

## ИОНИЗАЦИЯ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ АТОМА ГЕЛИЯ ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ И РАССЕЯНИИ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФОТОНОВ

*М. Я. Амусья, А. И. Михайлов*

*Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова  
188350, Гатчина Ленинградской обл., Россия*

Поступила в редакцию 16 сентября 1996 г.

Сечения ионизации с возбуждением атома He при поглощении и рассеянии высокоэнергетических фотонов вычисляются аналитически. Предполагается, что электроны движутся в кулоновском поле ядра. Межэлектронное взаимодействие учитывается в первом порядке теории возмущений. Высоочастотные пределы для отношений этих сечений к сечениям одноэлектронной ионизации получаются для  $s$ -возбуждений в поглощении и для  $s$ - и  $p$ -возбуждений в рассеянии.

1. Ионизация с возбуждением атома при поглощении или рассеянии фотона полностью определяется межэлектронным взаимодействием. Атом гелия — простейшая система, в которой такой процесс имеет место. В то время как двухэлектронная ионизация широко исследуется экспериментально и теоретически, процесс, в котором удаление одного атомного электрона сопровождается возбуждением другого электрона того же атома, изучен значительно слабее. Однако этот процесс дает вклад в образование однозарядных ионов и должен учитываться при сравнении теоретических и экспериментальных значений для отношения сечений двукратной и однократной ионизаций.

Будем рассматривать фотоны с энергией  $\omega$ , лежащей в интервале  $I \ll \omega \ll m$  ( $I$  — энергия ионизации атома,  $m$  — масса электрона; используются релятивистские единицы  $\hbar = c = 1$ ). Когда энергия фотона ограничена неравенством  $I < \omega < \eta$ , где  $\eta = m\alpha Z$  — средний импульс связанного электрона ( $\alpha = 1/137$ ,  $Z$  — заряд ядра), фотопоглощение гораздо вероятнее, чем неупругое рассеяние фотона. Вероятности этих процессов сравнимы при  $\omega \sim \eta$ , тогда как в области энергий  $\omega \gg \eta$  доминирует фотонное рассеяние (комpton-эффект). Для атома He граничная частота  $\omega_0 \approx \eta \approx 7$  кэВ.

Аналогично процесс ионизации с возбуждением атома фотонами идет в основном через фотопоглощение при  $I < \omega < \eta$  и через рассеяние при  $\omega > \eta$ .

2. Рассмотрим сначала ионизацию с возбуждением атома гелия при фотопоглощении. Этот процесс изучался ранее в [1–3]. В работах [1, 2] проведен численный расчет с вариационными волновыми функциями начального состояния и с кулоновскими волновыми функциями конечных электронов. В работе [3] сделан аналитический расчет, однако полученная формула содержит ошибку, которая исправлена в настоящей работе. Кроме того, мы получили аналитическую связь между сечениями двукратной ионизации и однократной ионизации с возбуждением.

Выведем формулу для сечения рассматриваемого процесса в первом приближении по межэлектронному взаимодействию, используя в качестве нулевого приближения кулоновские волновые функции. Обозначим через  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  волновые функции электронов в конечном состоянии. Если  $\Psi_2$  относится к связанному состоянию, то при высоких частотах фотона  $\omega \gg I$  энергия вылетевшего электрона  $E_1 \approx \omega$ , импульс  $p_1 = \sqrt{2m\omega} \gg \omega$ ,

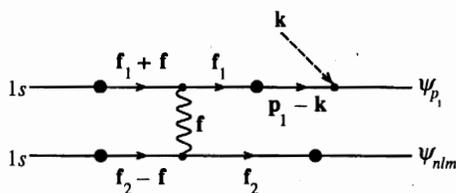


Рис. 1

а в качестве волновой функции  $\Psi_1$  можно взять плоскую волну, поскольку кулоновский параметр для этого электрона мал:

$$\xi_1 = \frac{\eta}{p_1} = \sqrt{\frac{I}{\omega}} \ll 1.$$

Это справедливо и для двукратной ионизации, ибо, как показано в [3], главный вклад в сечение этого процесса определяется областью энергий  $E_1 \sim \omega$ ,  $E_2 \sim I$ .

Диаграмма Фейнмана изучаемого процесса изображена на рис. 1. Линия с черным кружком означает, что соответствующее состояние описывается кулоновской функцией. Волнистая линия изображает взаимодействие между электронами, штриховая линия соответствует фотону. Оценки, сделанные в [3], показывают, что диаграмма рис. 1 есть ведущий член амплитуды процесса. Вклады от других диаграмм содержат дополнительную малость порядка  $I/\omega$ .

Используя для оператора электрон-фотонного взаимодействия обычную градиентную форму  $\mathbf{p}\mathbf{A}/m$ , где  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал фотона,  $\mathbf{p}$  — оператор импульса электрона, и учитывая, что  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} \approx \mathbf{p}_1$  ( $\mathbf{k}$  — импульс фотона,  $p_1 \gg k = \omega$ ), получим амплитуду процесса:

$$F = \frac{e\mathbf{p}_1}{m} \int \langle \mathbf{p}_1 | G(E) | \mathbf{f}_1 \rangle \langle \mathbf{f}_1 + \mathbf{f} | \Psi_{1s} \rangle \frac{1}{f^2} \langle \Psi_2 | \mathbf{f}_2 \rangle \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f} | \Psi_{1s} \rangle \frac{d\mathbf{f} d\mathbf{f}_1 d\mathbf{f}_2}{(2\pi)^9}. \quad (1)$$

Здесь  $E = 2E_{1s} - E_2$  — энергия промежуточного состояния,  $G(E)$  — кулоновская функция Грина электрона,  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации фотона.

Интегралы по  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$  с кулоновскими функциями  $\Psi_{1s}$  легко берутся:

$$\int \langle \mathbf{p}_1 | G(E) | \mathbf{f}_1 \rangle \langle \mathbf{f}_1 + \mathbf{f} | \Psi_{1s} \rangle \frac{d\mathbf{f}_1}{(2\pi)^3} = N \left( -\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \langle \mathbf{p}_1 | G(E) V_{i\nu} | -\mathbf{f} \rangle_{\nu=\eta}, \quad (2)$$

$$N = (\eta^3/\pi)^{1/2}, \quad \eta = m\alpha Z.$$

$$\int \langle \Psi_2 | \mathbf{f}_2 \rangle \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f} | \Psi_{1s} \rangle \frac{d\mathbf{f}_2}{(2\pi)^3} = N \left( -\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \langle \Psi_2 | V_{i\nu} | \mathbf{f} \rangle_{\nu=\eta}. \quad (3)$$

Используя кулоновскую функцию Грина в импульсном представлении [4], после ряда преобразований находим

$$\langle \mathbf{p}_1 | G(E) V_{i\nu} | -\mathbf{f} \rangle = \frac{4ipm\eta}{p_1^4} \int_1^\infty dy \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^{i\epsilon} \langle \mathbf{f} | V_{py+i\nu} | 0 \rangle, \quad (4)$$

$$p = \sqrt{2mE} = i\eta\lambda, \quad \lambda = \sqrt{2 + \varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{E_2}{I}, \quad I = \frac{\eta^2}{2m}, \quad i\xi = \frac{i\eta}{p} = \frac{1}{\lambda}.$$

Величина  $\langle \mathbf{f} | V_{ia} | \mathbf{f}' \rangle$  есть матричный элемент потенциала Юкавы  $\exp(-ar)/r$  в импульсном представлении:

$$\langle \mathbf{f} | V_{ia} | \mathbf{f}' \rangle = \frac{4\pi}{(\mathbf{f} - \mathbf{f}')^2 + a^2}. \tag{5}$$

После подстановки (2)–(4) в (1) амплитуда процесса принимает вид

$$F = BN^2 I_y \left( -\frac{\partial}{\partial \mu} \right) \frac{1}{\mu^2} \langle \Psi_2 | V_{i\eta} - V_{i(\eta+\mu)} | 0 \rangle, \tag{6}$$

$$B = -\frac{4\eta^2 \lambda}{p_1^3} (\mathbf{e}\mathbf{n}_1), \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{p_1}, \quad \mu = \eta(1 + \lambda y),$$

$$I_y = \int_1^\infty dy \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^{1/\lambda}$$

— интегральный оператор, кет-вектор  $|0\rangle$  означает плосковолновое состояние с импульсом равным нулю.

Выражение (6) пригодно как для ионизации с возбуждением, так и для двукратной ионизации. В первом процессе  $\Psi_2$  есть кулоновская функция  $\varphi_{n\ell m}$  связанного состояния. Для нее матричный элемент, входящий в (6), равен

$$\langle \varphi_{n\ell m} | V_{i\nu} | 0 \rangle = 4\pi N_n \frac{(\nu - \eta_n)^{n-1}}{(\nu + \eta_n)^{n+1}} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0}, \tag{7}$$

$$N_n = (\eta_n^3 / \pi)^{1/2}, \quad \eta_n = \eta / n.$$

В случае двукратной ионизации  $\Psi_2$  есть кулоновская волновая функция непрерывного спектра  $\varphi_{p_2}$ . В координатном представлении функция  $\langle \mathbf{r} | \varphi_{p_2} \rangle = \varphi_{p_2}(\mathbf{r})$  имеет асимптотику «плоская волна плюс сходящаяся сферическая волна». Для кулоновской функции континуума существует замкнутое нерелятивистское выражение [5], при использовании которого получаем [6]

$$\langle \varphi_{p_2} | V_{i\nu} | 0 \rangle = 4\pi N_{p_2} \frac{(\nu + ip_2)^{i\xi_2 - 1}}{(\nu - ip_2)^{i\xi_2 + 1}}, \tag{8}$$

$$N_{p_2}^2 = \frac{2\pi\xi_2}{1 - \exp(-2\pi\xi_2)}, \quad \xi_2 = \frac{\eta}{p_2}.$$

Точно такое же выражение получается, если в качестве  $\varphi_{p_2}$  использовать ряд по парциальным волнам. Как и в (7), вклад в матричный элемент (8) дает только волна с  $\ell = 0$ . Таким образом, в нашем приближении переход второго электрона возможен только в  $s$ -состояния дискретного и непрерывного спектров.

Сравнивая (7) и (8), заключаем, что

$$\langle \varphi_{p_2} | V_{i\nu} | 0 \rangle = \left( \frac{N_{p_2}}{N_n} \langle \varphi_{ns} | V_{i\nu} | 0 \rangle \right) \Big|_{n \rightarrow i\xi_2}, \tag{9}$$

где  $\varphi_{ns} \equiv \varphi_{n10}$ .

Подставляя в (6) формулу (7), для амплитуды фотоионизации с возбуждением иона в состояние с главным квантовым числом  $n$  получим

$$F^+(n) = F^+(ns) = 8\eta^{-2} N_n B I_y \chi(y) (1 + \lambda y)^{-3}, \quad (10)$$

$$\chi(y) = \varphi(1, 1) - \varphi(x, 1) - (x - 1)^2 \varphi(x, 2), \quad (11)$$

$$x = 2 + \lambda y, \quad \lambda = \sqrt{2 - n^{-2}},$$

$$\varphi(q, k) = \frac{(q - n^{-1})^{n-k}}{(q + n^{-1})^{n+k}}. \quad (12)$$

Сделав в (10) замену  $N_n \rightarrow N_{p_2}$ ,  $n \rightarrow i\xi_2$ , получим амплитуду двукратной ионизации  $F^{++}$ .

Дифференциальные сечения рассматриваемых процессов, идущих через поглощение фотона, следующие:

$$d\sigma_a^+(n) = (4\pi\alpha)^3 \frac{1}{\omega} \frac{|F^+(n)|^2}{(2\pi)^2} d\mathbf{p}_1 \delta(\omega + 2E_{1s} - E_1 - E_{ns}), \quad (13)$$

$$d\sigma_a^{++} = (4\pi\alpha)^3 \frac{1}{\omega} \frac{|F^{++}|^2}{(2\pi)^5} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \delta(\omega + 2E_{1s} - E_1 - E_2). \quad (14)$$

Черта над  $|F|^2$  означает усреднение по поляризации фотона. Выполняя интегрирование по  $\mathbf{p}_1$  (и по  $\Omega_2$  в (14)), находим полное сечение  $\sigma_a^+(n)$  для однократной ионизации и энергетическое распределение  $d\sigma_a^{++}/d\varepsilon_2$  для двукратной:

$$\beta_a^+(n) = \frac{\sigma_a^+(n)}{\sigma_a^+} = \frac{Q(n)}{Z^2}, \quad (15)$$

$$\beta_a^{++}(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sigma_a^+} \frac{d\sigma_a^{++}}{d\varepsilon_2} = \frac{R_a(\varepsilon_2)}{Z^2}. \quad (16)$$

Здесь  $Z$  — заряд ядра (мы рассматриваем He и He-подобные ионы),  $\sigma_a^+$  — сечение обычного фотоэффекта на атоме гелия в борновском приближении:

$$\sigma_a^+ = \frac{2^8 \pi \alpha}{3m\omega} \left(\frac{I}{\omega}\right)^{5/2}, \quad (17)$$

$$Q(n) = \frac{2^8}{n^3} J^2(n), \quad R_a(\varepsilon_2) = 2^7 J^2(p_2), \quad (18)$$

$$J(n) = \lambda \int_1^\infty dy \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{1/\lambda} \chi(y) (1 + \lambda y)^{-3}, \quad (19)$$

$$J(p_2) = J(n \rightarrow i\xi_2), \quad \xi_2 = \frac{\eta}{p_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (20)$$

Справедливо и обратное соотношение:

$$J(n) = J(p_2 \rightarrow i\eta_n), \quad \eta_n = \eta/n. \quad (21)$$

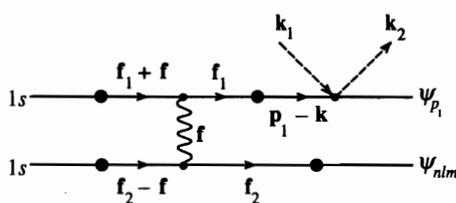


Рис. 2

Отсюда следует связь между  $Q(n)$  и  $R_a(\varepsilon_2)$  :

$$Q(n) = \frac{2}{n^3} R_a(p_2 \rightarrow i\eta_n). \tag{22}$$

Вычислив  $J(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ , найдем асимптотическое поведение  $Q(n)$  :

$$Q(n \gg 1) \approx \frac{0.336}{n^3} = \frac{2R_a(0)}{n^3}. \tag{23}$$

В работе [3] построен график зависимости  $R_a$  от  $\varepsilon_2$ , из которого находим  $R_a(0) = 0.168$ , что совпадает с (23). Однако из табл. 1 этой же работы следует, что  $Q(n) = 0.277/n^3$ , что не удовлетворяет соотношению (23). Поэтому мы заново рассчитали  $\beta_a^+(n)$  по формуле (15) и привели их в табл. 1 наряду с результатами, полученными ранее в [2] для He и  $Li^+$ .

Таблица 1  
Значения  $\beta_a^+(n)$  в %

n	[2]		Настоящая работа	
	He	$Li^+$	He	$Li^+$
2	4.79	1.60	2.31	1.03
3	0.59	0.25	0.43	0.19
4	0.19	0.08	0.16	0.071
5	0.09	0.04	0.076	0.034
6	0.05	0.02	0.043	0.019

Как видно из табл. 1, согласие между численными [2] и аналитическими (настоящая работа) расчетами улучшается при увеличении  $n$  и  $Z$ .

3. Рассмотрим теперь неупругое (комптоновское) рассеяние фотонов в области энергий  $\eta \ll \omega \ll m$ . Двукратная ионизация атома гелия в таком процессе изучалась в [7–12]. Здесь мы продолжим работу [10] и выведем формулы для сечений ионизации с возбуждением в первом порядке по межэлектронному взаимодействию (в [8] приведены только численные значения таких сечений, полученные с использованием импульсного приближения).

Процесс описывается диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 2. Электрон-фотонное взаимодействие дается оператором  $A^2/2m$ . Как показано в [9, 10], эта диаграмма является определяющей для двукратной ионизации через комптоновское рассеяние.

ионизации главный вклад дает та часть электронного энергетического спектра, где второй электрон получает энергию  $E_2 \sim I$ . Энергия падающего фотона (за вычетом энергии ионизации и возбуждения) распределяется между рассеянным фотоном и вылетевшим электроном.

Пусть  $E_1$  и  $\mathbf{p}_1$  — энергия и импульс вылетевшего электрона,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты падающего и рассеянного фотонов. В [10] показано, что рассеянные фотоны уносят преимущественно энергию  $\omega_2 \approx \omega_1 - \omega_1^2/m$ . Так как  $E_1 = p_1^2/2m \approx \omega_1 - \omega_2 \approx \omega_1^2/m$ , то  $p_1 \sim \omega_1$  и кулоновский параметр  $\xi_1 = \eta/p_1 \approx \eta/\omega_1 \ll 1$ . Это позволяет в качестве волновой функции эжектированного электрона использовать плоскую волну с импульсом  $\mathbf{p}_1$ .

Обозначим  $\sigma_c^+$  сечение обычного комптоновского рассеяния на атоме He,  $\sigma_c^+(n\ell)$  — сечение неупругого рассеяния фотона на гелии, при котором один электрон покидает атом, а второй переходит в возбужденное состояние  $n\ell$  иона  $\text{He}^+$ . На основании формул (11), (29) и (45) работы [10] находим отношение этих сечений:

$$\beta_c^+(n\ell) = \frac{\sigma_c^+(n\ell)}{\sigma_c^+} = (4\pi\alpha)^2 \left( -\frac{\partial}{\partial E} \right) \sum_m \langle \phi_{n\ell m} | G(E) | \phi_{n\ell m} \rangle, \quad (24)$$

$$\langle \phi_{n\ell m} | = N^2 \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} \int \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} \langle \varphi_{n\ell m} | V_{i v_1} | \mathbf{f} \rangle \frac{1}{f^2} \langle -\mathbf{f} | V_{i v_2}, \quad (25)$$

$$N^2 = \eta^3/\pi, \quad E = 2E_{1s} - E_{n\ell}.$$

После взятия производных нужно положить

$$v_1 = v_2 = \eta = m\alpha Z.$$

Как и в [10], аппроксимируем кулоновскую функцию Грина  $G(E)$  тремя членами штурмовского разложения [13]:

$$G(E) \approx M \left\{ \frac{|\Psi_{10}\rangle\langle\Psi_{10}|}{\lambda-1} + \frac{|\Psi_{20}\rangle\langle\Psi_{20}|}{\lambda-1/2} + \sum_{\mu} \frac{|\Psi_{21\mu}\rangle\langle\Psi_{21\mu}|}{\lambda-1/2} \right\} = G_{10} + G_{20} + G_{21}, \quad (26)$$

$$M = -\frac{\eta^2\lambda^2}{4\alpha Z}, \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = -\frac{E}{I} = 2 - n^{-2}.$$

Функции  $\Psi_{ik}$  в координатном представлении имеют вид

$$\langle \mathbf{r} | \Psi_{10} \rangle = e^{-\gamma r}, \quad \langle \mathbf{r} | \Psi_{20} \rangle = (1 - \gamma r) e^{-\gamma r}, \quad \langle \mathbf{r} | \Psi_{21\mu} \rangle = \gamma(\varepsilon_{\mu} \mathbf{r}) e^{-\gamma r}, \quad (27)$$

$\gamma = \eta\lambda$ ,  $\varepsilon_{\mu}$  — циклические орты,  $\mu = 0, \pm 1$ .

Подставляя (26) в (24), получаем

$$\beta_c^+(n\ell) = \frac{(4\pi\alpha)^2}{2I\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} M \sum_m \left( \frac{|\langle \phi_{n\ell m} | \Psi_{10} \rangle|^2}{\lambda-1} + \frac{|\langle \phi_{n\ell m} | \Psi_{20} \rangle|^2}{\lambda-1/2} + \sum_{\mu} \frac{|\langle \phi_{n\ell m} | \Psi_{21\mu} \rangle|^2}{\lambda-1/2} \right). \quad (28)$$

При подстановке (25) в (28) возникают следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle -f|V_{i\eta}|\Psi_{10}\rangle &= \langle f|V_{i\nu}|0\rangle, \quad \nu = \eta + \gamma, \\ \langle -f|V_{i\eta}|\Psi_{20}\rangle &= \left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \langle f|V_{i\nu}|0\rangle, \\ \langle -f|V_{i\eta}|\Psi_{21\mu}\rangle &= i\gamma(\epsilon_{\mu} \nabla_k) \langle f|V_{i\nu}|\mathbf{k}\rangle \Big|_{\mathbf{k} \rightarrow 0}. \end{aligned} \tag{29}$$

С помощью (29) находим

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{10}\rangle &= N^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \frac{1}{\nu^2} \langle \varphi_{n\ell m}|V_{i\eta} - V_{i(\eta+\nu)}|0\rangle, \\ \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{20}\rangle &= \left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{10}\rangle, \\ \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{21\mu}\rangle &= i\gamma N^2 \frac{\partial^2}{\partial \nu_1 \partial \nu} \frac{\epsilon_{\mu} \nabla_k}{\nu} \int_0^1 dt \langle \varphi_{n\ell m}|V_{i\lambda}|\mathbf{k}t^2\rangle \Big|_{\mathbf{k} \rightarrow 0}, \\ \Lambda &= \nu_1 + \nu t. \end{aligned} \tag{30}$$

Используя далее формулу (7) и определение (12), приходим к результату:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{10}\rangle &= \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \frac{8N_n}{\eta^2(\lambda + 1)^3} \chi_i, \quad i = 1, 2, \\ \langle \phi_{n\ell m}|\Psi_{21\mu}\rangle &= \delta_{\ell 1} \delta_{m \mu} \frac{32N_n \lambda}{\eta^2(\lambda + 1)^3} \chi_3, \\ \chi_1 &= \varphi(1, 1) - \varphi(a, 1) - (a - 1)^2 \varphi(a, 2), \\ \chi_2 &= -\frac{2\lambda - 1}{\lambda + 1} \chi_1 + 2\lambda(\lambda + 1)^2 (2\lambda + 3) \varphi(a, 3), \\ \chi_3 &= -\frac{\chi_1}{(\lambda + 1)^2} + \frac{1}{2} (\lambda + 1)(2\lambda + 3) \varphi(a, 3), \\ a &= \lambda + 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Как видно из (31), второй электрон может быть возбужден только в *s*- и *p*-состояния иона гелия. Это — следствие нашего приближения для функции Грина. Вероятность перехода в другие состояния может быть найдена, если в штурмовском разложении функции Грина оставить большее число членов. Однако, как утверждается в [8], переходы в такие состояния маловероятны, и мы их не рассматриваем.

Подставим (31) в (28) и возьмем производную по  $\lambda$ . Для переходов в *ns*- и *np*-состояния получим

$$\beta_c^+(ns) = \frac{Q_{10} + Q_{20}}{Z^2}, \quad \beta_c^+(np) = \frac{Q_{21}}{Z^2}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} Q_{10} &= \frac{2^{10}}{n^3} \frac{\lambda \chi_1^2}{(\lambda + 1)^6 (\lambda - 1)} \left( \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{6}{\lambda + 1} - \frac{2}{\lambda} - \frac{2\chi_1'}{\chi_1} \right), \\ Q_{20} &= \frac{2^{10}}{n^3} \frac{\lambda \chi_2^2}{(\lambda + 1)^6 (\lambda - 1/2)} \left( \frac{1}{\lambda - 1/2} + \frac{6}{\lambda + 1} - \frac{2}{\lambda} - \frac{2\chi_2'}{\chi_2} \right), \\ Q_{21} &= \frac{2^{14}}{n^3} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\lambda^3 \chi_3^2}{(\lambda + 1)^6 (\lambda - 1/2)} \left( \frac{1}{\lambda - 1/2} + \frac{6}{\lambda + 1} - \frac{4}{\lambda} - \frac{2\chi_3'}{\chi_3} \right), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\chi'_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial \lambda}.$$

После взятия производной по  $\lambda$  можно использовать определение  $\lambda = \sqrt{2 - n^{-2}}$  для упрощения выражений  $\chi_i$  и  $\chi'_i$ .

Для  $n \gg 1$  справедливы следующие асимптотические формулы:

$$Q_{10} = \frac{0.196}{n^3}, \quad Q_{20} = -\frac{0.00585}{n^3}, \quad Q_{21} = \frac{0.0263}{n^3}. \quad (35)$$

Значения  $Q_{ik}$  для конечных  $n$ , вычисленные по формулам (34), приведены в табл. 2. В табл. 3 представлены результаты расчетов  $\beta_c^+(n\ell)$  для He по формулам (33) и результаты работы [8].

Таблица 2

Значения  $Q_{ik}$  в %

$n$	2	3	4	5	6
$Q_{10}$	6.01	1.05	0.376	0.179	9.93(-2)*
$-Q_{20}$	0.126	2.74(-2)	1.04(-2)	5.09(-3)	2.87(-3)
$Q_{21}$	0.479	0.115	4.51(-2)	2.24(-2)	1.27(-2)

Примечание: \* Число в скобках есть степень 10.

Таблица 3

Значения  $\beta_c^+(n\ell)$  в %

$n$	[8]		Настоящая работа	
	$ns$	$np$	$ns$	$np$
2	2.60	0.163	1.47	0.120
3	0.292	0.0316	0.256	0.0288
4	0.094	0.0119	0.091	0.0113
5	0.043	0.0057	0.043	0.0056
6	0.023	0.0032	0.024	0.0032

Заметим, что результаты численных и аналитических расчетов в случае рассеяния фотонов (табл. 3) находятся в лучшем согласии, чем в случае фотопоглощения (табл. 1).

Как и в случае фотоэффекта, при комптоновском рассеянии существует простая связь между сечениями двукратной ионизации  $\sigma_c^{++}$  и ионизации с возбуждением  $\sigma_c^+(n)$ :

$$\sigma_c^+(n) = \sigma_c^+(ns) + \sigma_c^+(np) = \frac{2}{n^3} \frac{d\sigma_c^{++}}{d\varepsilon_2}(p_2 \rightarrow i\eta_n) \quad (36)$$

или

$$Q_{ik} = \frac{2}{n^3} R_{ik}(p_2 \rightarrow i\eta_n), \quad (37)$$

где величины  $R_{ik}$  определяют отношение  $\beta_c^{++}(\varepsilon_2)$  сечений двукратной и однократной ионизаций при комптоновском рассеянии:

$$\beta_c^{++}(\varepsilon_2) = \frac{d\sigma_c^{++}}{d\varepsilon_2} \frac{1}{\sigma_c} = \frac{R_c(\varepsilon_2)}{Z^2} = \frac{R_{10} + R_{20} + R_{21}}{Z^2}, \quad (38)$$

$$\sigma_c^+ = 2\sigma_T \left(1 - \frac{2\omega_1}{m}\right), \quad \sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2,$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское сечение,  $r_e$  — классический радиус электрона.

Величины  $R_{ik}$  соответствуют тем же членам  $G_{ik}$  штурмовского разложения кулоновской функции Грина (26), что и величины  $Q_{ik}$ . В [10] приведены только численные значения  $R_{ik}(\varepsilon_2)$  при разных  $\varepsilon_2$ . Чтобы получить их аналитические выражения, достаточно домножить  $Q_{ik}$  (34) на  $n^3/2$  и затем заменить  $n$  на  $i\xi_2$ :

$$R_{ik}(\varepsilon_2) = \left(\frac{n^3}{2} Q_{ik}\right)_{n \rightarrow i\xi_2}. \quad (39)$$

Справедливость (37) легко установить при  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$Q_{ik}(n \gg 1) = \frac{2}{n^3} R_{ik}(0). \quad (40)$$

Взяв значения  $R_{ik}(0)$  из табл.2 работы [10], получим для  $Q_{ik}$  выражения (35) настоящей работы.

Эта работа частично была поддержана Отделом фундаментальных наук департамента энергии США по контракту W-31-109-ENG-38.

## Литература

1. R. L. Brown, Phys. Rev. A 1, 341 (1970).
2. A. Dalgarno and H. R. Sadeghpour, Phys. Rev. A 46, R3591 (1992).
3. М. Я. Амусья, Е. Г. Друкрев, В. Г. Горшков, and М. П. Казачков, J. Phys. B 18, 1248 (1975).
4. В. Г. Горшков, ЖЭТФ 47, 352 (1964).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
6. V. G. Gorshkov, A. I. Mikhailov, and V. S. Polikanov, Nucl. Phys. 55, 273 (1964).
7. K. Hino, P. M. Bergstrom, Jr., and J. H. Macek, Phys. Rev. Lett. 72, 1620 (1994).
8. T. Surić, K. Pisk, B. A. Logan, and R. H. Pratt, Phys. Rev. Lett. 73, 790 (1994).
9. М. Я. Амусья and А. И. Михайлов, Phys. Lett. A 199, 209 (1995).
10. М. Я. Амусья and А. И. Михайлов, J. Phys. B 28, 1723 (1995).
11. T. Surić, K. Pisk, and R. H. Pratt, Phys. Lett. A 211, 289 (1996).
12. L. Spielberger, O. Jagutzki, B. Krässig et al., Phys. Rev. Lett. 76, 4685 (1996).
13. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манакон, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).