ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 2, стр. 654–668

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В СИЛЬНОКОРРЕЛИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

В. В. Вальков, Д. М. Дзебисашвили*

Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия
Красноярский государственный университет
660036, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 20 июня 1996 г.

Показано, что влияние магнитного упорядочения в магнитных полупроводниках через механизм s–$d(f)$-обменного взаимодействия имеет существенное значение для объяснения экспериментально обнаруженных в [7] температурных квантовых осцилляций намагниченности зонных электронов. Проанализировано влияние гибридизации зонных и локализованных электронов на амплитуду эффекта. Установленно, что амплитуда осцилляционных эффектов вследствие сильных внутриатомных корреляций существенно зависит от знака константы J.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди большого разнообразия веществ с сильными электронными корреляциями в последнее время вызывают интерес так называемые сильнокоррелированные системы с низкой концентрацией носителей тока. Яркими представителями этого класса веществ являются редкоземельные монопниктиды [1–4] с общей формулой ReX, где Re обозначает название редкоземельного элемента, а X — P, As, Sb. Комплексом нетривиальных свойств обладают монопниктиды церия CeAs, CeSb, CeP [2–4]. Эти соединения, являясь полуметаллами, при низких температурах проявляют присутствие в них дальнего магнитного порядка. Электронная структура цериевых монопниктидов обусловливается наличием валентной зоны с потолком в Г-точке зоны Бриллюэна, а также зоны проводимости, формируемой в окрестности X-точки симметрии зоны Бриллюэна. Экспериментально установлена хорошая степень электрон-дырочной компенсации. Исследование эффекта де Гааза–ван Альфена в монопниктидах церия подтверждает эти главные черты их электронного строения. Вместе с тем тонкие особенности в поведении частот осцилляций де Гааза–ван Альфена потребовали привлечения новых концепций [3, 4], связанных, прежде всего, с наличием магнитного упорядочения.

Существенное влияние магнитного порядка на электронные свойства материалов, как известно [5, 6], имеется в магнитных полупроводниках. В этих соединениях гибридизационное взаимодействие между коллективизированными и локализованными электронами может приводить к зависимости кинетических характеристик от сильных одноузельных корреляций. Поэтому такие магнитные полупроводники можно отнести

---

* e-mail:vvv@iph.krasnoyarsk.su

к отмеченному выше классу систем с низкой концентрацией носителей тока. Примером такого соединения является ферромагнитный полупроводник $HgCr_2Se_4$.

Недавно были опубликованы [7] результаты экспериментальных исследований по температурным квантовым осцилляциям намагниченности носителей тока в $HgCr_2Se_4$. Теоретическое предсказание этих осцилляций было сделано ранее в работе [8]. Однако при количественном сопоставлении экспериментальных данных [7] с выводами работы [8] выявилось существенное расхождение, связанное со следующим обстоятельством. Для отчетливого экспериментального наблюдения температурных квантовых осцилляций необходимо, чтобы фазы осциллирующих слагаемых для намагниченности при изменении температуры от нуля до $T \sim \hbar\omega_c$ (при больших температурах осциллирующие слагаемые экспоненциально малы) изменились на величину большую, чем 2π. В условиях низкой концентрации зонных носителей достигнуть такого изменения фазы становится затруднительным. Поэтому для интерпретации представленных в [7] результатов требуется привлечение дополнительного физического механизма, обеспечивающего возможность проявления большего числа осцилляций намагниченности зонных электронов при изменении температуры, прежде чем они успеют затухнуть.

Как известно [5, 6], сильная связь коллективизированных и локализованных электронов в магнитных полупроводниках экспериментально подтверждается смещением края оптического поглощения в температурной области существования магнитного упорядочения. Физической причиной, обусловливающей сдвиг дна зоны проводимости и (или) потолка валентной зоны, является s–$d(f)$-обменное взаимодействие между спиновыми моментами двух групп электронов [9]. Именно это взаимодействие позволило интерпретировать экспериментальные данные по гигантскому влиянию магнитного поля на оптические свойства $HgCr_2Se_4$, обнаруженному недавно авторами работы [10].

Принимая во внимание отмеченные факты, нетрудно сделать предположение, что s–$d(f)$-обменное взаимодействие может играть существенную роль в формировании температурных квантовых осцилляций. Физика предполагаемого механизма влияния магнитного упорядочения на температурные квантовые осцилляции достаточно проста. Увеличение температуры приводит к уменьшению намагниченности локализованной подсистемы. Из-за s–$d(f)$-обменной связи это вызывает движение уровней Ландау. В результате часть верхних уровней Ландау будет опустошаться, а электроны переходить в локализованные состояния, увеличивая число двухвалентных ионов хрома. Для реализации этого процесса существенное значение имеет близость значений химического потенциала и энергии, соответствующей переходу $Cr^{3+} \to Cr^{2+}$. Такая динамика вызывает хорошо известные осцилляции плотности электронных состояний и будет проявляться, в частности, в осциллирующей зависимости намагниченности коллективизированных электронов при возрастании температуры. В рамках этих рассуждений нетрудно вывести простой критерий реализации температурных квантовых осцилляций. При возрастании температуры от нуля до $T \sim \hbar\omega_c$ намагниченность уменьшается на величину $\sim (\hbar\omega_c/4\pi sI)^{3/2}$. Тогда обсуждаемый эффект будет иметь место, если вызванное s–$d(f)$-обменом смещение уровней значительно превышает расстояние между уровнями Ландау, т. е.

$$\alpha \equiv \left|\frac{J}{4\pi sI}\right| \left(\frac{\hbar\omega_c}{4\pi sI}\right)^{1/2} \gg 1,$$

где J — константа s–$d(f)$-обменного взаимодействия, I — интеграл обменного взаимодействия в локализованной подсистеме. Если взять характерные для магнитных полупроводников значения $J \sim 0.4$ эВ, $4\pi sI \sim T_c \sim 10^2$ К, $\hbar\omega_c \sim 10$ К, то $\alpha \approx 8$, и условия реализации температурных квантовых осцилляций выполняются.

Следует, однако, заметить, что гибридизационное взаимодействие действует в направлении существенного подавления эффекта де Гааза–ван Альфена вообще и температурных квантовых осцилляций в частности. Поэтому оценка возможности эффекта по приведенному выше критерию при наличии гибридизации может оказаться слишком оптимистической. В этой связи особое значение приобретает учет одноузельных корреляций, которые перенормируют константу гибридизационного взаимодействия. Для дальнейшего существенно, что при определенных условиях (см. ниже) такая перенормировка может нейтрализовать негативное влияние смешивания коллективизированных и локализованных состояний и сделать наблюдаемыми температурные квантовые осцилляции.

Приведенные соображения по магнитным полупроводникам и полуметаллическим цериевым монопниктидам обосновывают актуальность изучения влияния магнитного упорядочения в сильнокоррелированных системах как на эффект де Гааза–ван Альфена, так и на температурные квантовые осцилляции. В данной статье мы рассмотрим случай ферромагнитного упорядочения в подсистеме локализованных спинов. Такой тип дальнего магнитного порядка реализуется в халькогенидных хромовых шпинелях. Поэтому результаты данной статьи будут непосредственно применимы к $HgCr_2Se_4$ и использованы для интерпретации обнаруженных в [7] температурных квантовых осцилляций. Сильнокоррелированные системы с антиферромагнитным типом порядка (цериевые монопниктиды) будут рассмотрены отдельно. Здесь лишь отметим, что качественная сторона влияния дальнего порядка в локализованной подсистеме на формирование температурных квантовых осцилляций одинакова для обоих типов магнитного упорядочения.

Изложение дальнейшего материала организовано следующим образом. В разд. 2 кратко описывается модель электронной структуры $HgCr_2Se_4$, учитывающая сильные внутриатомные корреляции. Вывод основных уравнений для гриновских функций и обсуждение условий применимости сделанных приближений проводится в разд. 3. В разд. 4 вычисляется термодинамический потенциал системы в условиях квантования Ландау и присутствия гибридизационного взаимодействия. Анализ влияния магнитного упорядочения на температурную и полевую зависимости намагниченности зонных электронов осуществляется в разд. 5. Показано, что температурное уменьшение магнитного параметра порядка через механизм s–$d(f)$-обменной связи может приводить к сильному движению уровней Ландау. Это обстоятельство является ключевым при количественном описании температурных квантовых осцилляций. Обсуждение результатов проводится в разд. 6.

2. ГАМИЛЬТОНИАН МОДЕЛИ

Влияние магнитного упорядочения на температурные квантовые осцилляции в сильнокоррелированных системах проведем на примере модели электронного строения $HgCr_2Se_4$. Электронная структура магнитных полупроводников вообще, и халькогенидных хромовых шпинелей в частности, рассмотрена в монографиях [5, 6]. Концепция многоэлектронных операторов Хаббарда [11–13], позволяющих хорошо описывать сильные одноузельные корреляции, была использована в теории халькогенидных хромовых шпинелей в работах [14–16]. Используя эту идеологию, запишем гамильтониан модели, воспроизводящий энергетический спектр $HgCr_2Se_4$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathscr{H} = &\sum_{\mathbf{k}\sigma}(\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \mu)c^+_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{f,m}(E_1 - g\mu_B Hm - 3\mu)X^{mm}_f + \\ &+ \sum_{f,m'}(E_2 - g\mu_B Hm' - 4\mu)X^{m'm'}_f - \frac{1}{2}\sum_{f\,l} I_{fl}(\mathbf{S}_f\mathbf{S}_l) - \\ &- \sum_f J(\mathbf{S}_f\boldsymbol{\sigma}_f) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{f\mathbf{k}\sigma}\left(v_\mathbf{k}\exp\left(-i\mathbf{k}\mathbf{R}_f\right)c^+_{\mathbf{k}\sigma}d_{f\sigma} + \text{H.c.}\right).\end{aligned} \quad (1)$$

Первое слагаемое гамильтониана описывает подсистему коллективизированных электронов в магнитном поле H с энергией $\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} = \varepsilon_\mathbf{k} - 2\sigma\mu_B H$, $\sigma = \pm 1/2$, μ_B — магнетон Бора. Второе слагаемое в (1) учитывает состояния трехвалентных ионов хрома, обладающих энергией E_1 и соответствующих конфигурации внешних электронов $3d^3$. Наличие спиновых степеней свободы выражается суммированием по проекции спинового момента на ось z, обозначаемой через m. Конфигурации $3d^3$ (Cr^{3+}) соответствует спиновый квартет ($S = 3/2$), который в магнитном поле испытывает расщепление с g-фактором, близким к 2 из-за замороженности орбитального момента в кристаллическом поле. Суммирование по m проводится по полуцелым значениям от $m = -3/2$ до $m = 3/2$. Операторы X^{nm}_f представляют собой хорошо известные в теории сильнокоррелированных систем операторы Хаббарда [11–13]. Несмотря на относительную сложность коммутационных соотношений для этих операторов к настоящему времени разработаны эффективные методы расчета систем в атомном представлении. Таковым, в частности, является метод диаграммной техники для операторов Хаббарда [17–19]. Диагональные операторы Хаббарда X^{nn}_f по существу являются проекционными операторами на выбранное подпространство атомных (ионных) состояний для узла f. Недиагональный оператор X^{nm}_f описывает переход иона на узле f из состояния $|f,m\rangle$ в состояние $|f,n\rangle$. В обозначениях бра- и кет-векторов Дирака операторы Хаббарда можно записать в виде

$$X^{nm}_f \equiv |f,n\rangle\langle f,m|\,.$$

Третье слагаемое гамильтониана учитывает состояния ионов Cr^{2+} с электронной конфигурацией $3d^4$ и энергией E_2. Этой конфигурации в кристаллическом поле соответствуют состояния со спиновым моментом $S = 1$. Триплетный характер отражается наличием суммирования по m' от $m' = -1$ до $m' = 1$. Четвертый член гамильтониана соответствует учету обменного взаимодействия между спиновыми моментами локализованной подсистемы. Пятое слагаемое в (1) описывает обменную связь локализованных и коллективизированных электронов в рамках s–$d(f)$-обменного взаимодействия [6, 9]. Наконец, последнее слагаемое гамильтониана описывает процессы гибридизационного взаимодействия, когда рождение (уничтожение) электрона в зоне проводимости сопровождается переходом иона хрома из состояния Cr^{2+} (Cr^{3+}) в состояние Cr^{3+} (Cr^{2+}). При этом электронный оператор $d_{f\sigma}$ выражается в виде линейной суперпозиции многоэлектронных операторов Хаббарда [14]:

$$d_{f\uparrow} = -\frac{1}{\sqrt{3}}X^{1/2,1}_f - \sqrt{\frac{2}{3}}X^{-1/2,0}_f - X^{-3/2,-1}_f,$$

$$d_{f\downarrow} = X_f^{3/2,1} + \sqrt{\frac{2}{3}} X_f^{1/2,0} + \frac{1}{\sqrt{3}} X_f^{-1/2,-1}. \qquad (2)$$

Здесь полуцелые значения индексов соответствуют состояниям иона Cr^{3+} с полуцелыми значениями проекции спинового момента, тогда как целые числа нумеруют состояния иона Cr^{2+} с проекцией спина $m' = \pm 1, 0$.

3. ФУНКЦИИ ГРИНА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Для рассмотрения эффектов де Гааза–ван Альфена и температурных квантовых осцилляций необходимо вычислить термодинамический потенциал Ω системы. С этой целью удобно воспользоваться методом интегрирования по константе связи [20]. Имея это в виду, определим необходимые для дальнейшего рассмотрения мацубаровские функции Грина:

$$G_{\mathbf{k}\sigma}(\tau - \tau') = -\langle T_\tau \tilde{c}_{\mathbf{k}\sigma}(\tau)\tilde{c}^+_{\mathbf{k}\sigma}(\tau')\rangle = T\sum_{\omega_n} \exp\left(-i\omega_n(\tau - \tau')\right) G_{\mathbf{k}\sigma}(\omega_n),$$

$$F_{\mathbf{k}\sigma}(f; \tau - \tau') = -\langle T_\tau \tilde{d}_{f\sigma}(\tau)\tilde{c}^+_{\mathbf{k}\sigma}(\tau')\rangle = T\sum_{\omega_n} \exp\left(-i\omega_n(\tau - \tau')\right) F_{\mathbf{k}\sigma}(f; \omega_n). \qquad (3)$$

Для получения системы уравнений, определяющей введенные функции Грина, существенным оказывается следующее упрощающее задачу обстоятельство. Номинально чистые образцы $HgCr_2Se_4$ обладают проводимостью n-типа с концентрацией носителей $\sim 10^{17}$–10^{18} см$^{-3}$. При таких низких концентрациях зонных электронов (в расчете на один узел концентрация электронов n составляет величину $\sim 10^{-4}$–10^{-3}) влияние последних на состояние локализованной подсистемы пренебрежимо мало [6]. Это означает, например, что температурное поведение намагниченности подсистемы локализованных спинов определяется с хорошей точностью свойствами самой локализованной подсистемы. В то же время спектральные характеристики зонных электронов будут в существенной степени управляться через механизм s–$d(f)$-обменного взаимодействия степенью магнитного упорядочения, а через гибридизационное взаимодействие одноузельными корреляциями. Эти главные эффекты описываются низшими порядками теории возмущений, и учетом только их мы в дальнейшем ограничимся. На диаграммном языке [17–19] отмеченное приближение соответствует учету лишь беспетлевых диаграмм, а при описании методом уравнений движения — расцеплению в высших функциях Грина.

На основании сказанного запишем в отмеченном приближении уравнения для функций Грина:

$$\begin{aligned}(i\omega_n - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} + \mu)G_{\mathbf{k}\sigma}(\omega_n) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_f v_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_f} F_{\mathbf{k}\sigma}(f; \omega_n),\\ (i\omega_n - \tilde{\varepsilon}_{d\sigma} + \mu)F_{\mathbf{k}\sigma}(f; \omega_n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} v^*_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_f} K_\sigma G_{\mathbf{k}\sigma}(\omega_n),\end{aligned} \qquad (4)$$

где перенормированные энергии определяются выражениями

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \sigma JR, \quad \tilde{\varepsilon}_{d\sigma} = \varepsilon_d - \sigma\overline{H}, \quad \sigma = \pm 1/2. \qquad (5)$$

Здесь R обозначает среднее значение z-проекции локализованного спинового момента:

$$R = \frac{1}{N}\sum_f \langle S_f^z \rangle, \tag{6}$$

а $\overline{H}$ — эффективное поле, определяющее расщепление локализованных уровней энергий:

$$\overline{H} = g\mu_B H + I_0 R + J\sigma_c, \tag{7}$$

I_0 — фурье-образ обменного интеграла для $\mathbf{q} = 0$, σ_c — намагниченность коллективизированной подсистемы в единицах μ_B, приходящаяся на один узел. При отмеченных выше значениях концентрации электронов проводимости этой величиной можно пренебречь.

Наличие одноузельных корреляций отражается возникновением множителя K_σ:

$$K_\sigma = \frac{1}{N}\sum_f \langle [d_{f\sigma}, d_{f\sigma}^+]_+ \rangle = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - 2\sigma R + \frac{1}{2}n_d\right), \tag{8}$$

где

$$n_d = \frac{1}{N}\sum_f \langle X_f^{1,1} + X_f^{0,0} + X_f^{-1,-1} \rangle \tag{9}$$

определяет одноузельную концентрацию ионов Cr^{4+}.

Решая систему (4), находим

$$G_{\mathbf{k}\sigma}(\omega_n) = \frac{i\omega_n - \tilde{\varepsilon}_{d\sigma} + \mu}{(i\omega_n - E_{\mathbf{k}\sigma}^- + \mu)(i\omega_n - E_{\mathbf{k}\sigma}^+ + \mu)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_f e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_f} v_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}\sigma}(f; \omega_n) = \frac{K_\sigma |v_{\mathbf{k}}|^2}{(i\omega_n - E_{\mathbf{k}\sigma}^- + \mu)(i\omega_n - E_{\mathbf{k}\sigma}^+ + \mu)}, \tag{10}$$

где миксонный спектр определяется обычными выражениями [13]:

$$E_{\mathbf{k}\sigma}^{\pm} = \frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} + \tilde{\varepsilon}_{d\sigma}) \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} - \tilde{\varepsilon}_{d\sigma}}{2}\right)^2 + K_\sigma |v_{\mathbf{k}}|^2}. \tag{11}$$

Из (11) видно, что имеет место перенормировка параметра гибридизационного взаимодействия, обусловленная учетом одноузельных корреляций. Ввиду важности данного факта в формировании температурных квантовых осцилляций остановимся на физической стороне причины перенормировки. При $T = 0$ ионы Cr^{3+} находятся в состоянии с проекцией спинового момента $m = 3/2$. Поэтому электрон с проекцией спинового момента $\sigma = +1/2$ не может перейти в локализованное состояние (высокоспиновые состояния обладают большей энергией и по этой причине не включены в низкоэнергетический базис ионных состояний). Электрон же с противоположной проекцией спинового момента может перейти в локализованное состояние без всяких ограничений. В результате возникает зависимость эффективной гибридизации от направления спинового момента у электронов, причем гибридизация оказывается подавленной для электронов с $\sigma = +1/2$ в области низких температур.

С математической точки зрения одноузельные корреляции адекватно отражаются алгеброй операторов Хаббарда и в рассматриваемом приближении формально проявляются в виде мультипликативной перенормировки гибридизационного взаимодействия $|v_{\mathbf{k}}|^2 \to |\tilde{v}_{\mathbf{k}\sigma}|^2 = K_\sigma |v_{\mathbf{k}}|^2$. Аналогичная перенормировка имеется и при слэйв-бозонном описании [21], причем K_σ играет роль числа слэйв-бозонов в конденсате. В нашем случае в соответствии с физической ситуацией $K_\uparrow \to 0$, $K_\downarrow \to 1$ при $T \to 0$. При этом в выражении для K_σ мы пренебрегаем концентрацией зонных носителей из-за малости этой величины.

4. ОСЦИЛЛИРУЮЩАЯ ЧАСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Известно, что для рассмотрения эффекта де Гааза–ван Альфена необходимо вычислить шпур статистического оператора, взятого в представлении Ландау [22, 23]. При низкой концентрации электронов проводимости, когда вклад в термодинамические характеристики дают лишь состояния вблизи дна зоны проводимости, оправданным является приближение эффективной массы [22]. В этом случае спектр Ландау может быть записан в виде

$$\varepsilon_{r\sigma}(p) = \left(r + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{p^2}{2m_\parallel} + 2\mu_B\sigma H, \qquad \sigma = \pm 1/2, \tag{12}$$

где $\omega_c = eH/cm_\perp$ — циклотронная частота [22], $m_\perp$ — эффективная масса, соответствующая поперечному (по отношению к вектору $\mathbf{H}$) движению электронов, p — импульс электрона в направлении внешнего магнитного поля, $m_\parallel$ — эффективная масса для продольного движения электрона.

В условиях смешивания коллективизированных и локализованных состояний электронов результирующий спектр электронов без учета квантования Ландау описывается выражением (11). Поскольку для нас существенны лишь состояния с малыми значениями квазиимпульса, то зависимостью параметра гибридизации $v_{\mathbf{k}}$ от $\mathbf{k}$ можно пренебречь. В этом случае, используя квантование по Онзагеру [22], нетрудно убедиться, что спектр электронов в квантующем магнитном поле получается из (11) путем замены $\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} \to \varepsilon_{n\sigma}(p)$. При этом зависимость $E^\pm$ от индексов представления Ландау становится иррациональной. Это обстоятельство приводит к невозможности непосредственного вычисления шпура статистического оператора.

Для преодоления отмеченной трудности в работе [24] авторы предложили использовать методологию Латтинжера [25] в сочетании с техникой контурного интегрирования. В дальнейшем при получении осциллирующей части термодинамического потенциала применяется идеология работы [24].

Введем зависящий от параметра λ полный гамильтониан системы

$$\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{H}_{mix}, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}_{mix}$ — оператор, описывающий процессы гибридизационного взаимодействия (последнее слагаемое гамильтониана (1)). При $\lambda = 1$ гамильтониан (13) совпадает с гамильтонианом (1). Из этого соответствия легко увидеть смысл $\mathcal{H}_0$.

Соответствующий (13) термодинамический потенциал также зависит от параметра λ:

$$\Omega(\lambda) = -T \ln \mathrm{Sp}\left(\exp(-\beta\mathscr{H})\right). \tag{14}$$

Введение температурной матрицы рассеяния [20]

$$S_\lambda(1/T) = T_\tau \exp\left\{-\lambda \int_0^{1/T} \mathscr{H}_{mix}(\tau)d\tau\right\} \tag{15}$$

позволяет, как известно, записать статистический оператор в виде

$$\exp\{-\beta\mathscr{H}(\lambda)\} = \exp\left(-\beta\mathscr{H}_0\right) S_\lambda(1/T) \quad , \quad \beta = 1/T. \tag{16}$$

Из этих соотношений следует точное уравнение:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = \frac{2T}{\sqrt{N}} \sum_{\omega_n} \sum_{f\mathbf{k}\sigma} e^{i\omega_n\delta} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_f} v_\mathbf{k} F_{\mathbf{k}\sigma}(f;\omega_n) \ , \quad \delta \to +0. \tag{17}$$

В рассматриваемом нами приближении неизвестные величины из (17) описываются формулой (10). Поэтому

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = T \sum_{\omega_n \mathbf{k}\sigma} e^{i\omega_n\delta} \frac{2\lambda K_\sigma |v_\mathbf{k}|^2}{(i\omega_n - E^+_{\mathbf{k}\sigma} + \mu)(i\omega_n - E^-_{\mathbf{k}\sigma} + \mu)} \ , \quad \delta \to +0. \tag{18}$$

Для избавления от иррациональной зависимости спектра электронов от квантовых чисел представим электронные пропагаторы в следующей форме:

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} + \mu)^{-1} &= -\int_b^{b+i\infty} \exp\{-s(\tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \mu - i\omega_n)\}\, ds \ , \qquad \omega_n > 0, \\ (i\omega_n - \tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} + \mu)^{-1} &= \int_{b-i\infty}^{b} \exp\{-s(\tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \mu - i\omega_n)\}\, ds \ , \qquad \omega_n < 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $b \to +0$. Используя эти соотношения, формулу (18) можно записать в виде, позволяющем провести в дальнейшем суммирование по индексам представления Ландау:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = T \sum_{\omega_n<0} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \int_{b-i\infty}^{b} \exp\left\{-s\left[\tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \mu - i\omega_n + \lambda^2\psi_\sigma(\omega_n)\right]\right\} 2\lambda\psi_\sigma(\omega_n)ds - \\ - T \sum_{\omega_n>0} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \int_{b}^{b+i\infty} \exp\left\{-s\left[\tilde\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} - \mu - i\omega_n + \lambda^2\psi_\sigma(\omega_n)\right]\right\} 2\lambda\psi_\sigma(\omega_n)ds, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\psi_\sigma(\omega_n) = K_\sigma|v|^2/(i\omega_n - \tilde\varepsilon_{d\sigma} + \mu)$. Здесь, в соответствии со сделанным выше замечанием о малом объеме интересующей нас области $\mathbf{k}$-пространства, мы пренебрегли зависимостью $v_\mathbf{k}$ от $\mathbf{k}$, взяв значение параметра гибридизации в точке экстремума.

Интегрирование уравнения (20) приводит к следующему выражению для Ω:

$$\Omega = \Omega_l - T\sum_{\omega_n<0}\sum_{\mathbf{k}\sigma}\int\limits_{b-i\infty}^{b}\phi_{\mathbf{k}\sigma}(s,\omega_n)\frac{ds}{s} + T\sum_{\omega_n>0}\sum_{\mathbf{k}\sigma}\int\limits_{b}^{b+i\infty}\phi_{\mathbf{k}\sigma}(s,\omega_n)\frac{ds}{s}, \tag{21}$$

где

$$\phi_{\mathbf{k}\sigma}(s,\omega_n) = \exp\left\{-s(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} - \mu - i\omega_n + \psi_\sigma(\omega_n))\right\}\ . \tag{22}$$

Слагаемое Ω_l легко определить из требования равенства

$$\Omega = \Omega_0 = -T\ln \mathrm{Sp}\left(\exp(-\beta\mathscr{H}_0)\right)$$

при нулевом значении параметра гибридизации. Поскольку для дальнейшего значение Ω_l является несущественным, конкретное выражение для Ω_l здесь не приводится.

В квантующем магнитном поле суммирование по $\mathbf{k}$ заменяется суммированием по квантовым числам представления Ландау:

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \left(\frac{eHV}{4\pi^2\hbar c}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{r=0}^{\infty}.$$

Выполняя интегрирование по k_z и суммирование по r, из (21) находим

$$\Omega = \Omega_l + \Omega_+ + \Omega_-, \tag{23}$$

где

$$\Omega_+ = D\sum_{\sigma}\sum_{\omega_n>0}\int\limits_{b}^{b+i\infty}\frac{ds}{s^{3/2}}\frac{\exp\left\{s(i\omega_n + \tilde{\mu}_\sigma - \psi_\sigma(\omega_n))\right\}}{2\,\mathrm{sh}(s\hbar\omega_c/2)},$$

$$\Omega_- = D\sum_{\sigma}\sum_{\omega_n<0}\int\limits_{b-i\infty}^{b}\frac{ds}{s^{3/2}}\frac{\exp\left\{s(i\omega_n + \tilde{\mu}_\sigma - \psi_\sigma(\omega_n))\right\}}{2\,\mathrm{sh}(s\hbar\omega_c/2)}, \tag{24}$$

$$D = \frac{TVeH\sqrt{2\pi m_\|}}{(2\pi\hbar)^2 c}, \qquad \tilde{\mu}_\sigma = \mu + 2\sigma\mu_B H + \sigma JR\ .$$

Дальнейшие преобразования связаны с выделением из ω осциллирующей части термодинамического потенциала. Поскольку точка $s=0$ является точкой ветвления, сделаем разрез плоскости комплексной переменной s вдоль полуоси отрицательных действительных значений s. После этого контуры интегрирования замыкаются во втором и третьем квадрантах для Ω_+ и Ω_- соответственно. Интегралы по верхним и нижним берегам разреза дают вклады в монотонную составляющую термодинамического потенциала [26]. Осциллирующая часть $\Omega_\sim$ определяется полюсами, расположенными по мнимой оси при $s\hbar\omega_c/2 = \pm ik\pi$. После проведения соответствующих вычислений получим

$$\Omega_\sim = \frac{TV(\hbar\omega_c)^{3/2} m_c\sqrt{m_\|}}{2\pi^2\hbar^3}\times$$
$$\times\sum_{\sigma}\sum_{\omega_n>0}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{2\pi k}{\hbar\omega_c}\omega_n\alpha_{n\sigma}\right\}\cos\left\{\frac{2\pi k}{\hbar\omega_c}\tilde{\mu}_{n\sigma} + \varphi_\sigma\right\}. \tag{25}$$

В этом выражении

$$\alpha_{n\sigma} = 1 + \Gamma_{n\sigma}\ , \qquad \Gamma_{n\sigma} = K_\sigma |v|^2 \{\omega_n^2 + (\tilde{\varepsilon}_{d\sigma} - \mu)^2\}^{-1},$$
$$\tilde{\mu}_{n\sigma} = \mu + \sigma JR + (\tilde{\varepsilon}_{d\sigma} - \mu)\Gamma_{n\sigma}\ , \qquad \varphi_\sigma = 2\pi\sigma k \left(\frac{m_c}{m_0}\right) - \frac{\pi}{4}. \tag{26}$$

Полученные формулы, по существу, описывают влияние магнитного упорядочения на эффект де Гааза–ван Альфена и температурные квантовые осцилляции. Наличие локализованной подсистемы оказывает воздействие на осциллирующую часть термодинамического потенциала и, следовательно, на физические характеристики посредством двух каналов. Во-первых, через механизм гибридизационного взаимодействия наличие локализованных состояний приводит, вообще говоря, к уменьшению амплитуды осцилляций (влияние фактора $\Gamma_{n\sigma}$ в $\alpha_{n\sigma}$). При этом, как уже отмечалось, существенными являются одноузельные корреляции. Во-вторых, s–$d(f)$-обменное взаимодействие приводит к аддитивной добавке в выражении для $\tilde{\mu}_{n\sigma}$. В условиях, когда уровень энергии $\tilde{\varepsilon}_{d\sigma}$ находится вблизи химического потенциала, имеет место пиннинг последнего. В соответствии с этим $\tilde{\mu}_{n\sigma}$ приобретает сильную температурную зависимость, обеспечивающую температурные квантовые осцилляции.

5. НАМАГНИЧЕННОСТЬ КОЛЛЕКТИВИЗИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Из (25) нетрудно получить выражение, описывающее осциллирующую часть намагниченности рассматриваемой системы. Оставляя лишь главные слагаемые, запишем $M_\sim$ в следующей форме:

$$M_\sim = -\sum_\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega_n>0} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} A_{k\sigma}(\omega_n) \sin\left(2\pi k \frac{\mu_{n\sigma}}{\hbar\omega_c} + \phi_\sigma\right), \tag{27}$$

где «парциальные» амплитуды имеют вид

$$A_{k\sigma}(\omega_n) = \left(\frac{TVe\tilde{\mu}_{n\sigma}}{\pi\hbar^2 c}\right)\left(\frac{m_\parallel}{\hbar\omega_c}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\pi k\omega_n\alpha_{n\sigma}}{\hbar\omega_c}\right). \tag{28}$$

Наличие гибридизационного взаимодействия в математическом отношении проявляется в возникновении дополнительного суммирования по мацубаровским частотам. В отсутствие гибридизации ($v = 0$) суммирование по ω_n можно провести в явном виде. Учитывая, что в этом случае $\Gamma_{n\sigma} = 0$, $\alpha_{n\sigma} = 1$, находим

$$M_\sim = -\sum_\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} B\left(\frac{\tilde{\mu}_\sigma}{\hbar\omega_c}\right) \sin\left(2\pi k \frac{\tilde{\mu}_\sigma}{\hbar\omega_c} + \phi_\sigma\right),$$
$$B = \left(\frac{TVe}{2\pi\hbar^2 c}\right)(m_\parallel \hbar\omega_c)^{1/2} \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2 kT}{\hbar\omega_c}\right), \quad \tilde{\mu}_\sigma = \mu + \sigma JR. \tag{29}$$

По этим формулам легко проследить за влиянием s–$d(f)$-обменного расщепления спиновых подзон на температурные квантовые осцилляции. Используя перенормированное выражение для химического потенциала, получим, что фазы осциллирующих функций содержат слагаемое $\sim JR/\hbar\omega_c$. Поскольку параметр J в магнитных полупроводниках может на несколько порядков превышать величину $\hbar\omega_c$, даже небольшие изменения намагниченности локализованной подсистемы могут приводить к заметному изменению отмеченных фаз. Учитывая, что в низкотемпературной области для ферромагнитных полупроводников справедлив закон Блоха, запишем выражение для среднего значения проекции спинового момента локализованной подсистемы:

$$R = S - \left(\frac{T}{4\pi sI}\right)^{3/2} Z_{3/2}(2\mu_B H/T) \ , \tag{30}$$

где

$$Z_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nx)/n^\alpha$$

— обобщенная дзета-функция Римана. В случае малой эффективной массы носителей тока (в $HgCr_2Se_4$ $m^* \sim 0.01m_0$) имеется область температур $\mu_B H \ll T \le \hbar\omega_c$, для которой справедливо следующее разложение:

$$Z_{3/2}(2\mu_B H/T) = \zeta(3/2) - 2\sqrt{2\pi\mu_B H/T} + 35\mu_B H/12T \ , \qquad \zeta(3/2) = 2.612.$$

В этом случае

$$JR = JS - \zeta(3/2)t^{3/2} + 2Jt\sqrt{h} - \frac{35}{48\pi}J\sqrt{th}, \tag{31}$$

где $t = T/4\pi IS$, $h = \mu_B H/SI$. При возрастании температуры величина R уменьшается, что, в соответствии со сказанным, и приводит к температурным квантовым осцилляциям. Другая особенность заключается в наличии слагаемого $\sim \sqrt{h}$. Поэтому полная фаза осцилляций содержит слагаемое

$$2\pi k\sigma \left(\frac{m_c}{m_\parallel}\right)\left(\frac{T}{4\pi sI}\right)\left(\frac{J^2}{\mu_B HSI}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{H}}. \tag{32}$$

Если взять характерные для магнитных полупроводников значения параметров $J \sim 0.5$ эВ, $T \sim 10$ К, $m_c/m_0 \approx 0.01$, $H \approx 50$ кЭ, то получим, что малость первых двух множителей компенсируется большим значением выражения, определяемого последней скобкой. Поэтому вклад отмеченного слагаемого становится существенным и осцилляции намагниченности при изменении внешнего магнитного поля теряют строгую периодичность по $1/H$. В этом нетрудно убедиться, если, учитывая разложение (31), записать осциллирующие множители в виде

$$\sin\left\{2\pi k\left(\frac{a}{H} + \frac{b}{\sqrt{H}}\right)\right\}, \tag{33}$$

где a и b — не зависящие от магнитного поля величины.

При низкой концентрации зонных электронов обменное расщепление спиновых подзон приводит к тому, что электроны заполняют лишь состояния с одним значением проекции спинового момента. Причем знак обменной константы J, влияя на значение поляризации зонных электронов, не сказывается на температурных квантовых осцилляциях.

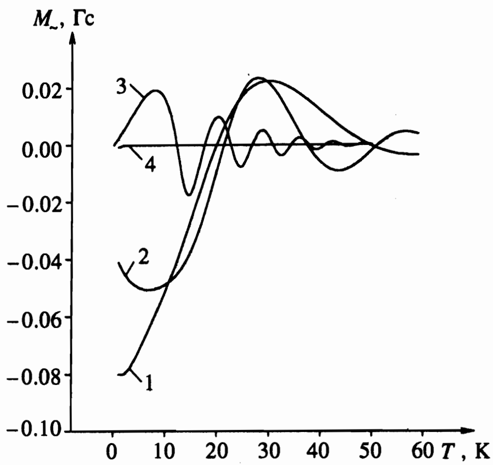

Рис. 1. Температурные квантовые осцилляции намагниченности при различных значениях параметра s–$d(f)$-обменного взаимодействия. J = 0 (*1*), 0.1 (*2*), 0.8 (*3*), −0.8 (*4*) эВ

Совершенно иная ситуация имеет место при учете гибридизационных эффектов. В этом случае знак J может иметь существенное значение для реализации эффекта де Гааза–ван Альфена вообще и температурных квантовых осцилляций, в частности. Чтобы продемонстрировать эту особенность в явном виде, пренебрежем зависимостью от ω_n величины $\Gamma_{n\sigma}$, считая, что главный вклад обусловлен слагаемыми с малыми значениями ω_n. Тогда после суммирования по ω_n получается формула, аналогичная (29), если в ней сделать замену

$$B \to B_\sigma = \left(\frac{TVe}{2\pi\hbar^2 c}\right)(m_{\|}\hbar\omega_c)^{1/2}\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2 kT}{\hbar\omega_c}\alpha_{0\sigma}\right), \qquad \tilde{\mu}_\sigma \to \tilde{\mu}_{0\sigma}\,. \tag{34}$$

Величины $\alpha_{0\sigma}$ и $\tilde{\mu}_{0\sigma}$ определены формулами (26). Видно, что гибридизация через фактор $\alpha_{0\sigma}$ может значительным образом уменьшить амплитуду осцилляций намагниченности зонных электронов. При этом наличие множителя K_σ приводит к отмеченной сильной зависимости эффекта от знака константы s–$d(f)$-обменного взаимодействия. Так, например, при $J > 0$ зонные носители находятся в состояниях со спином «вверх». Поскольку $K_\uparrow \to 0$ при $T \to 0$, в этом случае $\alpha_{0\uparrow} \to 1$ и амплитуда эффекта при низких температурах перенормируется незначительно. Если же $J < 0$, то зонные электроны заполняют подзону со спином «вниз». В этом случае, как уже отмечалось ранее, гибридизационный канал взаимодействия открыт и $\alpha_{0\downarrow} \gg 1$. Это приводит к сильному уменьшению амплитуды осцилляций, так что реальное наблюдение осцилляционных эффектов становится невозможным. Физическая сторона влияния одноузельных корреляций на эффективность гибридизационного взаимодействия обсуждалась ранее.

В более общем случае дополнительный вклад в суммарную фазу осциллирующих слагаемых определяется не только намагниченностью локализованной подсистемы, но и слагаемым $(\tilde{\varepsilon}_{d\sigma} - \mu)\Gamma_{n\sigma}$. Это обстоятельство существенно усложняет результирующее влияние магнитного упорядочения при включении эффектов перемешивания, и для количественного рассмотрения необходимо использовать компьютерные вычисления.

На рис. 1 продемонстрирована зависимость температурных квантовых осцилляций от величины и знака константы s–$d(f)$-обменного взаимодействия J. При проведении вычислений были использованы следующие значения параметров модели: $v = 0.05$ эВ,

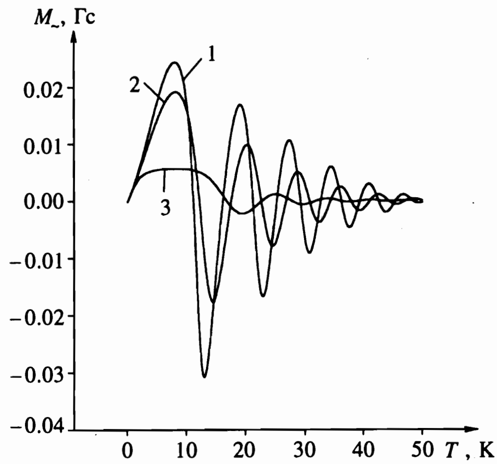

Рис. 2. Влияние гибридизационного взаимодействия на температурные квантовые осцилляции намагниченности зонных электронов. v = 0 (*1*), 0.05 (*2*), 0.1 (*3*) эВ

$m^* = 0.01m_0$, $n = 3 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$, $H = 20$ кЭ. Видно, что при $J = 0$ имеется лишь одно «колебание» $M_{\sim}$ в соответствии с обсуждавшейся выше природой такого поведения. При конечных J имеется дополнительное движение спиновых подзон, что проявляется в нарастании числа осцилляций. Кривые *2* и *3* рассчитаны при положительных значениях параметра J. Как отмечалось ранее, в этом случае гибридизация эффективно подавлена и амплитуда эффекта остается достаточной для экспериментального обнаружения осцилляций. Если же $J < 0$, то коллективизированные состояния сильно гибридизуются с локализованными состояниями и амплитуда осцилляций становится слишком маленькой для экспериментального проявления. Эта особенность хорошо видна из сравнения кривых *3* и *4*. Кривая *4* рассчитана при тех же самых значениях параметров, что и кривая *3*, за исключением того, что был изменен знак J. Видно, что амплитуда осцилляционных эффектов из-за взаимодействий коллективизированной подсистемы электронов с локализованной подсистемой и сильных внутриатомных корреляций весьма критична к знаку J. Удовлетворительное согласие с экспериментальными данными по температурным квантовым осцилляциям имеется при $J = 0.8$ эВ. Это значение J соответствует результатам предыдущих исследований по $HgCr_2Se_4$ [16]. Кроме того, недавние экспериментальные результаты [10] по гигантскому влиянию внешнего магнитного поля на ширину запрещенной зоны $HgCr_2Se_4$ хорошо интерпретируются при выбранном значении J.

Сильная чувствительность эффекта к величине гибридизационного взаимодействия v продемонстрирована на рис. 2, где приведены расчеты по температурным квантовым осцилляциям при трех значениях v и $J = 0.8$ эВ. Остальные параметры такие же, как и на рис. 1. Видно, что гибридизация сильно подавляет амплитуду колебаний и увеличивает расстояние между ближайшими максимумами. Последний эффект связан с противоположной направленностью действия s–$d(f)$-обменного взаимодействия и гибридизации. При возрастании T из-за s–$d(f)$-обменного взаимодействия дно зоны проводимости будет подниматься, тогда как гибридизация вызывает его понижение. Конкуренция отмеченных механизмов приводит к выполаживанию зависимости $M_{\sim}$ от T (см. начальный участок кривой *3* на рис. 2).

Влияние величины магнитного поля на температурные квантовые осцилляции по-

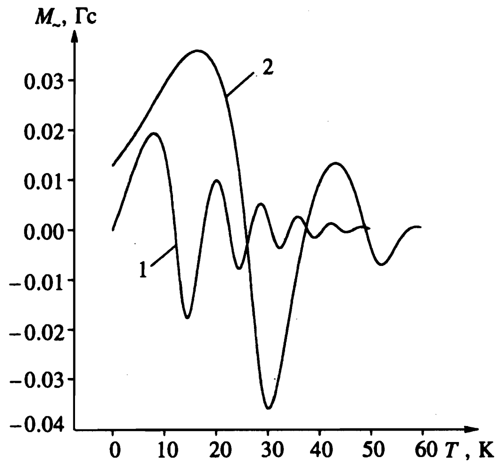

Рис. 3. Влияние магнитного поля на температурные квантовые осцилляции. $H = 20$ (*1*), 60 кЭ (*2*)

казано на рис. 3, где приведены зависимости $M_{\sim}$ от температуры для двух значений магнитного поля $H = 20$ и 60 кЭ. Как и следовало ожидать, амплитуда и период осцилляций увеличиваются при увеличении поля. Такое поведение намагниченности с необходимостью следует из формул (25)–(27).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение остановимся на нескольких моментах. Главным выводом является существование сильного влияния магнитного порядка на квантовые осцилляционные эффекты. Природа такого влияния и важная роль одноузельных корреляций была обсуждена в тексте статьи достаточно подробно. Здесь же отметим, что рассмотренные эффекты могут проявляться не только в магнитных полупроводниках, но и во многих системах с сильными корреляциями. В этом отношении особый интерес представляют, кроме отмеченных ранее цериевых монопниктидов, соединения с промежуточной валентностью и тяжелые фермионы. Многие из них обладают антиферромагнитным порядком, а часть соединений со смешанной валентностью ферромагнитно упорядочены. Большая величина концентрации зонных электронов, по сравнению с рассматриваемой в данной работе, потребует корректировки используемых приближений, однако главные качественные особенности влияния магнитного упорядочения на осцилляционные эффекты, по-видимому, сохранятся.

Известно, что по температурной зависимости амплитуды эффекта де Гааза–ван Альфена определяется эффективная масса. Экспериментальные исследования температурных квантовых осцилляций позволяют получить существенно большую информацию о параметрах электронной структуры. По характеру температурной развертки намагниченности зонных электронов можно, в частности, судить о величине J и интенсивности гибридизационного взаимодействия. Это означает, что экспериментальное исследование температурных квантовых осцилляций можно рассматривать как один из эффективных методов изучения электронного строения вещества.

Авторы выражают благодарность С. Г. Овчинникову и В. К. Чернову за стимулирующее обсуждение результатов эксперимента по температурным квантовым осцилляциям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16075-а), а также Красноярского фонда науки (грант № 5F0158).

Литература

1. B. R. Cooper, R. Siemann, D. Yang et al., in *The Handbook on the Physics and Chemistry of the Actinides*, ed. by A. J. Freeman and G. H. Lander, North Holland, Amsterdam (1985), vol. 2, p. 435.
2. Q. R. Sheng and B. R. Cooper, J. Appl. Phys. **69**, 5472 (1991).
3. T. Kasuya, J. Phys. Soc. Jap. **64**, 1453 (1995).
4. T. Kasuya, T. Suzuki, and Y.Haga, J. Phys. Soc. Jap. **62**, 2549 (1993).
5. З. Метфессель, Д. Маттис, *Магнитные полупроводники*, Мир, Москва (1972).
6. Э. Л. Нагаев, *Физика магнитных полупроводников*, Наука, Москва (1979).
7. С. Г. Овчинников, В. К. Чернов, А. Д. Балаев и др., Письма в ЖЭТФ **64**, 620 (1995).
8. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, ФТТ **23**, 3492 (1981).
9. С. В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, Москва (1971).
10. И. К. Больных, А. В. Головин, Г. Н. Север, Вестн. Моск. ун-та **36**, 100 (1995).
11. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. A **284**, 455 (1964).
12. Л. А. Максимов, К. А. Кикоин, ФММ **28**, 43 (1969).
13. Л. А. Максимов, К. А. Кикоин, ЖЭТФ **58**, 2184 (1970).
14. М. Ш. Ерухимов, С. Г. Овчинников, ФТТ **21**, 351 (1979).
15. С. Г. Овчинников, ФТТ **21**, 2994 (1979).
16. В. К. Чернов, В. А. Гавричков, Н. Б. Иванова и др., ФТТ **28**, 289 (1986).
17. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **70**, 1100 (1976).
18. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитоупорядоченных систем*, Наука, Москва (1987).
19. Ю. А. Изюмов, М. И. Кацнельсон, Ю. Н. Скрябин, *Магнетизм коллективизированных электронов*, Наука, Москва (1994).
20. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
21. P. Coleman, Phys. Rev. B **35**, 5072 (1987).
22. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
23. Д. Шенберг, *Магнитные осцилляции в металлах*, Мир, Москва (1986).
24. A. Wassersman, M. Springford, and A. C. Hewson, J. Phys.: Condens. Matter **1**, 2669 (1989).
25. J. M. Luttinger, Phys. Rev. **121**, 1251 (1961).
26. И. А. Квасников, *Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем*, Изд-во МГУ, Москва (1991).