}$$

которое согласно (6.8) характеризует большую по величине отрицательную компоненту тензора статической электропроводности.

*ПРИЛОЖЕНИЕ 2*

В дополнение к основному тексту рассмотрим здесь для части силы трения (определяющейся упорядоченным движением электронов $\mathbf{u}^e$) в частном случае круговой поляризации излучения переход от поля сравнительно слабой интенсивности, $v_E \ll v_T$, к пределу мощного излучения, $v_T \ll v_E$. Прежде всего заметим, что после линеаризации по скорости упорядоченного движения $\mathbf{u}^e$ формула (3.8) может быть представлена в виде

$$(\mathbf{R}^{ei})_k = -\frac{4\pi e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{m} \int d\mathbf{v} \frac{v_k}{v^3} \frac{n}{(2\pi)^{3/2} v_T^5} \langle (\mathbf{u}^e, \mathbf{v} + \mathbf{u}_E(t)) \rangle . \tag{П.2.1}$$

Имея в виду, что $v_x = v \sin\theta \cos\varphi$, $v_y = v \sin\theta \sin\varphi$, в случае круговой поляризации получаем

$$\exp\left\{-\frac{(\mathbf{v}+\mathbf{u}_E(t))^2}{2v_T^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{v^2}{2v_T^2} - \frac{v_E^2}{4v_T^2}\right\} \exp\left(-\frac{v v_E}{\sqrt{2}\, v_T^2} \sin\theta \cos(\omega t - \varphi)\right). \tag{П.2.2}$$

Используя разложение (см. [26, с. 197, 9.6.34])

$$\exp\left(-\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2} \sin\theta \cos(\omega t - \varphi)\right) = I_0\left(\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2}\sin\theta\right) +$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n \left(\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2}\sin\theta\right) \cos\left(n(\omega t - \varphi)\right), \tag{П.2.3}$$

получаем

$$\left\langle \exp\left\{-\frac{[\mathbf{v}+\mathbf{u}_E(t)]^2}{2v_T^2}\right\} (\mathbf{u}^e, \mathbf{v} + \mathbf{u}_E(t)) \right\rangle = \exp\left\{-\frac{v^2}{2v_T^2} - \frac{v_E^2}{4v_T^2}\right\} \times$$
$$\times \left\{ (\mathbf{u}^e \mathbf{v}) I_0 \left(\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2}\sin\theta\right) - I_1\left(\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2}\sin\theta\right) \frac{v_E}{\sqrt{2}} (u_x^e \cos\varphi + u_y^e \sin\varphi) \right\}. \tag{П.2.4}$$

Используя [26] (с. 725.6.618.4 и 262.10.2.13), имеем

$$\int_0^\infty dv \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right) I_1\left(\frac{v v_E}{\sqrt{2} v_T^2}\sin\theta\right) = \frac{\sqrt{2} v_T^2}{v_E \sin\theta}\left[\exp\left(\frac{v_E^2 \sin^2\theta}{4v_T^2}\right) - 1\right]$$

и окончательно получаем диагональный тензор $\nu_{kj}$ эффективной частоты столкновений со следующими элементами [24]:

$$\nu_{xx} = \nu_{yy} = \nu(E) F_\perp \left(\frac{v_E}{2v_T}\right), \quad \nu_{zz} = \nu(E) F_\parallel \left(\frac{v_E}{2v_T}\right), \tag{П.2.5}$$

где $\nu(E)$ определена формулой (5.2), а

$$F_\perp(x) = \frac{1}{2}\left\{-\operatorname{erf}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x + 2x^3) e^{-x^2}\right\}, \tag{П.2.6}$$

$$F_\parallel(x) = \operatorname{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}, \tag{П.2.7}$$

где

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

— интеграл вероятности.

В пределе $v_E \ll v_T$ имеем $F_\perp(x) = F_\parallel(x) = (8/3\sqrt{\pi})x^3$, что приводит к обычному [3, 4, 19] выражению для эффективной частоты столкновений

$$\nu_{xx} = \nu_{yy} = \frac{4\sqrt{2\pi}\, e^2 e_i^2 n_i \Lambda_{ei}}{3m^2 v_T^3} = \nu_{zz}.$$

В противоположном пределе, $v_E \gg v_T$, имеем $F_\parallel = 1$, $F_\perp = -1/2$ и получаем (5.3).

Формулы (П.2.5)–(П.2.7) описывают переход от обычного случая излучения малой интенсивности к случаю излучения большой мощности. При этом обращение знака $\nu_{xx}$-, $\nu_{yy}$-элементов тензора эффективной частоты столкновений происходит при $v_E = 3.02 v_T$ [24].

## Литература


1. G. Mourou and D. Umstadter, Phys. Fluids B **4**, 2315 (1992).
2. В. П. Силин, УФН **145**, 225 (1985).
3. С. И. Брагинский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 1, под ред. М. А. Леонтовича, Госатомиздат, Москва (1963), с. 183.
4. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).
5. А. В. Максимов, В. П. Силин, М. В. Чеготов, Физика плазмы, **16**, 575 (1990).
6. A. B. Langdon, Phys. Rev. Lett. **44**, 575 (1980).
7. R. Balescu, J. Plasma Phys. **27**, 553 (1982).
8. J. P. Matte, M. Lemoureux, C. Moeller, R. Y. Yin, J. Delettrez, J. Virmont, and T. W. Johnston, Plasma Phys. and Contr. Fusion, **30**, 1665 (1988).
9. J. M. Liu, J. S. De Groot, J. P. Matte, T. W. Johnston, and R. P. Drake, Phys. Plasmas **1**, 3570 (1994).
10. P. Mora and H. Yahi, Phys. Rev. A **26**, 2259 (1982).
11. В. П. Силин, ЖЭТФ **108**, 193 (1995).
12. S. A. Uryupin, S. Kato, and K. Mima, Phys. Plasmas **2**, 3100 (1995).
13. В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 2254 (1964).
14. B. N. Chichkov, S. A. Shumsky, and S. A. Uryupin, Phys. Rev. A **45**, 7475 (1992).
15. C. D. Decker, W. B. Mori, J. M. Dawson, and T. Katsouleas, Phys. Plasmas **1**, 4043 (1994).
16. A. Djaoui and A. A. Offenberger, Phys. Rev. E **50**, 4961 (1994).
17. В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **81**, 910 (1981).
18. A. Ya. Polishchuk and J. Meyer-Ter-Vehn, Phys. Rev. E **49**, 663 (1994).
19. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
20. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 1771 (1960).
21. В. П. Силин, ЖЭТФ **41**, 861 (1961).
22. M. V. Fedorov and R. V. Karapetyan, J. Phys. A **9**, L103 (1976).
23. Р. В. Карапетян, М. В. Федоров, КЭ **4**, 2203 (1977).
24. B. N. Chichkov and S. A. Uryupin, Phys. Rev. E **48**, 4659 (1993).
25. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
26. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).