РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА — *ТОМ 111, ВЫПУСК 5*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД — *МАЙ, 1997*
МОСКВА — «НАУКА»

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ДЕЙСТВИИ W_3-ГРАВИТАЦИИ

©1997

*Д. Р. Караханян**

Ереванский институт физики
375036, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 24 августа 1996 г.

Предлагается новый метод интегрирования аномальных тождеств Уорда и нахождения эффективного действия, его применение продемонстрировано на примере двумерной супергравитации и W_3-гравитации. Вводится оператор, сопоставляющий каждой физической величине ее тождество Уорда — величину, преобразующуюся без аномальных членов, которая может быть последовательным образом положена равной нулю. Предлагается ковариантное действие для полей материи, взаимодействующих с гравитационным и W_3-гравитационным фоном.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бурный интерес к W_N-алгебрам [1], возникший сразу же после их открытия Замолодчиковым, был обусловлен следующими причинами: определяющие соотношения W_N-алгебр в отличие от обычных алгебр Ли мультилинейны и к тому времени в математике систематически не были исследованы. Крупным достижением на этом пути было использование редукции Дринфельда–Соколова [2], которая сводит W-алгебры к алгебрам Ли и связывает их со второй гамильтоновой структурой обобщенных иерархий Кортевега–де Вриза; W_N-алгебры содержат в себе алгебру Вирасоро в качестве подалгебры. В контексте теории струн появление последней является отражением инвариантности относительно репараметризаций мировой поверхности струны. Расширение этой симметрии до инвариантности относительно преобразований W-гравитации приводит к теории W-струн в подходе Полякова, т. е. к теории взаимодействия полей материи с

* E-mail: karakhan@vx2.yerphi.am

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии, Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1997 г.

гравитационным (спин 2) и W-гравитационным (спин N) фоновыми полями. Таким образом, симметрия относительно преобразований W-гравитации является управляющим принципом, позволяющим выписывать взаимодействия для полей со спинами ≥ 2 хотя бы в двух измерениях.

Однако прогресс на этом пути давался с большим трудом: была сформулирована киральная теория взаимодействия материи с W-гравитацией [3], которая обобщена на некиральный случай [4] с серьезными техническими усложнениями — действие теории оказалось бесконечно нелинейным по полям материи и нелокальным, так что дальнейший его анализ сильно затруднен. Путем вычисления функционального интеграла по полям материи с центральным зарядом c, взаимодействующим с W_3-гравитацией, было найдено также индуцированное действие W_3-гравитации в виде разложения по $1/c$ [5].Теми же авторами [6] индуцированное действие киральной W_3-гравитации — прямой аналог действия Полякова [7] для обычной гравитации — было найдено путем интегрирования аномалии в пределе $c \to \infty$.

Исследование W-гравитации было бы несомненно более успешным, если бы удалось прояснить геометрический смысл W-преобразований. Этот аспект проблемы был исследован в работах [8].

В настоящее время с исследованием W-гравитации связываются надежды на преодоление барьера сильной связи $c = 1$ для системы «конформная материя + $2d$-гравитация», что возможно позволит уйти от дробной размерности, установленной Книжником, Поляковым и Замолодчиковым [9] для квантовой гравитации в режиме слабой связи. Непосредственное обобщение результата [9] на случай W-гравитации без полей материи было получено в работе [10].

В данной работе предлагается метод интегрирования двумерных аномальных тождеств Уорда. Его применение проиллюстрировано на примере двумерной гравитации, супергравитации и W_3-гравитации. Суть метода состоит в следующем: выражая аномальные токи через свободные поля по формулам бозонизации, можно понизить степень этих дифференциальных уравнений и проинтегрировать их. Полученное таким образом эффективное действие правильно воспроизводит аномалию. При переходе от одной схемы регуляризации к другой к нелокальному эффективному действию добавляются локальные контрчлены, появление которых меняет вид тождеств Уорда и их симметрию. Бозонизованные поля, будучи свободными в одной схеме регуляризации, в другой будут связаны тем, что удовлетворяют соответствующим тождествам Уорда. При переходе от киральной вейль-инвариантной схемы регуляризации к диффеоморфизмно-инвариантной схеме локальные контрчлены добавляются таким образом, чтобы кинетическая часть эффективного действия была иварианта как относительно диффеоморфизмов, так и относительно вейлевских преобразований. Остальная, топологическая, часть эффективного действия фиксируется из условия, что полное действие, будучи диффеоморфизмно-инвариантным по отношению к вейлевским преобразованиям, симметрично в квантовом или в проективном смысле, т. е. преобразуется как 1-коцикл.

В разд. 2 и 3 применение этого метода демонстрируется на хорошо известных примерах обычной и ($N = 1$)-супергравитации и вводится дифференциальный оператор R, сопоставляющий каждой физической величине ее тождество Уорда. Этот оператор по сути является оператором Славнова, который в применении к $2d$-гравитации рассматривался в [11] с дополнительным неоднородным членом, уничтожающим аномальный вклад в законе преобразования.

В разд. 4 эти выкладки обобщаются на случай киральной W_3-гравитации и полученный результат полностью согласуется с работой [6].

В разд. 5 предлагается ковариантное действие для материи, взаимодействующей с некиральной W_3-гравитацией, которое помимо репараметризационной и W-диффеоморфизмной симметрий обладает также W-вейлевской инвариантностью и может служить кинетической частью эффективного действия W_3-гравитации, вычисленного в диффеоморфизмно-инвариантной регуляризации.

2. ДВУМЕРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ

Действие Полякова [7], полученное им в качестве эффективного действия, индуцированного киральной материей, взаимодействующей с двумерной гравитацией, есть детерминант двумерного оператора Лапласа, вычисленный в регуляризации, сохраняющей вейлевскую и половину репараметризационной симметрии. Наличие конформной аномалии проявляется в явной зависимости действия Полякова от одной из репараметризационных функций. Иначе, это эффективное действие может быть вычислено путем интегрирования соответствующего вариационного уравнения — тождества Уорда.

Тождество Уорда теории двумерной гравитации в светоподобной калибровке хорошо известно:

$$R_T = \left(\overline{\partial} - h\partial - 2\partial h\right) T - \partial^3 h = 0. \tag{2.1}$$

Оно выражает аномальный закон сохранения тензора энергии-импульса системы T. Поле h в этом выражении обозначает ненулевую компоненту метрики, остающуюся после фиксации светоподобной калибровки. По отношению к преобразованиям

$$\begin{aligned} \delta h &= \left(\overline{\partial} - h\partial + \partial h\right) \epsilon, \\ \delta T &= \left(\partial^3 + 2T\partial + \partial T\right) \epsilon \end{aligned} \tag{2.2}$$

оно ковариантно:

$$\delta_\epsilon R_T = (\epsilon\partial + 2\partial\epsilon) R_T. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) выражает условие самосогласованности Весса–Зумино. Если воспользоваться формулой бозонизации и параметризовать тензор энергии-импульса при помощи скалярного поля:

$$T = \partial^2\varphi - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2, \tag{2.4}$$

то порядок производной аномального члена в (2.1) можно понизить:

$$\begin{aligned} R_\varphi &= \left(\overline{\partial} - h\partial\right) \varphi - \partial h = 0, \\ \delta_\epsilon R_\varphi &= \epsilon\partial R_\varphi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.1) с (2.4) и (2.5), получим

$$R_T = \partial^2 R_\varphi - \partial\varphi\, \partial R_\varphi. \tag{2.6}$$

Закон преобразования скалярного поля φ также аномален:

$$\delta\varphi = \partial\epsilon + \epsilon\partial\varphi. \tag{2.7}$$

Если постулировать для поля φ скобку Пуассона свободного поля

$$\{\partial\varphi(x); \partial\varphi(x')\} = \delta'(x - x'), \tag{2.8}$$

то ϵ-вариация любой величины A будет определяться ее скобкой Пуассона с тензором энергии-импульса:

$$\delta_\epsilon A(x) = \int d^2x'\epsilon(x')\left\{T(x'); A(x)\right\}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что это определение для поля φ совпадает с (2.7). Скобка тензора T с самим собой имеет вид

$$-\left\{T(x); T(x')\right\} = \delta'''(x - x') + \left[T(x) + T(x')\right]\delta'(x - x'). \tag{2.10}$$

Хотя тензор энергии-импульса и выражается через поле φ, выразить через φ калибровочное поле h из уравнения (2.5) локальным образом не удается. Чтобы сделать это, необходимо ввести величину, удовлетворяющую неаномальному тождеству Уорда, т. е. преобразующуюся как скаляр. Изгнать аномалию из тождеств Уорда можно, вводя скалярное поле f:

$$\varphi = \ln\partial f. \tag{2.11}$$

Его закон преобразования и тождество Уорда имеют вид

$$\begin{gathered}\delta_\epsilon f = \epsilon\partial f,\\ R_f = \left(\bar\partial - h\partial\right) f = 0,\\ \delta_\epsilon R_f = \epsilon\partial R_f.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Теперь, когда все величины выражаются через функцию f локальным образом, мы можем проинтегрировать вариационное уравнение для эффективного действия теории, которое также выражается через f локально и дается формулой Полякова [7]. Подробные выкладки мы приводим в следующем разделе для более интересного случая супергравитации.

Сравнивая формулы (2.3), (2.6) и (2.12), можно заключить, что операции взятия калибровочной вариации δ и тождества Уорда R коммутативны на полях T, φ и f.

Связь R_f с R_φ и R_T дается формулами

$$\begin{aligned}R_\varphi &= \partial R_f/\partial f,\\ R_T &= (\partial^3 + 2T\partial + \partial T)(R_f/\partial f).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Таким образом, мы видим, что оператор R сопоставляет каждой физической величине X ковариантное выражение R_X — ее тождество Уорда, которое в силу ковариантности по отношению к калибровочным преобразованиям может быть последовательным образом положено равным нулю. В силу же отсутствия в теории соответствующих величин подходящей размерности это выражение необходимо положить равным нулю. Сравнивая (2.13) с (2.11) и (2.6) с (2.4), видим, что оператор R подчиняется правилу Ньютона–Лейбница. Это свойство оператора R позволяет сразу выписывать тождества Уорда для корреляционных функций от полей T, φ и др.

Если провести преобразование Лежандра

$$Z[h] = \Gamma[h] + \int d^2xTh, \tag{2.14}$$

то уравнение (2.1) перепишется в виде

$$(\partial^3 + 2T\partial + \partial T)\frac{\delta\Gamma}{\delta T} = -\bar{\partial}T, \tag{2.15}$$

где стоящий в левой части (2.15) оператор Бола [12] является ковариантизацией ∂^3 на произвольную риманову поверхность и содержит проективную связность, в качестве которой можно взять T. Эта форма записи выражает ковариантность тождества Уорда (2.1) подобно условию согласованности Весса–Зумино (2.3).

3. ПРОСТАЯ СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

В этом разделе мы обобщим все выкладки предыдущего раздела на случай простой супергравитации и вычислим эффективное действие теории.

Результат Полякова на случай (1.0)-супергравитации был обобщен Поляковым и Замолодчиковым [13]. Соответствующее обобщение действия Полякова будет представлять эффективное действие, полученное в регуляризации, сохраняющей вейлевскую и супервейлевскую симметрии, а также половину суперкоординатной симметрии [14]. Нетривиальная зависимость действия от остальных координатных функций (четной и нечетной) определяется суперконформной аномалией.

Тождества Уорда двумерной супергравитации в светоподобной калибровке записываются в виде [6]

$$\begin{aligned} R_T &= (\bar{\partial} - h\partial - 2\partial h)\,T - \left(\frac{1}{2}\chi\partial + \frac{3}{2}\partial\chi\right) S - \partial^3 h = 0, \\ R_S &= \left(\bar{\partial} - h\partial - \frac{3}{2}\partial h\right) S - \frac{1}{2}\chi T - \partial^2\chi = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

По отношению к преобразованиям

$$\begin{aligned} \delta h &= (\bar{\partial} - h\partial + \partial h)\,\epsilon + \frac{1}{2}\kappa\chi, \\ \delta\chi &= \left(\bar{\partial} - h\partial + \frac{1}{2}\partial h\right)\kappa + \left(\epsilon\partial - \frac{1}{2}\partial\epsilon\right)\chi, \\ \delta T &= (\partial^3 + 2T\partial + \partial T)\,\epsilon + \left(\frac{1}{2}\kappa\partial + \frac{3}{2}\partial\kappa\right) S, \\ \delta S &= \left(\epsilon\partial + \frac{3}{2}\partial\epsilon\right) S + \left(\partial^2 + \frac{1}{2}T\right)\kappa \end{aligned} \tag{3.2}$$

они ковариантны:

$$
\begin{aligned}
&\delta R_T = (\epsilon\partial + 2\partial\epsilon)R_T + \left(\frac{1}{2}\kappa\partial + \frac{3}{2}\partial\kappa\right) R_S,\\
&\delta R_S = \left(\epsilon\partial + \frac{3}{2}\partial\epsilon\right) R_S + \frac{1}{2}\kappa R_T,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

т. е. тождество Уорда R_A преобразуется так же, как и сама величина A, но без аномальных членов.

Переходя к скалярному мультиплету полей материи (φ, λ)

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi = (\partial + \partial\varphi)\epsilon + \frac{1}{2}\kappa\lambda,\\
&\delta\lambda = \left(\epsilon\partial + \frac{1}{2}\partial\epsilon\right)\lambda + \left(\partial + \frac{1}{2}\partial\varphi\right)\kappa,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

связанных с токовыми полями правилом

$$
\begin{aligned}
&T = \partial^2\varphi - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}\lambda d\lambda,\\
&S = \partial\lambda - \frac{1}{2}\lambda\partial\varphi,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

порядок производных в (3.1) можно понизить. На поля φ и λ оператор R действует следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&R_\varphi = \left(\overline{\partial} - h\partial\right)\varphi - \frac{1}{2}\chi\lambda - \partial h,\\
&R_\lambda = \left(\overline{\partial} - h\partial - \frac{1}{2}\partial h\right)\lambda - \frac{1}{2}\chi\partial\varphi - \partial\chi.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Мы видим, что, как и в предыдущем разделе, калибровочные поля h и χ не выражаются через φ и λ локально.

Поля φ и λ образуют алгебру свободных полей в скобке Пуассона:

$$
\begin{aligned}
&\{\partial\varphi(x); \partial\varphi(x')\} = \delta'(x - x'),\\
&\{\lambda(x); \lambda(x')\} = -\delta(x - x').
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Тогда относительно этой скобки соотношения (3.5) предполагают для токовых полей следующую алгебру:

$$
\begin{aligned}
&-\{T(x); T(x')\} = \delta'''(x - x') + \left(T(x) + T(x')\right)\delta'(x - x'),\\
&-\{T(x); S(x')\} = \left(S(x) + \frac{1}{2}S(x')\right)\delta'(x - x'),\\
&-\{S(x); S(x')\} = \delta''(x - x') - \frac{1}{2}T(x)\delta(x - x').
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Чтобы параметризовать калибровочные поля удобным образом, необходимо ввести скалярный мультиплет, не имеющий аномальной размерности (f, ψ):

$$\begin{aligned} \delta f &= \epsilon\partial f + \frac{1}{2}\kappa\psi, \\ \delta\psi &= \epsilon\partial\psi + \frac{1}{2}\partial\epsilon\psi + \frac{1}{2}\kappa\partial f, \\ R_f &= \left(\overline{\partial} - h\partial\right) f - \frac{1}{2}\chi\psi, \\ R_\psi &= \left(\overline{\partial} - h\partial - \frac{1}{2}\partial h\right)\psi - \frac{1}{2}\chi\partial f. \end{aligned} \tag{3.9}$$

С полями материи этот мультиплет связан следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln\partial f + \frac{\psi\partial\psi}{(\partial f)^2}, \\ \lambda &= 2\frac{\partial\psi}{\partial f} - \psi\frac{\partial^2 f}{(\partial f)^2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Такую сложную связь из условия появления соответствующих членов в законах преобразования усмотреть очень сложно, но задачу здесь упрощает переход к суперполям.

Поскольку в суперполевой формулировке киральной супергравитации вспомогательные поля отсутствуют, то смысл всех предыдущих выражений от перехода к суперполям не меняется:

$$\begin{aligned} R_U &= \left(\overline{\partial} - H\partial - \frac{1}{2}DHD - \frac{3}{2}\partial H\right)U - \partial^2 DH, \\ \delta U &= \left(D\partial^2 + \frac{3}{2}U\partial - \frac{1}{2}DUD + \partial U\right)E, \\ \delta H &= \left(\overline{\partial} - H\partial - \frac{1}{2}DHD + \partial H\right)E, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $U = S + \theta T$, $H = h + \theta\chi$, $D = \partial_\theta + \theta\partial$, $E = \epsilon + \theta\kappa$, θ — антикоммутирующая координата. Связь токового суперполя U с суперполем материи $\Phi = \varphi + \theta\lambda$ такова:

$$U = D\partial\Phi - \frac{1}{2}D\Phi\partial\Phi, \tag{3.12}$$

соответственно,

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \partial E + E\partial\Phi + \frac{1}{2}DED\Phi, \\ R_U &= D\partial R_\Phi - \frac{1}{2}D\Phi\partial R_\Phi - \frac{1}{2}\partial\Phi D R_\Phi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Скалярный мультиплет $F = f + \theta\psi$,

$$\delta F = E\partial F + \frac{1}{2}DEDF, \tag{3.14}$$

с суперполем Φ связан выражением

$$\Phi = \ln \partial F + \frac{DF}{\partial F} D \ln \partial F, \tag{3.15}$$

связь же соответствующих тождеств Уорда дается формулой

$$\dot{R}_\Phi = \left[\frac{DF}{(\partial F)^2}\partial D + \left(\frac{1}{\partial F} - 2\frac{DFD\partial F}{(\partial F)^3}\right)\partial - \frac{D\partial F}{(\partial F)^2} D\right] R_F. \tag{3.16}$$

Формулы, связывающие токовые тождества Уорда с R_f и R_ψ, таковы:

$$\begin{aligned} R_T &= (\partial^3 + 2T\partial + \partial T)\left(\frac{R_f}{\partial f} - R_f\frac{\psi\partial\psi}{(\partial f)^3} + \frac{\psi R_\psi}{(\partial f)^2}\right) - \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}S\partial + \frac{1}{2}\partial S\right)\left(2\frac{R_\psi}{\partial f} - \frac{\psi}{\partial f}\partial\left(\frac{R_f}{\partial f}\right) - 2\frac{\partial\psi R_f}{(\partial f)^2}\right), \\ R_S &= \left(\partial^2 + \frac{1}{2}T\right)\left(2\frac{R_\psi}{\partial f} - \frac{\psi}{\partial f}\partial\left(\frac{R_f}{\partial f}\right) - 2\frac{\partial\psi R_f}{(\partial f)^2}\right) - \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}S\partial + \partial S\right)\left(\frac{R_f}{\partial f} - R_f\frac{\psi\partial\psi}{(\partial f)^3} + \frac{\psi R_\psi}{(\partial f)^2}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Если при помощи преобразования Лежандра перейти от статистической суммы к эффективному действию

$$\Gamma[T, S] = Z[h, \chi] - \int d^2x(hT + \chi S), \tag{3.18}$$

то тождество Уорда преобразуется к виду

$$(\partial^2 D + 3U\partial + DUD + 2\partial U)\frac{\delta\Gamma}{\delta U} = 0, \tag{3.19}$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} (\partial^3 + 2T\partial + \partial T)\frac{\delta\Gamma}{\delta T} + \left(\frac{3}{2}S\partial + \frac{1}{2}\partial S\right)\frac{\delta\Gamma}{\delta S} &= -\overline{\partial}T, \\ \left(\partial^2 + \frac{1}{2}T\right)\frac{\delta\Gamma}{\delta T} + \left(\frac{3}{2}S\partial + \partial S\right)\frac{\delta\Gamma}{\delta S} &= -\overline{\partial}S, \end{aligned} \tag{3.20}$$

т. е. возникает суперсимметричный оператор Бола, который также описан в работе [12]. В таком виде ковариантность тождеств Уорда относительно калибровочных преобразований (3.2), которая эквивалентна условиям Весса–Зумино для аномалии, становится явной. Обратимся теперь к задаче нахождения статистической суммы теории:

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int d^2x(T\delta h + S\delta\chi) = \int d^2x d\theta U\delta H = \\ &= -\int d^2x d\theta E\left(\overline{\partial} - H\partial - \frac{1}{2}DHD + \frac{1}{2}\partial H\right)U. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Мы узнаем в подынтегральном выражении тождество Уорда R_U без аномального члена. В киральной формулировке, т. е. в регуляризации, сохраняющей половину репараметризационной и вейлевскую симметрии, а также их суперпартнеров, поля φ и λ связаны условием (3.10) и соответствующие тождества Уорда R_φ и R_λ обращаются в нуль. В регуляризации же, сохраняющей суперкоординатную симметрию, групповые параметры f и ψ исчезают и поля φ и λ свободны от связей, но выражения R_φ и R_λ продолжают играть важную роль. Умножая R_U на E и интегрируя по частям, получим

$$\int d^2x d\theta R_U E = \int E\left(D\partial - \frac{1}{2}D\Phi\partial - \frac{1}{2}\partial\Phi D\right) R_\Phi =$$
$$= \int d^2x\, d\theta R_\Phi \left(D\partial E + \frac{1}{2}\partial(ED\Phi) + \frac{1}{2}D(E\partial\Phi)\right) = \int d^2x d\theta R_\Phi D\delta\Phi. \qquad (3.22)$$

Если «ошибиться» дважды: взять в качестве δZ не (3.21), а (3.22) и пренебречь связью между H и Φ, выражаемой равенством R_Φ нулю, то можно проинтегрировать это вариационное уравнение и получить для $Z[H]$ выражение

$$Z[H] = -\frac{1}{2}\int d^2x d\theta \left(\overline{\partial}\Phi - H\partial\Phi - 2\partial H\right) D\Phi. \qquad (3.23)$$

Нетрудно проверить, что выражение (3.17) правильно воспроизводит аномалию. Таким образом, взяв суперполе Φ независимым, мы можем воспроизвести аномалию, добавляя к действию соответствующий член «руками».

Этот вывод вполне согласуется с нашими представлениями о «перекачке» аномалии из одной схемы регуляризации в другую. В работе [15] подробно описан процесс «перекачки» конформной аномалии в гравитационную в теории двумерной гравитации.

4. W_3-ГРАВИТАЦИЯ

Отличие теории W_3-гравитации от рассмотренных случаев состоит в том, что ее киральная формулировка является не только наиболее удобной, но и единственно приемлемой для квантового анализа. Некиральная версия, сформулированная в [4], содержит бесконечное число производных полей материи и слишком сложна даже на классическом уровне.

Тождества Уорда киральной W_3-гравитации имеют вид

$$\begin{aligned} R_T &= \left(\overline{\partial} - h\partial - 2\partial h\right) T - (2b\partial + 3\partial b)W - \partial^3 h, \\ R_W &= \left(\overline{\partial} - h\partial - 3\partial h\right) W + (2b\partial^3 + 9\partial B\partial^2 + 15\partial^2 b\partial + 10\partial^3 b + 16bT\partial + 16\partial bT)T - \partial^5 h. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Здесь через b обозначена единственная ненулевая компонента симметричного тензора третьего ранга — калибровочного поля W-гравитации, партнера метрики по мультиплету, — а W — соответствующий ток спина 3, партнер тензора энергии-импульса. Киральные общекоординатные и W-преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \delta T &= \left(\partial^3 + 2T\partial + \partial T\right)\epsilon + 3W\partial\lambda + 2\partial W\lambda, \\ \delta W &= \partial W\epsilon + 3W\partial\epsilon + (\partial^5 + 10T\partial^3 + 15\partial T\partial^2 + 9\partial^2 T\partial + 2\partial^3 T + 16T^2\partial + 16T\partial T)\lambda, \\ \delta h &= \left(\overline{\partial} - h\partial + \partial h\right)\epsilon + 2\lambda\partial^3 b - 3\partial\lambda\partial^2 b + 3\partial^2\lambda\partial b - 2\partial^3 b + 16T(\lambda\partial b - b\partial\lambda), \\ \delta b &= \epsilon\partial b - 2\partial\epsilon b + \left(\overline{\partial} - h\partial + 2\partial h\right)\lambda. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Величины R_T и R_W относительно преобразований (4.2) ковариантны:

$$\begin{aligned} &\delta R_T = (\epsilon\partial + 2\partial\epsilon)R_T + (2\lambda\partial + 3\partial\lambda)R_W, \\ &\delta R_W = (\epsilon\partial+3\partial\epsilon)R_W+(2\lambda\partial^3+9\partial\lambda\partial^2+15\partial^2\lambda\partial+10\partial^3\lambda+32T\partial\lambda+16T\lambda\partial+16\lambda\partial T)R_T. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, мысля себе R в качестве дифференциального оператора, можно заключить, что (4.3) устанавливает универсальное соотношение

$$[\delta, R] = 0 \tag{4.4}$$

на токовых полях T и W.

Преобразования (4.2) произвольной величины A генерируются токами T и W при помощи скобок Пуассона по правилу

$$\delta A = \int d^2x \left[\epsilon(x)\left\{T(x); A\right\} + \lambda(x)\left\{W(x); A\right\}\right]. \tag{4.5}$$

Сами преобразования (4.2), записанные в этих скобках имеют вид

$$\begin{aligned} &-\{T(x); T(x')\} = \delta'''(x-x') + \left[T(x) + T(x')\right]\delta'(x-x'), \\ &-\{T(x); W(x')\} = \left[W(x) + 2W(x')\right]\delta'(x-x'), \\ &-\{W(x); T(x')\} = \left[2W(x) + W(x')\right]\delta'(x-x'), \\ &-\{W(x); W(x')\} = \delta^{V}(x-x') + 5\left[T(x) + T(x')\right]\delta'''(x-x') + \\ &+ 8\left[T^2(x) + T^2(x')\right]\delta'(x-x') - 3\left[T''(x) + T''(x')\right]\delta'(x-x'). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Эту алгебру можно воспроизвести, выражая токовые поля через поля материи φ и ψ, образующие алгебру свободных полей:

$$\begin{aligned} &\{\varphi'(x); \varphi'(x')\} = \delta'(x-x'), \\ &\{\varphi'(x); \psi'(x')\} = 0, \\ &\{\psi'(x); \psi'(x')\} = -\delta'(x-x'), \end{aligned} \tag{4.7}$$

если определить

$$\begin{aligned} &T(x) = \partial^2\varphi - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\psi)^2, \\ &W(x) = \partial^3\psi - 3\partial\varphi\partial^2\psi - \partial^2\varphi\partial\psi + 2(\partial\varphi)^2\partial\psi + \frac{2}{3}(\partial\psi)^3. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Это соответствует следующему закону преобразования полей материи:

$$\begin{aligned} &\delta\varphi = \partial\epsilon + \partial\varphi\epsilon - 4\lambda\partial\varphi\partial\psi + 2\lambda\partial^2\psi - \partial\lambda\partial\psi, \\ &\delta\psi = \epsilon\partial\psi + \partial^2\lambda + 3\partial\lambda\partial\varphi + 2\lambda\left[\partial^2\varphi + (\partial\varphi)^2 + (\partial\psi)^2\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Аномальные уравнения движения мультиплета материи имеют вид

$$\begin{aligned} &R_\varphi = \bar\partial\varphi - h\partial\varphi + \partial b\partial\psi - 2b(\partial^2\psi - 2\partial\varphi\partial\psi) - \partial h, \\ &R_\psi = \bar\partial\psi - h\partial\psi - 3\partial b\partial\varphi - 2b\left[\partial^2\varphi + (\partial\varphi)^2 + (\partial\psi)^2\right] - \partial^2 b. \end{aligned} \tag{4.10}$$

По отношению к ϵ- и λ-диффеоморфизмам эти соотношения также ковариантны:

$$\begin{aligned}\delta R_\varphi &= (\epsilon\partial - 4\lambda\partial\psi\partial)R_\varphi + (2\lambda\partial^2 - \partial\lambda - 4\lambda\partial\varphi\partial)R_\psi,\\ \delta R_\psi &= (\epsilon\partial + 4\lambda\partial\psi)R_\psi + (3\partial\lambda\partial + 2\lambda\partial^2 + 4\lambda\partial\varphi\partial)R_\varphi.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Это соотношение устанавливает справедливость равенства (4.4) также и при действии на мультиплет материи.

Тождества (4.1) легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned}R_T &= (\partial^2 - \partial\varphi)R_\varphi + \partial\psi\partial R_\psi,\\ R_W &= (4\partial\varphi\partial\partial\psi\partial - \partial\psi\partial^2 - 3\partial^2\psi\partial)R_\varphi + \left[\partial^3 - 3\partial\varphi\partial^2 + 2(\partial\varphi)^2\partial + 2(\partial\psi)^2\partial\right]R_\psi.\end{aligned} \tag{4.12}$$

ϵ- и λ-преобразования на мультиплетах токов $\{T, W\}$, материи $\{\varphi, \psi\}$ и калибровочных полей $\{h, b\}$ образуют замкнутую алгебру:

$$\begin{aligned}&[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta(\epsilon_3 = \epsilon_2\partial\epsilon_1 - \epsilon_1\partial\epsilon_2),\\ &[\delta(\epsilon_1), \delta(\lambda_2)] = \delta(\lambda_3 = 2\lambda_2\partial\epsilon_1 - \epsilon_2\partial\lambda_1),\\ &[\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2)] = \delta\big(\epsilon_3 = 16T(\lambda_2\partial\lambda_1 - \lambda_1\partial\lambda_2) +\\ &\qquad + 2\lambda_2\partial^3\lambda_1 - 3\partial\lambda_2\partial^2\lambda_1 + 3\partial^2\lambda_2\partial\lambda_1 - 2\partial^3\lambda_2\lambda_1\big).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Статистическая сумма теории вычисляется так же, как и в случае теории супергравитации: умножая соотношения (4.12) на ϵ и λ соответственно, получим

$$\int d^2x(\epsilon R_T + \lambda R_W) = \int d^2x(R_\varphi\delta\partial\varphi - R_\psi\delta\partial\psi). \tag{4.14}$$

Если бы тождества (4.1) не содержали аномальных членов, то левая часть равенства (4.14) представляла бы собой вариацию статистической суммы со знаком минус. Если бы, кроме того, поля φ и ψ были бы свободными и не зависели от калибровочных полей h и b посредством связей (4.10), то правая часть (4.14) представляла бы собой полную вариацию следующего выражения:

$$\begin{aligned}Z[h,b] &= \int d^2x\left(\frac{1}{2}\partial\varphi\left(\bar\partial\varphi - h\partial\varphi\right) - \frac{1}{2}\partial\psi\left(\bar\partial\psi - h\partial\psi\right) - \partial h\partial\varphi + \right.\\ &\left. + \partial^2 b\partial\psi + b\left[2(\partial\varphi)^2\partial\psi - \partial^2\varphi\partial\psi - 3\partial\varphi\partial^2\psi + \frac{2}{3}(\partial\psi)^3\right]\right) =\\ &= \int d^2x\left[\frac{1}{2}\left(\bar\partial\varphi\partial\varphi - \bar\partial\psi\partial\psi\right) + hT + bW\right].\end{aligned} \tag{4.15}$$

Выражение (4.15) представляет собой действие полей материи, взаимодействующей с киральной $2d$-гравитацией и W_3-гравитацией. Вариация этого выражения по отношению к (4.2) и (4.9) равна

$$\delta Z = \int d^2x\left[h\partial^3\epsilon + b\partial^5\lambda + 16\lambda(T^2\partial b + bT\partial T)\right]. \tag{4.16}$$

От квантовой аномалии минимального вида это выражение отличается наличием членов квадратичных по T. Такое расхождение обусловлено различиями в определении закона преобразования поля h под действием λ-диффеоморфизмов. Закон преобразования (4.2) мотивирован замыканием алгебры (4.13) на полях h и b, а также условием самосогласованности Весса–Зумино — при этом выполняются соотношения (4.3).

Мотивировкой другого определения $\delta_\lambda h$ могут служить следующие рассуждения: если провести преобразование Лежандра

$$Z[h,b] = \Gamma[T,W] + \int d^2x(hT + bW), \tag{4.17}$$

то в выражениях для R_T и R_W возникнут операторы Бола L_3 и L_5:

$$R_T = \bar{\partial}T + (\partial^3 + 2T\partial + \partial T)\frac{\delta\Gamma}{\delta T} + (3W\partial + 2\partial W)\frac{\delta\Gamma}{\delta W}, \tag{4.18}$$

$$R_W = \bar{\partial}W + (3W\partial + \partial W)\frac{\delta\Gamma}{\delta T} + \big(\partial^5 + 10T\partial^3 + 15\partial T\partial^2 + \\ + (9\partial^2T + 16T^2)\partial + (2\partial^3T + 16T\partial T)\big)\frac{\delta\Gamma}{\delta W}.$$

Таким образом,

$$\delta Z = \int d^2x(T\delta h + W\delta b) = -\int d^2x\left[\epsilon\partial^3h + \lambda\partial^5b - 16\lambda(T^2 + bT\partial T)\right]. \tag{4.19}$$

Чтобы получить аномалию минимального вида, имеет смысл определить $\delta_\lambda h$ с $\delta_{extra}h = -8T(\lambda\partial b - b\partial\lambda)$.

Полностью изгнать аномалию из законов преобразования и тождеств Уорда можно, если перейти к переменным (f,g), образующим скалярный мультиплет:

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln\partial f + \frac{1}{2}\ln(1 - \hat{\partial}^2 g), \\ \psi &= \gamma^{-1}\ln(1 + \hat{\partial}^2 g), \end{aligned} \tag{4.20}$$

где

$$\hat{\partial} \equiv \frac{1}{\partial f}\partial \quad \text{и} \quad \gamma^2 = -12.$$

Закон преобразования полей f и g имеет вид

$$\begin{aligned} \delta f &= \epsilon\partial f - \gamma\left[\lambda\partial^2 f + \frac{1}{2}\partial\lambda\partial f + \frac{2}{3}\lambda\partial f\partial\ln(1 + \hat{\partial}^2 g)\right], \\ \delta g &= \epsilon\partial g - \frac{1}{2}\gamma\partial\lambda\partial g - \gamma\lambda\left[(\partial f)^2 - \partial^2 g + \frac{2}{3}\partial g\partial\ln(1 + \hat{\partial}^2 g) + 2\partial g\frac{\partial^2 f}{\partial f}\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Соответственно, тождества Уорда имеют вид

$$\begin{aligned} R_f &= \bar{\partial}f - h\partial f + \frac{\gamma}{2}\partial b\partial f + \gamma b\left[\partial^2 f + \frac{2}{3}\partial f\partial\ln(1 + \hat{\partial}^2 g)\right], \\ R_g &= \bar{\partial}g - h\partial g + \frac{\gamma}{2}\partial b\partial f + \gamma b\left[2\partial g\frac{\partial^2 f}{\partial f} + \frac{2}{3}\partial f\partial\ln(1 + \hat{\partial}^2 g) - (\partial f)^2 - \partial^2 g\right]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Полагая R_f и R_g равными нулю, можно выразить калибровочный мультиплет через f и g:

$$b = \gamma^{-1}\frac{\overline{\partial}g - \left(\overline{\partial}f/\partial f\right)\partial g}{(\partial f)^2(1+\partial^2 g)}, \tag{4.23}$$

$$h = \frac{\overline{\partial}f}{\partial f} + \frac{\gamma}{2}\partial b + \gamma b\left[\frac{\partial^2 f}{\partial f} + \frac{2}{3}\partial\ln(1+\partial^2 g)\right]. \tag{4.24}$$

С точностью до перенормировки γ и λ эти формулы совпадают с решением, найденным авторами работы [6], которые интерпретировали W_3-гравитацию в качестве связанной $SL(3,R)$-теории Весса–Зумино. Подставляя (4.20) и (4.21) в (4.15), мы воспроизведем киральное действие из работы [6], которое следует интерпретировать как эффективное действие, индуцированное квантовыми флуктуациями полей материи φ и ψ, взаимодействующих с мультиплетом киральной W_3-гравитации по закону (4.15). Аномальная зависимость этого действия от «координатных» функций f и g обусловлена W-гравитационной аномалией. Продолжая аналогию со случаем $2d$-гравитации и супергравитации, можно было бы предположить, что это действие должно получаться в результате выбора регуляризации, сохраняющей вейлевскую и W-вейлевскую симметрии, а также половину координатных симметрий ковариантного действия, описывающего взаимодействие полей материи с обычной и W-гравитацией.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая некоторые закономерности, присущие обычной гравитации, нам удалось найти эффективное действие киральной W_3-гравитации. Более интересным, однако, представляется продолжить аналогию дальше и найти W-аналог действия Лиувилля, а именно, ковариантное действие, описывающее взаимодействие полей материи с гравитационным и W-гравитационным фоном.

Чтобы понять природу и свойства симметрий, которыми обладает теория W-гравитации, целесообразно вначале обратиться к классической теории.

В качестве классической калибровочной теории W-гравитация была впервые рассмотрена в работе [3]. Некиральная формулировка этой теории затем была представлена в [4]. Авторы этой статьи стартуют с действия

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\partial_+\varphi\partial_-\varphi. \tag{5.1}$$

Относительно обычных диффеоморфизмов $\delta\varphi = \epsilon^\alpha\partial_\alpha\varphi$ вариация (5.1)

$$dS = \int d^2x\left[\partial_\alpha(\epsilon^\alpha\partial_+\varphi\partial_-\varphi) + \partial_+\epsilon^-(\partial_-\varphi)^2 + \partial_\epsilon^+(\partial_+\varphi)^2\right] \tag{5.2}$$

исчезает, если $\partial_+\epsilon^- = \partial_-\epsilon^+ = 0$. Чтобы обобщить эту симметрию до локальной, необходимо в соответствии с методом Нетер добавить к (5.1) токи

$$t_{++} = \frac{1}{2}(\partial_+\varphi)^2, \quad t_{--} = \frac{1}{2}(\partial_-\varphi)^2,$$

умноженные на соответствующие калибровочные поля kh_{++} и kh_{--}. Здесь k — параметр разложения, который будет положен равным единице в конце вычислений. После бесконечного числа шагов действие (5.1) может быть суммированием геометрической прогрессии приведено к виду

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x \frac{(\partial_+\varphi - kh^{--}\partial_-\varphi)(\partial_-\varphi - kh^{++}\partial_+\varphi)}{1-k^2h^{++}h^{--}}. \tag{5.3}$$

Тогда авторы [4] замечают, что действие (5.1) для n реальных полей инвариантно относительно голоморфных W-диффеоморфизмов. Действительно, относительно преобразований

$$\delta\varphi^i = d^{ijk}\left(\lambda^{++}\partial_+\varphi^j\partial_+\varphi^k + \lambda^{--}\partial_-\varphi^j\partial_-\varphi^k\right) \tag{5.4}$$

действие преобразуется как

$$\delta S = \frac{1}{3}\int d^2x d_{ijk}\left(\partial_+\varphi^i\partial_+\varphi^j\partial_+\varphi^k\partial_-\lambda^{++} + \partial_-\varphi^i\partial_-\varphi^j\partial_-\varphi^k\partial_+\lambda^{--}\right). \tag{5.5}$$

Замкнутость алгебры голоморфных ϵ- и λ-диффеоморфизмов налагает на симметричные константы d следующую связь [3]:

$$d^{k(ij}d^{l)mk} = \delta^{(ij}\delta^{l)m}. \tag{5.6}$$

Действие (5.1) может быть сделано инвариантным относительно локальных ϵ- и λ-преобразований при помощи нетеровской процедуры путем введения соответствующих калибровочных полей h^{++}, h^{--}, b^{+++} и b^{---}. К сожалению, в данном случае инвариантное действие может быть просуммировано только при помощи вспомогательных полей $F^i_\pm$:

$$S = \int d^2xe\left[\partial_+\varphi^i\partial_-\varphi^i + F^i_+F^i_- + F^i_+\left(\partial_-\varphi^i - \frac{1}{3}d_{ijk}b^{+++}F^j_+F^k_+\right) + \right.$$
$$\left. + F^i_-\left(\partial_+\varphi^i - \frac{1}{3}d_{ijk}b^{---}F^j_-F^k_-\right)\right]. \tag{5.7}$$

После исключения вспомогательных полей они заменяются на «гнездовые» ковариантные производные:

$$F^i_\pm \to \hat{\partial}\varphi^i_\pm = e^\alpha_\pm\partial_\alpha\varphi - b^{\mp\mp\mp}d_{ijk}\hat{\partial}_\pm\varphi^j\hat{\partial}_\pm\varphi^k, \tag{5.8}$$

действие становится бесконечно нелинейным. Чтобы избежать трудностей и изначально действовать в ковариантном формализме, следует ввести больше калибровочных полей, чем это требуется в подходе Нетер, а именно, в случае чистой гравитации вместо двух компонент h^{++} и h^{--} ввести тензор $h_{\alpha\beta}$ целиком. Тогда процедура Нетер завершается после первого шага, и инвариантное действие имеет вид

$$S = \int d^2xh^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi.$$

Мы ожидаем появления новой симметрии, которая скомпенсировала бы лишнюю степень свободы, связанную с h^{+-}-компонентой метрики. Налагая условие бесследовости тензора энергии-импульса теории,

$$T^\alpha_\alpha = T_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = 0, \quad T_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}, \tag{5.9}$$

мы требуем, чтобы теория была вейль-инвариантной, так как решением уравнения

$$h^{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0$$

является функционал вида $S = S(\sqrt{h}\,h^{\alpha\beta})$, что равносильно инвариантности относительно преобразований $h^{\alpha\beta} \to e^{\sigma} h^{\alpha\beta}$. Так что окончательным выражением для инвариантного действия будет

$$S = \int \sqrt{h}\, d^2x h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi. \tag{5.10}$$

В случае W_3-гравитации мы предлагаем ввести h^{+-}, b^{++-} и b^{--+} компоненты калибровочных полей, чтобы дополнить их до полных тензоров $h^{\alpha\beta}$, $b^{\alpha\beta\gamma}$. Нетеровская процедура завершается после первого же шага и инвариантное действие имеет вид

$$S = \int d^2x(h^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}), \tag{5.11}$$

где

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \partial_\alpha\psi\partial_\beta\varphi\right),$$

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{3}\left(\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi\partial_\gamma\psi + \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\varphi + \partial_\alpha\psi\partial_\beta\varphi\partial_\gamma\varphi + \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\psi\right).$$

Инвариантность действия (5.11) подразумевается относительно w-диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda\varphi = -4\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\psi, \\ &\delta_\lambda\psi = 2\lambda^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\right), \end{aligned} \tag{5.12}$$

определенных с бесследовым параметром λ: $\lambda^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = 0$. Вариация действия (5.11) относительно преобразований (5.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^2x \big[&\delta_\lambda b^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma} - \omega_{\alpha\beta\gamma}\left(h^{\alpha\mu}\nabla_\mu\lambda^{\beta\gamma} + h^{\beta\mu}\nabla_\mu\lambda^{\alpha\gamma} + h^{\gamma\mu}\nabla_\mu\lambda^{\alpha\beta}\right) - \\ &- \left(h^{\alpha\mu}\lambda^{\beta\gamma} + h^{\beta\gamma}\lambda^{\alpha\mu}\right)\nabla_\mu\omega_{\alpha\beta\gamma} + \delta_\lambda h^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} + 16b^{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\mu\nu}\times \\ &\times \left(2t_{\gamma\nu}\nabla_\mu t_{\alpha\beta} - t\beta\gamma\nabla_\alpha t_{\mu\nu}\right) + 16b^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha\lambda^{\mu\nu}\left(2t_{\beta\mu}t_{\gamma\nu} - t_{\beta\gamma}t_{\mu\nu}\right)\big]. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Определяя λ-вариации калибровочных полей таким образом, чтобы обращались в нуль коэффициенты перед токами $t_{\alpha\beta}$ и $\omega_{\alpha\beta\gamma}$, мы добьемся инвариантности действия (5.11). Преобразования (5.12) представляют собой конкретную реализацию констант d^{ijk} в (5.4) для случая двух полей. Такое ограничение сделано неслучайно: дело в том, что условие замкнутости ковариантной алгебры W-преобразований

$$\delta\varphi^i = d^{ijk}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi^j\partial_\beta\varphi^k \tag{5.14}$$

в случае трех или более полей налагает на константы d^{ijk} дополнительные ограничения, которые совместно с условиями (5.6) имеют только нулевое решение. Что касается замыкания алгебры на калибровочных полях, то, как и в более простом случае двумерной супергравитации [16], она замыкается только с использованием уравнений движения.

Таким образом, чтобы добиться инвариантности относительно обычных и λ-диффеоморфизмов, мы ввели семь калибровочных полей и хотим теперь наложить связи на теорию так, чтобы получить трехпараметрическую группу симметрии, которая компенсировала бы три лишних степени свободы.

Налагая условия бесследовости тензора энергии-импульса и W-тока теории

$$h^{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0, \quad h^{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta b^{\alpha\beta\gamma}} = 0, \tag{5.15}$$

решение которых имеет вид $S = S(\hat{h}^{\alpha\beta}, \hat{b}^{\alpha\beta\gamma})$, где величины

$$\hat{h}^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{h}\,h^{\alpha\beta}, \quad \hat{b}^{\alpha\beta\gamma} \equiv b^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\left(h^{\alpha\beta}b^{\gamma\mu\nu} + h^{\beta\gamma}b^{\alpha\mu\nu} + h^{\alpha\gamma}b^{\beta\mu\nu}\right)$$

инвариантны относительно преобразований Вейля и W-Вейля соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} &h^{\alpha\beta} \to e^{\sigma}h^{\alpha\beta} \quad \text{(Вейль)}, \\ &b^{\alpha\beta\gamma} \to b^{\alpha\beta\gamma} + \left(\zeta^{\alpha}h^{\beta\gamma} + \zeta^{\beta}h^{\alpha\gamma} + \zeta^{\gamma}h^{\alpha\beta}\right) \quad (W\text{-Вейль}), \end{aligned} \tag{5.16}$$

мы уменьшим число степеней свободы. Однако сравнение вариации $\delta S(\hat{h}, \hat{b})$ с (5.13) показывает, что симметрия действия относительно λ-диффеоморфизмов несовместна с вейлевской инвариантностью, так как если вариация $\delta_{\lambda}t_{\alpha\beta}$ бесследова, то след вариации $\delta_{\lambda}\omega_{\alpha\beta\gamma}$ не равен нулю, и, следовательно, она не может быть приравнена бесследовой вариации $\delta\hat{h}$. Таким образом, вейлевская инвариантность несовместна с W-симметрией даже на классическом уровне, и для редукции числа степеней свободы условие бесследовости тензора энергии-импульса следует заменить на другое.

В работе [17] авторы представили ковариантную формулировку W-гравитации, сопоставляя каждому оператору уничтожения классической W_3-алгебры калибровочное поле и локальный параметр, а каждому оператору уничтожения — поле в присоединенном представлении и требуя затем исчезновения всех соответствующих кривизн. Результирующая теория имеет конечное число степеней свободы и помимо обычной и W-диффеоморфизмной инвариантности обладает локальными вейлевской, лоренцевской, а также W-вейлевской и W-лоренцевской симметриями.

Представляется интересным также исследовать эту теорию в качестве системы со связями.

Автор выражает благодарность за полезные и стимулирующие обсуждения Р. Л. Мкртчяну, О. М. Худавердяну и особенно А. Г. Седракяну за внимательное прочтение рукописи и критические замечания.

Данная работа частично поддерживается грантами 211-5291 YPI (German Bundesministerium für Forschung und Technologie) и INTAS-2058.

Литература

1. А. Б. Замолодчиков, ТМФ **65**, 347 (1985).
2. И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Препринт ИФМ АН СССР, Москва (1978). В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Современные проблемы математики*, т. 24, ВИНИТИ, Москва (1984).

3. C. M. Hull, Phys. Lett. B **240**, 110 (1990).
4. K. Schoutens, A. Sevrin, and P. van Nieuvenhuizen, Phys. Lett. B **243**, 248 (1990).
5. K. Schoutens, A. Sevrin, and P. van Nieuvenhuizen, Nucl. Phys. B **364**, 584 (1991); **371**, 315 (1992).
6. H. Ooguri, K. Schoutens, A. Sevrin, and P. van Nieuvenhuizen, Comm. Math. Phys. **145**, 515 (1992).
7. A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A **2**, 893 (1987).
8. J. M. Figueroa-O'Farrill, S. Stauciu, and E. Ramos, Phys. Lett. B **297**, 289 (1992); C. M. Hull, Phys. Lett. B **269**, 257 (1991).
9. V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
10. Y. Matsuo, Phys. Lett. B **227**, 117 (1991).
11. R. Zucchini, Phys. Lett. B **260**, 296 (1991).
12. F. Gieres, Preprint CERN 366 (1991).
13. A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
14. D. R. Karakhanyan, Phys. Lett. B **365**, 56 (1996).
15. D. R. Karakhanyan, R. P. Manvelyan, and R. L. Mkrtchyan, Phys. Lett. B **329**, 185 (1994).
16. S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B **65**, 369 (1976).
17. K. S. Schoutens, A. Sevrin, and P. van Nieuvenhuizen, Nucl. Phys. B **349**, 791 (1991).