

## ЛАНДАУЕРСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО МЕТАЛЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

*Д. М. Седракян, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, А. Ж. Хачатрян*

*Ереванский государственный университет  
375049, Ереван, Армения*

Поступила в редакцию 14 февраля 1996 г.

Получена зависимость среднего по ансамблю сопротивления  $\langle \rho_L \rangle$  одномерной цепочки из периодически расположенных случайных  $\delta$ -потенциалов от длины цепочки  $L$ , энергии падающего электрона и параметра беспорядка цепочки  $w$ . Показано, что зависимость  $\langle \rho_L \rangle$  от  $L$  в общем случае представляет собой сумму трех показательных функций, две из которых в предельном случае  $L \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Следовательно, асимптотическое выражение для  $\langle \rho_L \rangle$  всегда является показательной функцией от  $L$ . Такое выражение для  $\langle \rho_L \rangle$  означает, что электронные состояния действительно локализованы, и позволяет, что очень важно, найти зависимость радиуса локализации от энергии падающего электрона и силы взаимодействия электрона с узлами цепочки. Найдено также рекуррентное представление для  $\langle \rho_L \rangle$ , что удобно использовать для численных расчетов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестно, что процедура усреднения и вычисления средних физических характеристик для неупорядоченных систем в первую очередь сталкивается с математическими трудностями. Явление локализации электронов для систем со случайными потенциалами взаимодействия позволяет в некоторых случаях, без конкретного решения задачи, сделать определенные выводы о характере возможных решений. Так, в одномерном случае, как показано в работах [1–4], зависимость среднего сопротивления металла с неподвижными примесями, где все электронные состояния локализованы, от длины примесной цепочки  $L$  при  $L \rightarrow \infty$  и при нулевой температуре выражается формулой ( $\hbar = e^2 = 1$ )

$$\langle \rho_L \rangle = \frac{1}{2}(e^{L/\xi} - 1),$$

где  $\xi$  — радиус локализации электронных состояний, который не зависит от  $L$ . Здесь «неидеальная область» предполагается помещенной между двумя полубесконечными контактами, в которых движение электронов предполагается свободным. Доля электронов, прошедших из одного контакта в другой, определяет пропускную способность системы, которая обратно пропорциональна  $\langle \rho_L \rangle$ . Таким образом, такая однозначная связь между ландауерским сопротивлением  $\langle \rho_L \rangle$  при  $L \rightarrow \infty$  и радиусом локализации  $\xi$  одноэлектронных состояний, зависящим только от энергии электрона и силы взаимодействия электрона с примесями, сводит задачу нахождения  $\xi$  к задаче нахождения  $\langle \rho_L \rangle$  при  $L \rightarrow \infty$  и обратно.

Так, для целого класса случайных потенциалов со средним потенциалом, равным нулю, т. е. для потенциалов типа «белый шум», радиусы локализации были рассчитаны как при наличии внешнего поля, так и при его отсутствии [5]. Хорошо известный метод

трансферматриц, примененный к модели короткодействующих потенциалов [6], позволил эффективно проводить численные расчеты, но он был неэффективен для получения аналитических результатов. Метод детерминанта, предложенный в работах [7, 8] для одномерных систем из случайных одиночных барьеров, позволил получить аналитические результаты только в предположении слабого и сильного рассеяния электрона на одиночном барьере и в случае резонансного прохождения. Расчеты радиуса локализации путем исследования  $\langle \rho_L \rangle$  при  $L \rightarrow \infty$  были выполнены также в работах [9–11].

В работе [12] было показано, что для модели из периодически расположенных  $\delta$ -потенциалов, амплитуды которых — независимые случайные величины с нулевым средним значением, среднее ландауерское сопротивление  $\langle \rho_L \rangle$  можно представить в виде ряда. В работе [13] удалось провести суммирование этого ряда и получить конечно-разностное уравнение для определения ландауерского сопротивления  $\langle \rho_L \rangle$ . Там же приведены решения этого уравнения для некоторых частных случаев, т. е. для энергий электронов, соответствующих краю и центру энергетической зоны.

В настоящей работе находится аналитическое решение конечно-разностного уравнения для  $\langle \rho_L \rangle$  в общем случае. Найденное решение фактически определяет  $\langle \rho_L \rangle$  как функцию длины цепочки  $L$ , энергии падающего электрона и интенсивности рассеяния на одиночном барьере. Показывается, что полученное решение для  $\langle \rho_L \rangle$  при  $L \rightarrow \infty$  всегда можно привести к виду  $\langle \rho_L \rangle \propto \exp(L/\xi)$ , где  $\xi$  не зависит от  $L$ . Вычисляется радиус локализации.

В разд. 2 излагается постановка задачи и приводятся необходимые для дальнейшего исследования результаты, полученные авторами в работе [13]. В разд. 3 находится общее решение конечно-разностного уравнения, которому удовлетворяет искомая функция  $\langle \rho_L \rangle$ . Здесь же получено рекуррентное уравнение для  $\langle \rho_L \rangle$ . Далее, в разд. 4 приводится анализ решений характеристического уравнения, через корни которого, как показано в разд. 3, выражается зависимость  $\langle \rho_L \rangle$  от  $L$ . Находится решение уравнения для  $\langle \rho_L \rangle$ , когда  $L \rightarrow \infty$ , откуда и определяется выражение для радиуса локализации электрона. В разд. 5 проводится анализ полученных результатов.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим цепочку из  $N$   $\delta$ -образных потенциалов с произвольными амплитудами  $V_n$  и соответствующими координатами  $x_n$ :

$$V(x) = \sum_{n=1}^N V_n \delta(x - x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть решение уравнения Шредингера для электрона с энергией  $E = k^2$  ( $\hbar = 2m_0 = 1$ ,  $m_0$  — масса электрона) вне структуры имеет вид

$$\psi(k, x) = \begin{cases} e^{ikx} + r_N(k)e^{-ikx}, & x \leq x_1, \\ t_N(k)e^{ikx}, & x \geq x_N, \end{cases}$$

где  $r_N(k)$  и  $t_N(k)$  — соответственно амплитуды коэффициентов отражения и прохождения электрона. Ландауерское сопротивление выражается через  $r_N(k)$  и  $t_N(k)$  известной формулой

$$\rho_N = \frac{1}{|t_N(k)|^2} - 1, \quad (1)$$

$$|r_N(k)|^2 = 1 - |t_N(k)|^2.$$

Формула (1) верна для любого вида рассеивающего потенциала. В работе [13] мы показали, что усредненную по всевозможным реализациям случайного поля величину  $\langle \rho_N \rangle$  для модели, в которой  $N$   $\delta$ -потенциалов расположены в произвольных точках  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , можно представить в виде

$$\langle \rho_N \rangle = 1 + \sum_{p=1}^N \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_p}^N 2^{p-1} \alpha^p \prod_{l=1}^{p-1} \{1 - \cos [2k(x_{j_{l+1}} - x_{j_l})]\}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} f(V_j) \frac{V_j^2}{4k^2} dV_j, \quad \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} f(V_j) dV_j = 1.$$

Здесь  $f(V_j)$  — функция распределения потенциалов  $V_j$ . Она определена в интервале  $[w/2, -w/2]$ , предполагается одинаковой для всех  $V_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) и является произвольной четной функцией от  $V_j$ . При  $f(V_j) = 1$ , в частности, имеем  $\alpha = w^2/48k^2$ .

Непосредственное суммирование ряда (2), даже в предположении, что рассеиватели расположены эквидистантно, наталкивается на непреодолимые трудности. Суммирование ряда (2) удастся провести только в некоторых частных случаях, когда энергия электрона соответствует центру или краю ( $ka = \pi/2$  или  $ka = \pi$ , где  $a$  — период цепочки) энергетической зоны [12, 13]. Однако, как показано в работе [13], суммирование по внутренним индексам в выражении (2) можно провести и в результате получить конечно-разностное уравнение для искомой величины  $\langle \rho_N \rangle$ . Это уравнение имеет следующий вид:

$$\langle \rho_N \rangle = \alpha N + \sum_{n=1}^N c_{N-n} \langle \rho_n \rangle, \quad (3)$$

где

$$\rho_1 = 1, \quad c_n = 2\alpha [1 - \cos(2kan)].$$

Заметим, что уравнение (3) можно рассмотреть как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\langle \rho_1 \rangle, \langle \rho_2 \rangle, \dots, \langle \rho_N \rangle$  и получить представление для  $\langle \rho_N \rangle$  в виде детерминанта.

Решение уравнения (3) для частного случая  $ka = \pi$  находится сразу, так как  $c_n = 0$  для всех  $n$ , и, следовательно,

$$\langle \rho_N \rangle = \alpha N. \quad (4)$$

Этот результат соответствует резонансному прохождению электрона и впервые был получен в работе [6]. Далее в работе [13] было найдено решение уравнения (3) для другого

частного случая, когда энергия падающего электрона соответствует центру энергетической зоны ( $ka = \pi/2$ ). Это решение имеет вид

$$\langle \rho_N \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{(a+b)^N + (a-b)^N}{2} + \frac{(a+b)^N - (a-b)^N}{2b} \right], \quad (5)$$

где

$$a = 2\alpha, \quad b = \sqrt{1 + 4\alpha^2}.$$

Как видно из решения (5), для любых  $\alpha$  при  $N \rightarrow \infty$  величину  $\langle \rho_N \rangle$  можно представить в виде  $\langle \rho_N \rangle \propto \exp\{Na/\xi\}$ , где  $\xi$  не зависит от  $N$  и представляет собой радиус локализации электрона.

Однако, как увидим ниже, уравнение (3) удастся решить и в общем случае, т. е. для любого значения энергии падающего электрона и параметра  $\alpha$ .

### 3. РЕШЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\langle \rho_N \rangle$

Перейдем к решению уравнения (3) в общем случае. Ищем его решение в следующем виде:

$$\langle \rho_N \rangle = \sum_{j=1}^p A_j x_j^N + A_0, \quad (6)$$

где  $x_j$ ,  $A_j$  и  $A_0$  предполагаются не зависящими от  $N$ . Число  $p$ , определяющее количество слагаемых в (6), остается пока неопределенным. Подставляя решение (6) в уравнение (3) и требуя, чтобы последнее выполнялось для любых  $N$ , получим необходимые соотношения, определяющие  $x_j$ ,  $A_j$  и  $A_0$ . Эти условия имеют вид

$$\sum_{j=1}^p A_j x_j = \frac{1}{2} + \alpha, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^p \frac{A_j}{1+x_j} = \frac{1-\alpha}{4}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^p A_j = \frac{1}{2}, \quad A_0 = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Здесь  $x_j$  являются корнями характеристического уравнения

$$x^3 - x^2(l+m) + x(l-m) - 1 = 0, \quad (10)$$

где

$$l = 1 + 2 \cos(2ka), \quad m = 2\alpha [1 - \cos(2ka)]. \quad (11)$$

Заметим, что из (10), в частности, следует, что в уравнениях (7)–(9)  $p = 3$ . Совместное решение уравнений (7)–(9) с использованием (10) определяет коэффициенты  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в следующем виде:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{(1-\alpha)(1+l) - (1+x_1)(l+m-x_1-2\alpha)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}. \quad (12)$$

Что касается  $A_2$  и  $A_3$ , то они получаются из (12) циклической перестановкой  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Величины  $x_j$ , которые являются корнями кубического уравнения (10), определяются стандартными формулами:

$$x_1 = C + D + \frac{l+m}{3}, \quad x_{2,3} = -\frac{C+D}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{C-D}{2} + \frac{l+m}{3}. \quad (13)$$

Здесь

$$C = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{Q}}, \quad D = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{Q}},$$

$$Q = \frac{2l}{3} \frac{l^2 + 3m^2}{9} - \frac{1}{12} \left( \frac{l^2 - m^2}{3} \right)^2 - \frac{l^2 - m^2}{6} + \frac{1}{4}, \quad (14)$$

$$q = -2 \left( \frac{l+m}{3} \right)^3 + \frac{l^2 - m^2}{3} - 1.$$

Из общего решения (6), (12) и (13) легко найти частное решение для электронов с энергией, соответствующей центру энергетической зоны. Действительно, для  $ka = \pi/2$  из (11) имеем  $l = -1$  и  $m = 4\alpha$ . Тогда решения уравнения (10) будут:

$$x_1 = -1, \quad x_{2,3} = 2\alpha \pm \sqrt{1 + 4\alpha^2}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6) и (12) и замечая, что коэффициент  $A_1$ , соответствующий корню  $x_1 = -1$ , равняется нулю, получим решение (5), приведенное в работе [13].

Из решения (6), используя характеристическое уравнение (10), можно получить следующее рекуррентное уравнение для  $\langle \rho_N \rangle$ :

$$\langle \rho_N \rangle = (l - m)\langle \rho_{N-1} \rangle - (l + m)\langle \rho_{N-2} \rangle + \langle \rho_{N-3} \rangle + m, \quad (16)$$

где начальные значения  $\langle \rho_1 \rangle$ ,  $\langle \rho_2 \rangle$  и  $\langle \rho_3 \rangle$  для (16) находятся из (3):

$$\langle \rho_1 \rangle = \alpha, \quad \langle \rho_2 \rangle = 2\alpha + 2\alpha^2 [1 - \cos(2ka)],$$

$$\langle \rho_3 \rangle = 3\alpha + 2\alpha^2 [3 - 2\cos(2ka) - \cos(4ka)] + 4\alpha^3 [1 - \cos(2ka)]^3.$$

Рекуррентное уравнение (16) можно использовать для численных расчетов и для исследования  $\langle \rho_N \rangle$  при небольших  $N$ .

В конце отметим, что, как видно из решения (6), зависимость среднего ландауерского сопротивления цепочки из периодически расположенных случайных  $\delta$ -потенциалов от длины цепочки  $L = Na$  в общем случае имеет вид суммы трех показательных функций.

#### 4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ

Перейдем к рассмотрению полученного для  $\langle \rho_L \rangle$  решения (6) при  $L \rightarrow \infty$ . Покажем, что  $\langle \rho_L \rangle$  при  $L \rightarrow \infty$  для любых разумных значений параметров  $l$  и  $m$  растет

с увеличением  $L$  по экспоненциальному закону. Это означает, что все одноэлектронные состояния для рассмотренной нами модели локализованы. Исключения составляют только края энергетических зон ( $ka = \pi m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ), для которых зависимость  $\langle \rho_L \rangle$  от  $L$  линейна [5].

Для доказательства сделанного нами утверждения сначала выясним некоторые свойства действительных корней характеристического уравнения (10). Для этого перепишем уравнение (10) в следующем виде:

$$l = \frac{x^2 + x + 1}{x} - \frac{x + 1}{x - 1} m. \tag{17}$$

Здесь мы учли, что  $x_j \neq 0$  и исключили решение  $x_j = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ , которое соответствует краям энергетической зоны (см. выше). Если подставить в (17) любое действительное решение  $x_j$  уравнения (10), то уравнение (17) на плоскости, определяемой координатами  $l$  и  $m$ , представляет собой прямую линию, на которой находятся все пары  $l$  и  $m$ , для которых  $x_j$  является решением уравнения (10). Это утверждение дает нам ключ для выяснения, является ли наперед заданное действительное  $x_j$  решением уравнения (10) или нет. Для этого достаточно подставить  $x_j$  в уравнение (17) и посмотреть, проходит ли прямая (17) через область возможных значений параметров  $l$  и  $m$ . Если да, то  $x_j$  есть решение уравнения (10).

Как видно из определения параметров  $l$  и  $m$  (11), областями принимаемых ими значений являются

$$-1 \leq l \leq 3, \quad m \geq 0. \tag{18}$$

Рассматривая всевозможные прямые на плоскости  $l, m$  при заданном  $x_j$ , легко убедиться, что эти прямые пересекают область, определяемую условиями (18), только тогда, когда

$$-1 \leq x_j < 0, \quad x_j \geq 1. \tag{19}$$

Следовательно, условия (19) определяют области значений действительных корней уравнения (10) для произвольных значений энергии электрона (или  $ka$ ) и параметра  $\alpha$ .

Как известно, при  $Q > 0$  уравнение (10) имеет только один действительный корень. Тогда два других корня комплексны, причем  $x_2 = x_3^*$ , и, следовательно, их всегда можно представить в виде

$$x_2 = \rho e^{i\varphi}, \quad x_3 = \rho e^{-i\varphi}, \tag{20}$$

где  $\rho$  и  $\varphi$  — действительные числа. По теореме Виета для произведения корней уравнения (10) имеем

$$x_1 x_2 x_3 = 1. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), получаем

$$x_1 \rho^2 = 1. \tag{22}$$

Так как  $\rho^2$  по определению положительная величина, то из (22) получаем, что единственный действительный корень  $x_1 > 0$ , следовательно, согласно (19),

$$x_1 \geq 1. \tag{23}$$

Тогда из (22) следует, что  $0 < \rho^2 \leq 1$ . Действительный корень  $x_1$  в данном случае ( $Q > 0$ ) определяется из (13). Используя (20) и (22), запишем решение (6) в следующем виде

$$\langle \rho_N \rangle = A_1 x_1^N + 2a x_1^{-N/2} \cos(N\varphi + \psi) - \frac{1}{2}. \quad (24)$$

Здесь коэффициенты  $A_2$  и  $A_3$  решения (6) представлены в виде

$$A_2 = a e^{i\psi}, \quad A_3 = a e^{-i\psi},$$

так как  $A_3 = A_2^*$ . Если устремить  $N \rightarrow \infty$  и учесть условие (23), то из (24) получим для  $\langle \rho_N \rangle$  следующее асимптотическое выражение:

$$\langle \rho_N \rangle = A_1 x_1^N - \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Приведа выражение (25) к виду  $\langle \rho_L \rangle \propto \exp\{L/\xi\}$ , для радиуса локализации  $\xi$  получаем простую формулу

$$\xi = \frac{a}{\ln x_1}. \quad (26)$$

Перейдем к рассмотрению другого случая, когда  $Q \leq 0$ . Тогда уравнение (10) имеет три действительных корня. Как видно из (21), все три корня одновременно не могут принимать значения большие единицы, так как в этом случае произведение корней было бы больше единицы, что противоречит (21). Случай, когда все три корня равняются единице,  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  ( $Q = 0$ ), соответствует краю энергетической зоны и является особенностью данной модели; он неоднократно обсуждался в литературе [8, 9]. Невозможен также случай, когда один из корней отрицателен, а два других положительны, так как в этом случае  $x_1 x_2 x_3 < 0$ , что снова противоречит условию (21). Следовательно, единственный вариант, который не противоречит условиям (19)–(21) — это когда  $x_1 \geq 1$  и  $-1 \leq x_{2,3} < 0$ . В этом случае один из отрицательных корней, скажем  $x_3$ , определяется из решения (13) формулой

$$x_3 = C + D + \frac{l+m}{3}, \quad (27)$$

где  $C = D^*$ . Два других корня определяются также из решения (13) и могут быть представлены в виде

$$x_{1,2} = a \pm b, \quad (28)$$

где  $a$  и  $b$  выражаются через  $x_3$  следующим образом:

$$a = \frac{l+m-x_3}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{4} \left( \frac{l+m}{2} + x_3 \right) (l+m-x_3) + m-l}. \quad (29)$$

Введем вместо  $a$  и  $b$  другие переменные,  $\rho$  и  $x$ , следующим образом:

$$a = \rho \operatorname{sh} x, \quad b = \rho \operatorname{ch} x. \quad (30)$$

Тогда  $b^2 - a^2 = \rho^2 = -x_3^{-1}$ . Подставляя (30) и (29) в решение (6) для  $\langle \rho_N \rangle$ , получаем следующие выражения:

$$\langle \rho_N \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ (-1)^N A_3 \rho^{-2N} + \rho^N [K_1 \operatorname{sh}(xN) + K_2 \operatorname{ch}(xN)] - 1 \}, & N = 2n + 1, \\ \frac{1}{2} \{ (-1)^N A_3 \rho^{-2N} + \rho^N [K_1 \operatorname{ch}(xN) + K_2 \operatorname{sh}(xN)] - 1 \}, & N = 2n, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$K_{1,2} = \frac{A_1 \pm A_2}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Как мы уже отметили, для энергии электрона, соответствующей центру энергетической зоны,  $ka = \pi/2$ ,  $A_3 = 0$ . В этом частном случае легко увидеть, что  $K_1 = \rho = 1$  и  $K_2 = 1/\operatorname{ch} x$  и решения (31) переходят в решения (53), (54) работы [13]. Решения (31) при  $N \rightarrow \infty$ , как и в случае  $Q > 0$ , переходят в решения (25), в которых  $x_1 = a + b > 1$ . Следовательно, радиус локализации и в этом случае определяется формулой (26).

Таким образом, мы доказали, что решение (6) при  $L \rightarrow \infty$  всегда приводит к экспоненциальной зависимости среднего сопротивления  $\langle \rho_L \rangle$  от  $L$ . В частности, это означает, что все одноэлектронные состояния локализованы и радиус локализации определяется формулой (26).

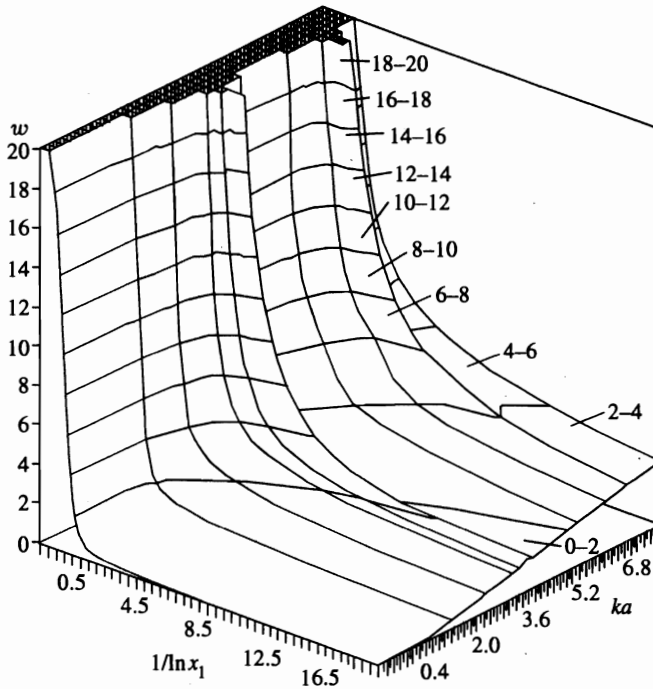
## 5. РАДИУС ЛОКАЛИЗАЦИИ ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ

Прежде чем перейти к конкретному расчету радиуса локализации одноэлектронных состояний, отметим некоторые общие свойства полученного нами решения для  $\langle \rho_N \rangle$ .

Как уже было сказано, среднее ландауеровское сопротивление  $\langle \rho_N \rangle$ , которое выражается формулами (24), (31), в асимптотическом случае  $N \rightarrow \infty$  имеет степенную зависимость,  $\langle \rho_N \rangle \propto x_1^N$ , где  $x_1 > 1$ , и не зависит от  $N$ . Характер перехода к такой зависимости определяется значениями корней  $x_2$  и  $x_3$  характеристического уравнения (10). Чем дальше энергия электрона от краев энергетических зон, тем соответствующие значения  $x_2$  и  $x_3$  по модулю ближе к нулю и, следовательно, решения (24) и (31) при увеличении  $N$  быстрее стремятся к виду (25). Зависимость  $\langle \rho_L \rangle$  от  $L$  при любой энергии электрона имеет осциллирующий характер, который при увеличении  $L$  исчезает. Такую же зависимость  $\langle \rho_L \rangle$  имеет и от энергии падающего электрона при фиксированных значениях  $L$  и  $w$ .

Нами был проведен численный расчет зависимости  $\xi$  от  $ka$  и  $w$ , результаты которого представлены на рисунке. Как видно из графика, при фиксированном значении  $w$  значение радиуса локализации при увеличении энергии в пределах первой энергетической зоны ( $0 \leq ka \leq \pi$ ) увеличивается и стремится к бесконечности при  $ka \rightarrow \pi$ . Отметим, что радиус локализации имеет минимум, когда энергия электрона меняется в пределах второй зоны ( $\pi \leq ka \leq 2\pi$ ), и значение этого минимума при увеличении  $w$  стремится к центру энергетической зоны. Из графика также виден естественный физический результат: для всех фиксированных значений энергии электрона радиус локализации монотонно уменьшается с увеличением параметра беспорядка цепочки  $w$ . На рисунке также указаны линии одинаковых значений радиуса локализации электронных состояний. Получен естественный результат, требующий увеличения энергии электрона при





Зависимость радиуса локализации электрона  $\xi/a = 1/\ln x_1$  от  $ka$  и  $w$

увеличении параметра беспорядка цепочки  $w$  для получения одинаковых значений радиуса локализации.

В конце заметим, что для зависимости радиуса локализации от энергии электрона и параметра беспорядка цепочки  $w$  можно получить простые аналитические выражения в случаях слабого и сильного рассеяния электронов.

Рассмотрим случай слабого рассеяния электрона, т.е.  $\alpha \ll 1$ . В этом предельном случае корень уравнения (11), определяющий радиус локализации, можно искать в виде

$$x_1 = 1 + \Delta x, \quad (32)$$

где  $0 < \Delta x \ll 1$ . Подставляя (32) в (11) и оставляя только члены, линейные по  $\alpha$ , для  $\Delta x$  получаем

$$\Delta x = \frac{3m}{3-l} = 2\alpha. \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (26) и заменяя  $\ln(1 + 2\alpha) \approx 2\alpha$ , окончательно имеем

$$\xi = 96(k/w)^2 a. \quad (34)$$

Здесь значение  $\xi$  в два раза больше значения, полученного в работе [9]. Это связано с тем, что в работе [9] радиус локализации определяется из значения  $\langle \ln \rho \rangle$ , которое при  $\alpha \ll 1$  равняется удвоенному значению  $\ln \langle \rho \rangle$ .

В пределе сильного рассеяния электрона, т. е. при  $\alpha \gg 1$ , и при добавочном условии

$$\alpha \sin^2(ka) \gg 1 \quad (35)$$

для радиуса локализации электрона получается следующее простое выражение:

$$\xi = \frac{a}{\ln [4\alpha \sin^2(ka)]}. \quad (36)$$

Этот же результат был получен в работе [13] при условии  $\alpha \gg 1$ . Как видно из нашего рассмотрения, последнее условие недостаточно для получения выражения (36). Необходимо более сильное требование (35).

Один из авторов (Д. М. С.) благодарит Отделение теоретической физики Физического института им. П. Н. Лебедева РАН за гостеприимство на завершающем этапе этой статьи.

Научные результаты, приведенные в этой статье, были получены, в частности, благодаря гранту № MVL000 Международного научного фонда.

## Литература

1. R. Landauer, *Phil. Mag.* **21**, 863 (1970).
2. P. W. Anderson, D. I. Thouless, E. Abraham, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **22**, 3519 (1980).
3. A. A. Abrikosov, *Sol. St. Comm.* **37**, 997 (1981).
4. N. Kumer, *Phys. Rev. B* **31**, 5513 (1985).
5. I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems*, Wiley, New York (1985).
6. М. Я. Азбел, *Phys. Rev. B* **27**, 3901 (1983).
7. V. M. Gasparian, B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and Z. A. Kasamian, *Phys. Lett. A* **132**, 201 (1988).
8. A. G. Aronov, V. M. Gasparian, Ute Commuch, *J. Phys.: Condens. Matter* **3**, 3023 (1991).
9. В. И. Перель, Д. И. Поляков, *ЖЭТФ* **86**, 352 (1984).
10. G. M. Soukoulis, I. V. Jose, E. N. Economou, and Ping Shing, *Phys. Lett.* **50**, 764 (1983).
11. E. Cota, I. V. José, and M. Ya. Azbel, *Phys. Rev. B* **32**, 6157 (1985).
12. V. M. Gasparian and Ash. G. Khachatryan, *Sol. St. Comm.* **12**, 1061 (1993).
13. Д. М. Седракян, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, А. Ж. Хачатрян, *ЖЭТФ* **109**, 243 (1996).