ЖЭТФ, 1997, том 111, вып. 5, стр. 1803–1809

НЕЛОКАЛЬНАЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПЛАСТИН КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Ю. Е. Кузовлев, А. И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина
Национальной академии наук Украины
340114, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 3 сентября 1996 г.

Выведено нелокальное интегродифференциальное уравнение, описывающее электродинамику джозефсоновского перехода между сверхпроводниками конечной вдоль магнитного поля толщины. Показано, что взаимодействие кинков всегда имеет дальнодействующую степенную асимптотику, которая может существенно повлиять на движение вихрей и вольт-амперную характеристику даже толстого контакта. Рассмотрен спектр малоамплитудных возбуждений.

1. В последнее время получила бурное развитие нелокальная электродинамика джозефсоновских переходов. До сих пор в ее рамках исследовались три случая: 1) туннельный переход на стыке двух сверхпроводящих ультратонких пленок, толщина которых много меньше лондоновской длины; 2) туннельный переход между массивными сверхпроводниками, толщина которых значительно превышает лондоновскую длину; 3) туннельный переход между сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, ортогональном магнитному полю. Так, в работах [1–8] показано, что эффекты нелокальности могут быть существенными уже в контактах с большой толщиной d ($d \gg \lambda$, λ — лондоновская глубина проникновения) вдоль магнитного поля (по направлению вихрей), т. е. в случаях, до того рассматривавшихся в локальном приближении. В противоположном случае контактов в тонких пленках, $d \ll \lambda$, нелокальность становится определяющим фактором. Соответствующие уравнения получены и изучались в [9–12]. Джозефсоновский переход между двумя сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, перпендикулярном магнитному полю вихрей, изучался в [13]. Тем не менее теория остается недостаточно разработанной. Необходимо выйти за рамки упомянутых предельных случаев, поскольку на практике нередко используются контакты, размер которых в направлении ориентации джозефсоновских вихрей соизмерим с λ (такая геометрия реализуется, например, на монокристаллических чешуйках Y–Ba–Cu–O с двойниками). Настоящая работа содержит вывод и предварительный анализ уравнений джозефсоновского контакта в пластине с произвольным отношением d/λ.

Показано, что связь между скачком фазы параметра порядка на контакте и плотностью тока всегда содержит существенно нелокальную составляющую, которая обусловлена дальнодействующим характером поля в свободном пространстве, причем амплитуда этой составляющей обладает лишь слабой (приблизительно линейной) зависимостью от параметра λ/d, а ее форма вообще не зависит от него. Ввиду последнего обстоятельства нелокальная компонента тока, даже будучи малой по амплитуде, может играть важную роль в нескольких отношениях. Во-первых, для корректного учета в граничных условиях полного транспортного тока контакта и внешнего поля. Во-вторых, при описании структур из последовательно включенных параллельно ориентированных джозефсоновских контактов, так как нелокальная дальнодействующая связь фазы и тока распространяется, конечно, и на межконтактное взаимодействие. Кроме того, в достаточно широких контактах с небаллистическим транспортом вихрей указанное дальнодействие должно отразиться (см. ниже) на виде вольт-амперной характеристики контакта в области малых напряжений и токов.

Поставленная задача сведена нами к задаче об абрикосовском вихре в плоскопараллельной пластине. Хотя последняя уже рассматривалась ранее в работах [14–16], для наших целей потребовались дополнительные вычисления. Конечные результаты относятся к контакту «встык» (плоскость которого перпендикулярна плоскости пластины). однако приведенные ниже формулы позволяют обобщить их на случай скошенного контакта и перейти к предельному случаю контакта «внахлест».

2. Магнитное поле линейного абрикосовского вихря (рассматриваемого в лондоновском приближении) удовлетворяет в сверхпроводнике уравнению

$$\mathbf{h} - \lambda^2 \Delta \mathbf{h} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Phi_0}{2\pi} \operatorname{rot} \nabla\theta = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}(p)\right) d\mathbf{R}(p),$$

где θ — фаза параметра порядка и $\mathbf{R}(p)$ — параметрически заданный радиус-вектор точек кора вихря. Кор джозефсоновского вихря расползается по поверхности слабой связи S, разделяющей сверхпроводник, т.е. представляет собой двумерный объект. Соответствующий «размазанный» по этой поверхности источник $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r})$ в (1) выражается, как нетрудно показать, формулой

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}(a,b)\right) \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{R}}, d\mathbf{S}(a,b)\right], \tag{2}$$

в которой a, b — аргументы параметрического представления S, $\mathbf{R}(a,b)$ — радиус-вектор точек S, $d\mathbf{S}(a,b)$ — векторный элемент площади S, φ — разность фаз на берегах контакта, а квадратные скобки под интегралом обозначают векторное произведение. Благодаря тому что в любом случае $\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} = 0$, этот источник можно либо представить в виде непрерывной суммы по линейным корам (а $\mathbf{h}$ в форме линейной комбинации полей абрикосовских вихрей), либо, напротив, трактовать как трехмерное векторное поле. Для перехода «встык» с магнитным потоком, направленным перпендикулярно пластине, ориентируя ось z по толщине и ось x вдоль перехода, из (2) имеем

$$\nu_z(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \delta(y) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}, \quad \nu_x = \nu_y = 0. \tag{3}$$

При этом фазы на берегах и скачок фазы $\varphi(x) = \theta(x,+0) - \theta(x,-0)$ не зависят в соответствии с $\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} = 0$ от координаты z.

В конечном счете скачок фазы и, тем самым, источник будут находиться из решения полного нелинейного уравнения для контакта. До того, однако, благодаря линейности (1), для поля можно написать $\mathbf{h} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}_m$ — это «затравочное» мейсснеровское поле, которое порождается заданными транспортным сверхтоком и внешним магнитным полем и определяется решением однородного уравнения (1) так, как если бы слабая связь вообще отсутствовала и сверхпроводник был бы сплошным, а $\mathbf{H}$ порождается источником (исчезает при $\boldsymbol{\nu} = 0$). Делая двумерное фурье-преобразование в плоскости пластины толщиной $2d$, $|z| < d$, находим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{a}\exp(\kappa z) + \mathbf{b}\exp(-\kappa z), \tag{4}$$

$$\mathbf{H}_0 = -\int\limits_{-d}^{d} \frac{\operatorname{sh}\kappa|z-z'|}{2\kappa\lambda^2}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{k}, z')dz', \quad \kappa = (\lambda^{-2} + k^2)^{1/2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \tag{5}$$

где $\mathbf{k}$ — двумерный волновой вектор. Векторные коэффициенты $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются, во-первых, условием бездивергентности поля и его непрерывностью на краю пластины и, во-вторых, потенциальностью тангенциальной составляющей магнитного поля на границе сверхпроводника (что означает равенство нулю нормальной к поверхности компоненты тока) и потенциальностью всех трех компонент поля в свободном пространстве. Из последнего условия получаем соотношение

$$\mathbf{H}_{\|}/H_z\big|_{z=\pm d} = \mp i\mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \tag{6}$$

учитывающее влияние свободного пространства на распределение поля и тока в сверхпроводнике. Здесь и далее индекс «$\|$» обозначает x- и y-проекции векторов. Все условия в совокупности дают

$$\begin{aligned} a_z &= \Delta^{-1}\Big[-(\partial H_{0z}/\partial z + kH_{0z})\big|_{z=d}(\kappa + k)\exp(\kappa d) + \\ &\quad + (\partial H_{0z}/\partial z - kH_{0z})\big|_{z=-d}(\kappa - k)\exp(-\kappa d)\Big], \\ b_z &= \Delta^{-1}\Big[(\partial H_{0z}/\partial z - kH_{0z})\big|_{z=-d}(\kappa + k)\exp(\kappa d) - \\ &\quad - (\partial H_{0z}/\partial z + kH_{0z})\big|_{z=d}(\kappa - k)\exp(-\kappa d)\Big], \\ \Delta &= 2(\kappa^2 + k^2)\operatorname{sh}(2\kappa d) + 4\kappa k\operatorname{ch}(2\kappa d), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\|} &= (2\operatorname{sh}(2\kappa d))^{-1}\Big\{-i\hat{\mathbf{k}}\Big[H_z\big|_{z=d}\exp(\kappa d) + H_z\big|_{z=-d}\exp(-\kappa d)\Big] - \\ &\quad - \mathbf{H}_{0\|}\big|_{z=d}\exp(\kappa d) + \mathbf{H}_{0\|}\big|_{z=-d}\exp(-\kappa d)\Big\}, \\ \mathbf{b}_{\|} &= (2\operatorname{sh}(2\kappa d))^{-1}\Big\{i\hat{\mathbf{k}}\Big[H_z\big|_{z=d}\exp(-\kappa d) + H_z\big|_{z=-d}\exp(\kappa d)\Big] + \\ &\quad + \mathbf{H}_{0\|}\big|_{z=d}\exp(-\kappa d) - \mathbf{H}_{0\|}\big|_{z=-d}\exp(\kappa d)\Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где для краткости положено $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ и $k \equiv |\mathbf{k}|$. Формулы (4)–(8) позволяют найти сверхток и поле (внутри пластины) произвольного источника.

Подставляя (3) в (5) и переходя к координатному представлению, для усредненной по толщине пластины плотности тока через контакт из (4)–(8) получаем $j(x) = J_m(x) + J(x)$, где J_m — «затравочный» мейсснеровский ток, определяющийся полем H_m, и

$$J(x) = \frac{c\Phi_0}{16\pi^3\lambda^2}\frac{\partial}{\partial x}\int Q(x-x')\frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x')dx' \tag{9}$$

— ток, связанный с источником. Фигурирующее здесь ядро нелокальной связи между источником и током выражается формулой

$$Q(x) = K_0\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) + \frac{1}{d\lambda^2}\int\limits_0^\infty \frac{dk\, J_0(kx)}{\kappa^3(\kappa + k\,\mathrm{cth}\,\kappa d)}, \tag{10}$$

где K_0 и J_0 — функции Макдональда и Бесселя нулевого порядка. Здесь первое слагаемое отвечает пределу двух массивных сверхпроводников толщиной $d \gg \lambda$ и является ядром интегрального члена уравнения, впервые полученного в [1] и эксплуатируемого в работах [2–8]. В противоположном пределе ультратонких пленок толщиной $d \ll \lambda$ сумма обоих слагаемых приводит к ядру интегрального члена уравнения, впервые рассмотренного и исследованного в [9–11] и равного

$$Q(x) = \frac{\lambda_{eff}}{\pi}\int\limits_0^\infty dk \frac{1}{1 + 2k\lambda_{eff}}\, J_0(kx),$$

где $\lambda_{eff} = \lambda^2/2d$ — пирловская глубина проникновения.

Замкнутое уравнение для разности фаз на контакте получается, как обычно, приравниванием $j(x)$ сумме джозефсоновского сверхтока, нормального тока и емкостного тока смещения, рассматриваемых как внутренние характеристики контакта, и в стандартных обозначениях имеет вид

$$\sin\varphi + \frac{\beta}{\omega_J^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \omega_J^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{J_m(x)}{j_c} + \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\int Q(x-x')\frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x')dx'. \tag{11}$$

Здесь j_c — плотность джозефсоновского тока, λ_J и ω_J — джозефсоновские длина и частота, β — диссипативный параметр. Интегральное ядро $Q(x)$ единым образом описывает возбуждения в джозефсоновском переходе как в тонкой пленке, так и в толстом вдоль магнитного поля образце. В общем промежуточном случае оно представляет собой сумму хорошо локализованного и неинтегрируемого сильно нелокального слагаемого (второй член справа в (10)), которое обязано своим происхождением медленно убывающей тангенциальной компоненте магнитного поля у поверхности пластины. Нетрудно видеть, что при $|x| \gg \lambda$ ядро имеет асимптотику

$$Q(x) \simeq \frac{\lambda^2}{d|x|}. \tag{12}$$

Соответственно, плотность тока изолированного статического кинка и его фаза (около своих предельных значений) убывают, как следует из (9) и (11), вдали от середины кинка по закону $|x|^{-2}$.

3. Обсудим роль первого члена справа в (11). Поскольку интегральный ток от произвольного источника (как и ток отдельного абрикосовского вихря) через произвольное сечение сверхпроводника равен нулю, следует считать, что интеграл по x от второго слагаемого в (11) приравнивается нулю. Поэтому транспортный ток вводится в уравнение первым слагаемым. Ясно, что это утверждение останется в силе и применительно к пластине конечной ширины (по x-координате), хотя ядро в (9), (11) потеряет трансляционную инвариантность и станет функцией двух аргументов, $Q(x,x')$. Однако используемый нами (как и другими авторами) анзац, что джозефсоновские вихри ориентированы поперек толщины пластины, предполагает неявно, что толщина мала по сравнению с шириной (иначе бы вихри, во всяком случае, порождаемые транспортным током в отсутствие стороннего поля, выстраивались бы по оси x, а не z). В таком случае ток $J_m(x)$ сосредоточен в основном у краев пластины, и в локальном приближении (при $d \gg \lambda$), когда второе слагаемое в (10) отбрасывается, ядро в целом заменяется на $Q(x) \to \pi\lambda\delta(x)$, а правой части (11) всюду, кроме краев, можно придать вид $\lambda_J^2\partial^2\varphi/\partial x^2$; тогда полный транспортный ток (интеграл от правой части (11)) вводится в форме граничных условий на градиент фазы $\partial\varphi/\partial x$.

Очевидно, что при учете нелокальности для корректной формулировки граничных условий нужно брать во внимание и реальное распределение затравочного тока $J_m(x)$, которое в той же мере определяется геометрией системы, что и вид ядра. Но тогда желателен и учет краев, т.е. конечности ширины пластины. Эта задача заслуживает отдельного рассмотрения. Тем не менее и не решая ее можно отметить, что при определенных условиях даже в случае $d \gg \lambda$ нелокальность способна существенно повлиять на вольт-амперную характеристику резистивного состояния широкого контакта в области малых напряжений, когда джозефсоновский сверхток через контакт превышает нормальный («квазичастичный») ток.

Под широким будем понимать контакт, ширина которого много больше характерного пути, проходимого отдельным кинком до его остановки из-за вязкости, обусловленной диссипацией нормального тока в контакте, и, кроме того, много больше λ_J. При $d \gg \lambda$ будем рассматривать нелокальность как слабое возмущение динамики резистивного состояния, в «нулевом» приближении описываемой уравнением (11) с заменой правой части на $\lambda_J^2\partial^2\varphi/\partial x^2$. Как показано в [17], вязкий (небаллистический) характер движения вихрей обусловливает сильную неоднородность концентрации вихрей (т.е. магнитного поля и градиента фазы); все эти величины возрастают к краям контакта примерно пропорционально расстоянию от его середины. При малых напряжениях в центральной области контакта, где концентрация мала, вихри далеко отстоят друг от друга и по форме близки к одиночному кинку. Взаимодействие таких вихрей, и, соответственно, скорость их вязкого перемещения к центру контакта (где они аннигилируют с антивихрями, движущимися с другой стороны), а также усредненные по времени скорость проскальзывания фазы $\partial\varphi/\partial t$ и напряжение на контакте в указанном локальном приближении пропорциональны малому фактору $\exp(-\Delta x/\lambda_J)$ (где Δx — характерное расстояние между вихрями), т.е. экспоненциально слабы. Таким образом, средняя часть контакта играет роль «узкого места», которое определяет вольт-амперную характеристику контакта в данном режиме. Учитывая, что Δx приблизительно обратно пропорционально транспортному току, нетрудно увидеть, что джозефсоновская частота будет экспоненциально зависеть от обратного тока, а зависимость транспортного тока I от напряжения U качественно будет иметь вид $I \simeq I_0[\ln(U_0/U)]^{-1}$ с некоторыми константами I_0 и U_0.

Однако учет нелокального взаимодействия вихрей может качественно изменить эту картину. Поскольку в нулевом приближении при удалении от центра контакта $\partial\varphi/\partial x \sim x$ (если $x = 0$ отвечает центру), а вклад второго члена (11) в середине контакта определяется, благодаря (12), его периферией, то, как ясно из (11), (12), нелокальность эффективно приводит к появлению в (11) распределенного источника тока, толкающего вихри в средней части контакта. В результате вязкий перенос потока здесь должен ускориться, а реальная вольт-амперная характеристика $I(U)$ при малых напряжениях должна, соответственно, приобрести более гладкую (по сравнению с оценкой локального приближения) форму. Важно, что подобная коррекция может оказаться весьма существенной даже для толстой пластины, так как нелокальная поправка, конкурирующая с экспоненциально слабым «локальным» взаимодействием, убывает с ростом толщины всего лишь по линейному закону, причем влияние нелокальности на форму ВАХ должно усиливаться, вместе с параметром λ^2/d, при повышении температуры.

4. Рассмотрим малоамплитудные электромагнитные возбуждения, распространяющиеся вдоль перехода. Из (11) вытекает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega = \omega_J \left[1 + \frac{\lambda_J^2 q^2}{(1+\lambda^2 q^2)^{1/2}} + \frac{\lambda_J^2 q^2}{\pi\lambda} F(q)\right]^{1/2},$$
$$F(q) = \frac{1}{d\lambda^2}\int_q^\infty \frac{1}{\kappa^3}\,\frac{1}{[\kappa + k\,\mathrm{cth}(\kappa d)]}\,\frac{1}{(k^2-q^2)^{1/2}}dk. \tag{13}$$

Функция $F(q)$ имеет асимптотики

$$F(q) \simeq \frac{2}{3d\lambda^2 q^4} \quad (q\to\infty), \quad F(q) \simeq 4\lambda_{eff}\ln\frac{1}{\lambda q} \quad (q\to 0).$$

Из (12) для соответствующих асимптотик спектра электромагнитных волн имеем

$$\omega \simeq \omega_J \lambda_J q (1+\lambda^2 q^2)^{-1/4}$$

при достаточно больших волновых числах и

$$\omega \simeq \omega_J \left\{1 + \lambda_J^2 q^2 \left[1 + \frac{2\lambda}{\pi d}\ln\frac{1}{\lambda q}\right]\right\}^{1/2}$$

для длинноволновых возбуждений.

В заключение авторы приносят свою благодарность Ю. А. Гененко за полезные дискуссии и Ю. В. Медведеву за внимание и поддержку.

Литература

1. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Сверхпроводимость **5**, 228 (1992).
2. A. Gurevich, Phys. Rev. B **46**, 3187 (1992).
3. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Письма в ЖЭТФ **57**, 187 (1993).
4. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ **104**, 2526 (1993).
5. Yu. M. Aliev and V. P. Silin, Phys. Lett. A **117**, 259 (1993).
6. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ **58**, 726 (1993).
7. Г. Л. Алфимов, В. П. Силин, ЖЭТФ **106**, 671 (1994).
8. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ **60**, 442 (1994).
9. Ю. М. Иванченко, Т. К. Соболева, Письма в ЖЭТФ **51**, 100 (1990).
10. Yu. M. Ivanchenko and T. K. Soboleva, Phys. Lett. A **147**, 65 (1990).
11. Ю. М. Иванченко, Т. К. Соболева, ФТТ **32**, 2029 (1990).
12. R. G. Mints and I. B. Snapiro, Phys. Rev. B **51**, 3054 (1995).

13. И. О. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва, (1970).
14. Ю. М. Иванченко, А. И. Козинская, Ю. В. Медведев, ФТТ **21**, 3445 (1979).
15. M. Fusko-Girard and F. Mancini, Physica BC **123**, 75 (1983).
16. А. Ю. Мартынович, ЖЭТФ **105**, 912 (1994).
17. A. E. Filippov, Yu. E. Kuzovlev, and T. K. Soboleva, Phys. Lett. A **183**, 123 (1993).