

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СИСТЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗДЕЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК

Ю. Е. Лозовик*, О. Л. Берман

*Институт спектроскопии Российской академии наук
142092, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 1996 г.,
после переработки 14 декабря 1996 г.

Предсказано образование и исследованы свойства сверхтекучей экситонной жидкости в системе пространственно-разделенных электронов и дырок в системе из двух связанных квантовых ям. Вычислена энергия основного состояния и равновесная плотность экситонной жидкости как функция расстояния D между квантовыми ямами. Рассмотрены свойства разреженного газа экситонов с диполь-дипольными отталкиваниями, являющегося метастабильной фазой при $D < 1.9a^*$ и стабильной при $D > 1.9a^*$ (a^* — радиус двумерного экситона). Изучен квантовый переход газ-жидкость при увеличении D . Найдены (для различных D) температуры перехода Березинского-Костерлица-Таулеса, при которых возникает сверхтекучесть в системе. Обсуждаются возможные экспериментальные проявления предсказанных эффектов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы с пространственно-разделенными электронами и дырками в системе двойных квантовых ям привлекают сейчас большое внимание экспериментаторов [1–4], в частности, в связи с предсказанной ранее сверхтекучестью в этой системе [5], квазиджозефсоновскими явлениями [5, 6], необычными свойствами в сильных магнитных полях [7]. Существует несколько физических реализаций систем с пространственно-разделенными электронами и дырками. Электроны и дырки могут быть созданы лазерным излучением, приходят в состояние частичного термодинамического равновесия в системе связанных квантовых ям и находятся в равновесном состоянии на временах, существенно больших времени их энергетической релаксации, но меньших времени их взаимной рекомбинации. Времена рекомбинации могут быть достаточно большими за счет пространственной разделенности волновых функций электронов и дырок (а для некоторых связанных квантовых ям [3] — за счет локализации электронов и дырок в разных областях импульсного пространства), что делает легко достижимым квазиравновесное состояние электрон-дырочной системы. В этом случае электроны и дырки характеризуются несовпадающими квазиравновесными химическими потенциалами. Возможна также ситуация, когда пространственно-разделенные электроны и дырки находятся в состоянии термодинамического равновесия, так что их химические потенциалы совпадают. Это может осуществиться в связанных квантовых ямах второго рода (например, для структур на основе InAs/GaSb).

*E-mail: lozovik@isan.msk.su

В связи с начавшимися экспериментами большой интерес представляют до сих пор не изученные свойства структур, состоящих из двух квантовых ям, в частности, вопрос о конденсированных фазах экситонов в данной системе, виде фазовой диаграммы и т. п. Эти вопросы являются предметом исследования в настоящей работе, в которой рассматривается двухслойная система в отсутствие магнитного поля. Такая система изучалась недавно экспериментально [1, 2]. Поведение пространственно-разделенной электрон-дырочной системы в сильном магнитном поле обсуждается в [8].

В работе предсказываются свойства жидкой фазы экситонов с пространственно-разделенными электроном и дыркой и обсуждается квантовый переход газ-жидкость при изменении расстояния D между ямами. Кроме того, предсказывается зависящая от D температура топологического перехода в сверхтекучее состояние в системе.

2. ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ-ФОКА

Для определения условий существования (при нулевой температуре) жидкости, состоящей из экситонов с пространственно-разделенными электроном и дыркой, необходимо вычислить зависимости энергии основного состояния E от (неравновесной) концентрации n и определить минимум на кривой $E(n)$ при различных расстояниях D между слоями.

Гамильтониан системы пространственно-разделенных электронов и дырок может быть записан в представлении вторичного квантования:

$$\hat{H} = \sum_{p=0}^{\infty} \left[\left(\frac{p^2}{2m_e} - \mu_e \right) a_p^+ a_p + \left(\frac{p^2}{2m_h} - \mu_h \right) b_p^+ b_p \right] + \frac{1}{2} \sum_{pp'k} \{ V(k) \times \\ \times [a_p^+ a_{p'}^+ a_{p'+k} a_{p-k} + b_p^+ b_{p'}^+ b_{p'+k} b_{p-k}] - 2\bar{V}(k) a_p^+ b_{p'}^+ b_{p'+k} a_{p-k} \}, \quad (1)$$

где a_p^+ и b_p^+ — операторы рождения электрона и дырки; $m_e = m_h = m$ — эффективные массы электрона и дырки; $V(k) = 2\pi e^2/\varepsilon k$ — кулоновское взаимодействие в одном слое; $\bar{V}(k) = V(k)e^{-kD}$ — взаимодействие электрона и дырки, находящихся в разных слоях; D — расстояние между слоями электронов и дырок; ε — статическая диэлектрическая проницаемость; μ_e и μ_h — химические потенциалы, определяющиеся условиями нормировки (концентрации электронов и дырок мы считаем равными, $N_e = N_h$)

$$\sum_p \langle a_p^+ a_p \rangle = \sum_p \langle b_p^+ b_p \rangle = \frac{1}{2} N,$$

где $N = N_e + N_h$ — полное число частиц в системе; $n = N/S$ — поверхностная концентрация частиц в системе; S — площадь системы.

Для расчета энергии основного состояния экситонной жидкости из пространственно-разделенных электронов и дырок необходимо учесть их спаривание [5, 9]. Для этой цели используем технику Горькова для нормальных и аномальных гриновских функций [10, 11]:

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -i \langle T(\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta^+(x')) \rangle, \\ F_{\alpha\beta}(x - x') = e^{i\mu t} \langle N | T(\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta^+(x')) | N + 2 \rangle, \\ F_{\alpha\beta}^+(x - x') = e^{-i\mu t} \langle N + 2 | T(\bar{\psi}_\alpha^+(x) \bar{\psi}_\beta^+(x')) | N \rangle,$$

где $G_{\alpha\beta}(x, x')$ и $F_{\alpha\beta}(x - x')$ — соответственно нормальная и аномальная гриновские функции, $\tilde{\psi}_\alpha(x)$ и $\tilde{\psi}_\alpha^+(x)$ — одночастичные фермиевские операторы; $\mu = \mu_e + \mu_h$.

Рассмотрим сначала в качестве исходного приближение Хартри–Фока. В однородной системе диаграммы приближения Хартри дают нулевой вклад в энергию, что следует в силу электронейтральности. Рассмотрим обменные диаграммы приближения Хартри–Фока.

Имея в виду выход за рамки приближения БКШ (для слабой связи), найдем решение уравнений для нормальной и аномальной функций Грина в общем случае, не предполагая малости импульсов квазичастиц по сравнению с импульсом Ферми. Нормальная и аномальная функции Грина в обобщенном приближении Хартри–Фока (с возможным спонтанным нарушением симметрии, щель $\Delta \neq 0$) являются решениями уравнений для матричной функции Горькова–Намбу \hat{G} :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & F^+ \\ -F & G \end{pmatrix},$$

$$G(p) = \frac{\omega + \xi}{\omega^2 - \epsilon^2(p)},$$

$$F^+(p) = \frac{|\Delta(p)|^2}{\omega^2 - \epsilon^2(p)},$$
(2)

Здесь $\xi = p^2/2m - \mu$,

$$\epsilon(p) = \frac{1}{z_p^2 + 1} \left\{ (z_p^2 - 1)(p^2 - r^2 \mu p_0^2) \frac{\sqrt{2} p_0 r}{\sqrt{\pi}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty dp' \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(z_p^2 - 1 - 2z_p z_{p'} \exp[-D p_F \sqrt{p^2 - 2pp' \cos \phi + p'^2}]) p'}{(z_{p'}^2 + 1) \sqrt{p^2 - 2pp' \cos \phi + p'^2}} \right\} \frac{p_F^2}{4},$$
(3)

$r = 1/\sqrt{\pi n}$ — среднее расстояние между слоями электронов и дырок, $z_p = u_p/v_p$, а функции u_p^2 и v_p^2 определяются соотношениями

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi}{\epsilon(p)} \right], \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{\epsilon(p)} \right].$$

Мы ввели обозначения

$$p_0^2 = 2 \int_0^\infty \frac{p dp}{1 + z_p^2}, \quad p_F = \sqrt{2\pi \hbar^2 n};$$

все импульсы выражены в единицах p_F/p_0 . В приближении Хартри–Фока щель Δ определяется из условия самосогласования. В используемом же нами приближении для промежуточного типа связи щель определяется из вариационного расчета с учетом корреляционной энергии (см. также [9, 12]). В качестве варьируемой функции удобно использовать функцию z_p (см. выше).

Энергия выражается через функцию Горькова–Намбу \hat{G} системы:

$$E = -\text{Sp} \int_0^{e^2} \frac{de'^2}{e'^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} [\hat{G}^{(0)}(\omega, p)]^{-1} [\hat{G}(\omega, p) - \hat{G}^{(0)}(\omega, p)] e^{i\omega t}, \quad (4)$$

где $t \rightarrow +0$; $\hat{G}^{(0)}(\omega, p) = G^{(0)}(\omega, p)\hat{1}$ — функция Грина свободной частицы, $\hat{1}$ — единичная матрица (в подынтегральном выражении в (4) используется стандартная замена физического заряда e^2 на e'^2 и последующее интегрирование по e'^2 до физического значения e^2).

В приближении Хартри–Фока функция Грина \hat{G} определяется выражениями (2). С учетом соотношений (4) и (2), (3) находим функционал $E_{HF}\{n\}$ в приближении Хартри–Фока:

$$2 \left(\frac{E_{HF}\{n\}}{n} + \mu \right) = \frac{4}{r^2 p_0^4} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{1+z_p^2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 r^2 p^3} \int_0^\infty p q d p d q \int_0^{2\pi} \frac{|V(p-q) + \tilde{V}(p-q)z_p z_q| d\phi}{(1+z_p^2)(1+z_q^2)}. \quad (5)$$

Как будет показано ниже, в области больших $D \geq D_{sp} = 1.9a^*$ жидкая фаза отсутствует и концентрации электронов и дырок являются свободными параметрами задачи. При этом в области больших концентраций $na^{*2} \gg 1$ спектр квазичастиц $\epsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2(p)}$, где $\Delta(p)$ — щель в квазичастичном спектре, определяющаяся результатом минимизации хартри-фоковского функционала. В частности, при $D \gg a^*$ имеем (см. [5])

$$\Delta(p) = \exp\left(-\frac{16D^2 p_0}{\pi a^*}\right). \quad (6)$$

В области же малых $D \lesssim a^*$ существенными оказываются корреляционные эффекты.

3. УЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Будем рассматривать полученные в приближении Хартри–Фока результаты для экситонной фазы как исходное приближение. Полученные в разд. 2 в приближении Хартри–Фока функции Грина используем для расчета корреляционной энергии $E^{cor}(z_p)$. Возникает вопрос о том, какие классы диаграмм для корреляционной энергии являются существенными.

При малых переданных импульсах оценим отношение минимального переданного импульса $k \geq \Delta/v_F$ (Δ — щель, полученная в результате вариационного расчета, см. ниже) к радиусу Ферми p_F . В точке равновесной концентрации при расстоянии между слоями $D = 0$, когда щель максимальна, используя полученные ниже результаты, имеем

$$\frac{k}{p_F} \geq \frac{\Delta}{v_F p_F} = \frac{\Delta m}{2\pi \hbar^2 n} \approx 0.07 \ll 1.$$

Следовательно, условие выделенности диаграмм приближения хаотических фаз [13] (рис. 1а) справедливо для малых переданных импульсов $k (k/p_F \ll 1)$ и для нашей системы.

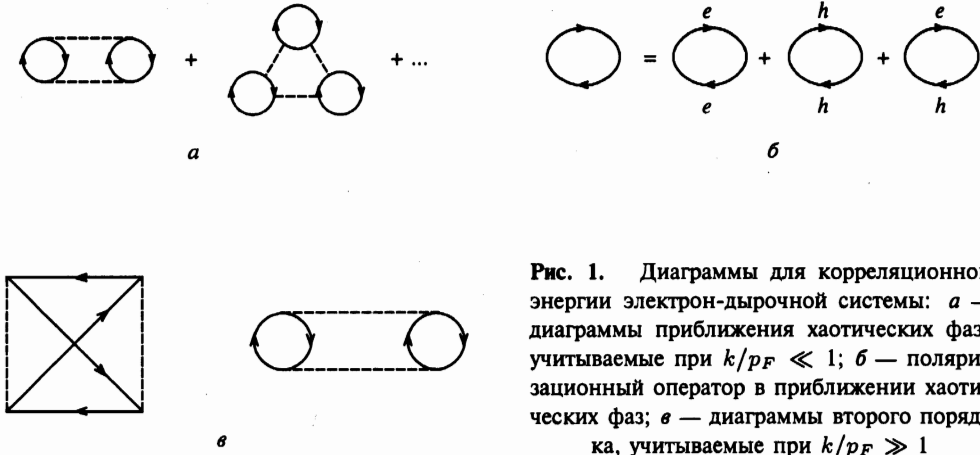


Рис. 1. Диаграммы для корреляционной энергии электрон-дырочной системы: а — диаграммы приближения хаотических фаз, учитываемые при $k/p_F \ll 1$; б — поляризацонный оператор в приближении хаотических фаз; в — диаграммы второго порядка, учитываемые при $k/p_F \gg 1$

Для корреляционной энергии в приближении хаотических фаз имеем:

$$E_1^{cor} = -\frac{1}{n} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \{ \ln [1 - V_k \Pi(k, \omega)] - V_k \Pi(k, \omega) \}, \quad (7)$$

где $\Pi(k, \omega)$ — поляризацонный оператор двухкомпонентной электрон-дырочной системы с учетом спаривания электронов и дырок (рис. 1б):

$$\Pi(k, \omega) = \Pi_{ee}(k, \omega) + \Pi_{hh}(k, \omega) + \Pi_{eh}(k, \omega). \quad (8)$$

Для электрон-электронных и дырочно-дырочных поляризацонных операторов имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{ee(hh)}(k, \omega) = & -2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \{ [(G_{HF}(p, \epsilon)G_{HF}(-p + k, -\epsilon + \omega) + \\ & + G_{HF}(p, \epsilon)G_{HF}(-p - k, -\epsilon - \omega))] + \\ & + [F_{HF}(p, \epsilon)F_{HF}(p + k, \epsilon + \omega) + F_{HF}(p, \epsilon)F_{HF}(p - k, \epsilon - \omega)] \}, \quad (9) \end{aligned}$$

где F_{HF} и G_{HF} — аномальная и нормальная функции Грина в приближении Хартри-Фока (2). Для электрон-дырочного поляризацонного оператора получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{eh}(k, \omega) = & -2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} [F_{HF}(p, \epsilon)F_{HF}(p + k, \epsilon + \omega) + \\ & + F_{HF}(p, \epsilon)F_{HF}(p - k, \epsilon - \omega)], \quad (10) \end{aligned}$$

При отсутствии спаривания и при неучете туннелирования между слоями смешанный оператор $\Pi_{eh} = 0$.

Корреляционная энергия E_1^{cor} для малых переданных импульсов ($k/p_F \ll 1$) определяется соотношениями (7)–(10) и зависит от функции z_p , которая будет считаться вариационной.

Корреляционная энергия E_2^{cor} для больших переданных импульсов ($k/p_F \gg 1$) определяется соотношением (4), где функция Грина $G(\omega, p)$ аппроксимируется суммой кольцевой и обменной диаграмм второго порядка (см. рис. 1б).

Мы используем для корреляционной энергии E^{cor} при всех переданных импульсах интерполяцию (успешно примененную Бринкманом и Райсом для расчета металлической электрон-дырочной жидкости [14] и использованную также в [9, 12])

$$E^{cor} = \frac{E_1^{cor} E_2^{cor}}{E_1^{cor} + E_2^{cor}}. \quad (11)$$

Далее, для различных значений расстояния между слоями D и концентрации квазичастиц n определялась полная энергия

$$E_t = E_{HF} + E^{cor}, \quad (12)$$

как функционал от функции $z_p = u_p/v_p$.

Сделаем теперь несколько замечаний относительно соотношения использованного подхода и принципа Боголюбова компенсации опасных диаграмм. Появление в диаграммах частей, связанных с остальной частью диаграммы только одной парой линий, соответствующих электрону и дырке с равным нулю суммарным импульсом, приводит к расходимости соответствующей диаграммы. Эта пара линий может быть заменена на полную двухчастичную гриновскую функцию G_2 , которая описывает связанные состояния электрона и дырки (экситоны). Экситонные уровни энергии являются полюсами функции G_2 относительно суммарной энергии пары. Для электрон-дырочной пары, родившейся из вакуума, суммарный импульс равен нулю, суммарная энергия $\mu = \mu_e + \mu_h$. Энергия экситона с нулевым импульсом по определению равна μ . Значит, электрон-дырочная пара с нулевым суммарным импульсом и энергией μ соответствует полюсу функции G_2 . Следовательно, диаграммы, включающие в себя виртуальные процессы рождения из вакуума электрон-дырочных пар с нулевым суммарным импульсом, расходятся.

Для устранения расходимости необходимо обеспечить взаимную компенсацию диаграмм, приводящих к виртуальному рождению из вакуума электрон-дырочных пар с нулевым суммарным импульсом. Применение этого принципа компенсации с учетом только первого порядка по взаимодействию эквивалентно решению самосогласованных уравнений в приближении Хартри-Фока (с учетом спонтанного нарушения симметрии, $\Delta \neq 0$) относительно функции z_p , которая может быть найдена в этом приближении также из вариационного принципа.

Если учесть диаграммы, соответствующие процессам динамической корреляции между квазичастицами, то принцип компенсации расходящихся диаграмм будет соответствовать в нашем приближении учету диаграмм на рис. 1. Приближением к решению уравнения компенсации расходящихся диаграмм является проведенная нами минимизация полной энергии системы (с учетом корреляционной энергии) по функции z_p .

4. ВАРИАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ

Вариационный расчет полной энергии E_t проводился численно. Предварительно все выражения приводились к безразмерному виду с использованием в качестве единиц

длины и энергии соответственно радиуса и энергии двумерного экситона:

$$a^* = \frac{\varepsilon \hbar^2}{2me^2}, \quad E_x = \frac{2me^4}{\varepsilon \hbar^2},$$

$m = m_e m_h / (m_e + m_h)$ — приведенная масса.

Для минимизации E_t использовались различные пробные функции z_p . Результаты различались не сильно, но лучшее значение получено с использованием пробной функции вида

$$z_p = A \left(1 + \frac{p^2}{4} \right)^{3/2} + B, \quad (13)$$

где A и B — вариационные параметры [12]. Пробная функция (13) выбрана так, что при $B = 0$ функция z_p^{-1} совпадает с фурье-образом волновой функции двумерного экситона Ванье-Мотта (полуметаллическому состоянию соответствует $v_p = 0$, т.е. $z_p \rightarrow \infty$).

Двумерные интегралы по импульсу для нахождения поляризационных операторов, энергии и функций Грина вычислялись методом Монте-Карло. Внутри квадрата от 0 до p_F по обеим координатам случайным образом выбирались 2000 точек, суммировались значения функций в этих точках, сумма делилась на площадь квадрата в импульсном пространстве.

Минимизация по вариационным параметрам A и B также проводилась методом Монте-Карло. При случайно выбранных значениях A и B рассчитывалась энергия системы. Далее задавались приращения ΔA и ΔB параметров A и B . На следующем шаге параметрам A и B присваивались значения $A + k\Delta A$, $B + k\Delta B$, где случайное число k равняется 0.1 или -1 . Новые значения параметров A и B принимались, если соответствующее им значение энергии меньше, чем значение, отвечающее предыдущим значениям параметров. В противном случае новые значения параметров отвергаются. Величины ΔA и ΔB (периоды сетки, на которой выбираются блуждающие параметры) выбирались равными $10^{-3} - 10^{-2}$ от значений соответствующих параметров A и B .

В результате вариационных расчетов была вычислена энергия основного состояния системы E_t при разных значениях параметра $r_s = 1/\sqrt{\pi n}$ и различных расстояниях D между слоями электронов и дырок.

Для $D = 0$ при $r_s \rightarrow \infty$ (концентрации $n \rightarrow 0$) энергия основного состояния (в расчете на одну электрон-дырочную пару) стремится к энергии двумерного экситона. В работе [15] рассчитывалась зависимость энергии одного экситона в системе пространственно-разделенных электрона и дырки от расстояния между плоскостями. Полученные в настоящей работе результаты (см. рис. 2) в пределе больших r_s дают хорошее совпадение с результатами работы [15]. Полученные при вариационном расчете значения A и B указывают на то, что экситонная фаза устойчива для рассмотренной выше изотропной электрон-дырочной системы при всех D .

В спектре новых квазичастиц при всех n и D появляется щель, растущая с уменьшением n и с уменьшением D . При $n \rightarrow 0$ эта щель становится равной энергии связи двумерного экситона. Значит, рассматриваемая изотропная электрон-дырочная система (при всех n и D) — диэлектрическая.

В заключение этого раздела отметим, что учет анизотропии приводит к более сложной фазовой диаграмме системы. А именно, в анизотропной системе при концентрациях, большей некоторой зависящей от расстояния между слоями электронов и ды-

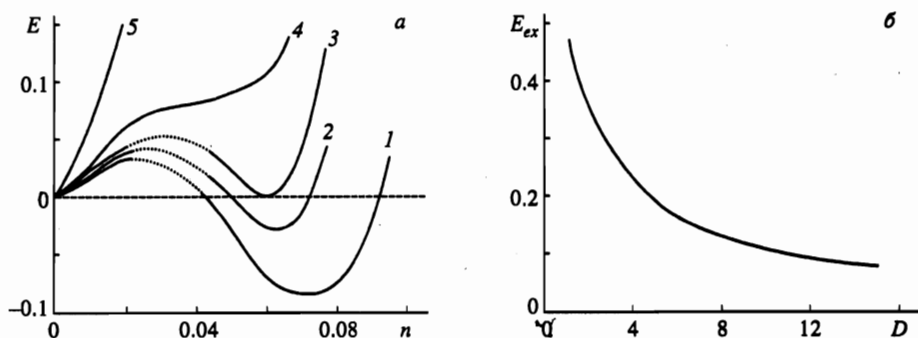


Рис. 2. а) Энергия E системы пространственно-разделенных электронов и дырок как функция концентрации; E в единицах энергии связи двумерного экситона $Ry_2^* = 2me^4/\hbar^2\epsilon$, n в единицах $(a^*)^{-2}$, $a^* = \hbar^2\epsilon/2me^2$. Кривым 1–5 отвечают значения D : 1—0; 2—0.5; 3—1.1; 4—1.9; 5—5. Точка $E = 0$ для всех кривых соответствует энергиям экситонов $E_{ex}(D)$ при соответствующем D (см. рис. 2б). б) Энергия связи экситона $E_{ex}(D)$ с пространственно-разделенными электронами и дырками как функция расстояния D между слоями; E_{ex} в единицах Ry_2^* , D в единицах a^*

рок концентрации $n_{cr}(D)$, должен происходить переход из экситонной (диэлектрической) фазы в металлическую фазу. Последняя, в отличие от экситонной фазы, не является сверхтекучей. Рассмотрение в рамках модели типа Келдыша–Копаяева [9] для анизотропной плотной электрон-дырочной системы показывает, что переход металл-диэлектрик является непрерывным, а $n_{cr}(D)$ — монотонно убывающая функция D и $n_{cr}(D) \propto 1/D$ при $D \gg a^*$.

5. РАЗРЕЖЕННАЯ СИСТЕМА ЭКСИТОНОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ

При малых концентрациях электронов и дырок $na^2 \ll 1$ система при низких температурах представляет собой слабонеидеальный газ¹⁾ экситонов с перпендикулярными слоям дипольными моментами в основном состоянии $d = eD$, растущими с увеличением расстояния между слоями D ($a(D)$ — радиус экситонов вдоль слоев; $a \approx a^*$ при $D \ll a^*$ и $a \approx a^{*1/4}D^{3/4}$ при $D \gg a^*$). В этом случае описанное в разд. 1 приближение должно быть заменено приближением, учитывающим в первом порядке обменное взаимодействие, а также (в лестничном приближении) прямое взаимодействие двумерных экситонов. В отличие от обычных электрон-дырочных систем [9], в пространственно-разделенной электрон-дырочной системе, как показывает расчет, основной вклад в энергию дает прямое диполь-дипольное отталкивание $U_d = e^2D^2/\epsilon r^3$, а ван-дер-ваальсово притяжение экситонов и обменное взаимодействие уже при $D \geq 0.5$ пренебрежимы — меньше 10^{-2} от вклада прямого диполь-дипольного взаимодействия (в узкой области малых n диполь-дипольное отталкивание приводит к кристаллизации, см. разд. 6). Малость обменного взаимодействия в пространственно-разделенной электрон-дырочной системе связана с малостью туннельной экспоненты при проникновении квазичастиц через барьер диполь-дипольного взаимодействия.

¹⁾ Как указывалось впервые в [5], в узкой $n - T$ -области дипольные экситоны образуют кристаллическую фазу (см. также [16] и цитируемую там литературу).

Для вычисления энергии обменного взаимодействия учтем спаривание электронов и дырок путем проведения канонического боголюбовского преобразования над электронными и дырочными операторами, описываемого унитарным оператором \hat{S} (см. [12]):

$$\hat{S} = \exp \left[\sum_p \phi_p (a_p^+ b_{-p}^+ - b_{-p} a_p) \right], \quad (14)$$

$$\hat{S} a_p \hat{S}^+ = u_p a_p + v_p b_{-p}^+, \quad (15)$$

$$\hat{S} b_p \hat{S}^+ = u_p b_p + v_p a_{-p}^+, \quad (16)$$

где

$$u_p = \cos \phi_p, \quad v_p = \sin \phi_p, \quad u_p^2 + v_p^2 = 1. \quad (17)$$

С использованием антикоммутиционных соотношений для фермиевских операторов стандартным образом получается преобразованный гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' + U, \quad (18)$$

где U — числовой функционал от u и v ; \hat{H}_0 и \hat{H}' — квадратичный и квадратичный по новым операторам гамильтонианы.

Функция v_p подчиняется условию нормировки

$$\sum_p v_p^2 = \frac{n}{2}, \quad (19)$$

следующей из соотношений

$$\sum_{p,s} \langle \hat{S} a_{p,s}^+ a_{p,s} \hat{S}^+ \rangle = \sum_{p,s} \langle \hat{S} b_{p,s}^+ b_{p,s} \hat{S}^+ \rangle = 2 \sum_p v_p^2 = n,$$

где n — безразмерная поверхностная концентрация зарядов (na^2 в обычных единицах).

В выражении для \hat{H}_0 функционал от u и v , стоящий перед комбинациями $a_p^+ a_p$ и $b_p^+ b_p$, есть энергетический спектр преобразованных квазичастиц (квазиэлектронов и квазидырок):

$$E_p^{e,h} = (u_p^2 - v_p^2) \left[\epsilon^{e,h}(p) - \mu_{e,h} - \sum_{p'} V_{p-p'} v_{p'}^2 \right] + 2u_p v_p \sum_{p'} \bar{V}_{p-p'} v_{p'} u_{p'}. \quad (20)$$

Для вычисления энергии обменного взаимодействия можно воспользоваться условием равенства нулю коэффициента k_p при парных комбинациях операторов $a_p^+ b_{-p}^+ + b_{-p} a_p$ (дающих сингулярные вклады в энергию) в перестроенном с учетом электрон-дырочного спаривания гамильтониане \hat{H}_0 из (18). Мы пренебрегаем туннельными переходами между зонами спаривающихся электронов и дырок в разных слоях. Из указанного выше условия $k_p = 0$ следует

$$\left[\epsilon(p) - \mu - 2 \sum_{p'} V_{p-p'} v_{p'}^2 \right] u_p v_p - (u_p^2 - v_p^2) \sum_{p'} \tilde{V}_{p-p'} u_{p'} v_{p'} = 0. \quad (21)$$

Для разреженной системы u_p имеет порядок единицы, а v_p мало по безразмерному параметру \sqrt{n} (na^2 в обычных единицах, см. (19)). В низшем приближении по v_p , т. е. с точностью до членов порядка \sqrt{n} , уравнение (21) сводится к

$$[\epsilon(p) - \mu_0] v_p - \int \tilde{V}_{p-p'} v_{p'} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) совместно с условием нормировки (19) имеет вид

$$v_p = \sqrt{n} \psi_0(p), \quad \mu_0 = -\epsilon_0, \quad (23)$$

где ϵ_0 и $\psi_0(p)$ — энергия связи и волновая функция основного состояния изолированного экситона с пространственно-разделенными электроном и дыркой. Волновая функция $\psi_0(p)$ и энергия ϵ_0 вычислялись для различных расстояний между слоями D в работе [15]. Следующий порядок по v_p в уравнении (21) содержит эффекты обменного взаимодействия. Обменная поправка μ_{ex} к химическому потенциалу может быть определена из (21) с помощью обычной теории возмущений, если в члены порядка $n^{3/2}$, опущенные в (22), подставить нулевое приближение для v_p из (23) и рассматривать их как малое возмущение. В результате для вклада обменного взаимодействия в химический потенциал, μ_{ex} , в области малых концентраций n и малых расстояний между слоями D получаем

$$\mu_{ex} = 4.71 n e^{-D}. \quad (24)$$

Для больших D электрон-дырочное взаимодействие имеет вид

$$\tilde{V}(r) = -\frac{e^2}{\sqrt{D^2 + r^2}} \approx -\frac{e^2}{D} + \frac{e^2 r^2}{2D^3},$$

так что основное состояние экситона описывается волновой функцией осциллятора с радиусом [15]:

$$\rho = (4a^*)^{1/4} D^{3/4}. \quad (25)$$

В результате для вклада обменного взаимодействия μ_{ex} в области малых n и больших D получаем

$$\mu_{ex} = 11.31 D^{17/4} n \exp\left(-\frac{D^{1/4}}{\sqrt{2}}\right). \quad (26)$$

Обменное взаимодействие в пространственно-разделенной системе подавлено по сравнению с двумерной электрон-дырочной системой в одном слое. Это связано с малой туннельной экспонентой при проникновении через барьер диполь-дипольного взаимодействия.

Вклад дипольного взаимодействия может быть представлен суммой диаграмм, приведенных на рис. 3. При малых переданных импульсах $q \rightarrow 0$, которые наиболее существенны при малых концентрациях, подынтегральное выражение, соответствующее

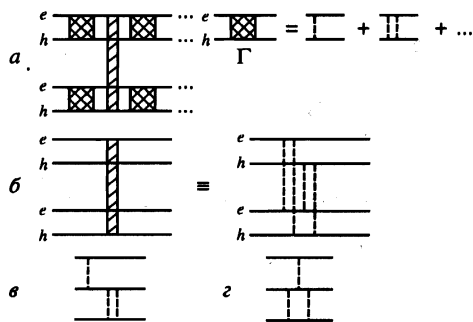


Рис. 3. а) Существенные диаграммы для разреженной экситонной системы. б) Лестничные диаграммы для одного экситона. в) Взаимодействие V между экситонами ($V \sim D^2/r^3$ при $r \gg D$). г) Несущественная при $n \rightarrow 0$ диаграмма

диаграмме на рис. 3в, пропорционально $1/q^3$, а на рис. 3г — $1/q^2$. Следовательно, диаграммы, изображенные на рис. 3в, дают больший вклад в энергию, чем диаграммы рис. 3г, и для учета прямого диполь-дипольного взаимодействия между экситонами можно воспользоваться результатами теории двумерного бозе-газа [17]. Связь вершины Γ и двумерной амплитуды рассеяния $f_0(\kappa)$ с потенциалом взаимодействия вида $U(r) = Ar^{-n}$ ($n > 2$) имеет вид

$$\Gamma = -2f_0(\kappa)\sqrt{\frac{2\pi\kappa}{i}}, \tag{27}$$

где двумерная амплитуда рассеяния есть

$$f_0(\kappa) = \frac{\sqrt{\pi i/2\kappa}}{\ln(\kappa A^{1/(n-2)})}. \tag{28}$$

Вклад дипольного взаимодействия в химический потенциал есть $\mu_d = \Gamma n = \kappa^2/2$.

Оценим вклад диполь-дипольного взаимодействия в химический потенциал при условии $\ln[(\kappa A)^{-1}] \gg 1$:

$$\mu_d \approx \frac{4\pi n}{\ln(1/8\pi n A^{2/(n-2)})}, \tag{29}$$

где для диполь-дипольного взаимодействия $n = 3$, $A = D^2$.

Спецификой двумерной бозе-системы является расходимость амплитуды рассеяния экситонов при малых энергиях (см. (28) и связанное с этим отклонение от линейной зависимости химического потенциала (29) от концентрации n при малых n , присущей трехмерному случаю; в двумерной системе химический потенциал пропорционален $n/\ln n$ при $n \rightarrow 0$ (с этим связана специфическая область применимости лестничного приближения в двумерном случае [5]).

При оценке вклада ван-дер-ваальсова взаимодействия в химический потенциал μ_W рассуждения полностью аналогичны приведенному выше анализу диполь-дипольного взаимодействия. В результате для вклада ван-дер-ваальсова взаимодействия оказывается справедливой формула (29), где $n = 6$, а $A = C_6$ — коэффициент ван-дер-ваальсова взаимодействия. Найдем коэффициент C_6 для малых и больших D . Для двумерной системы коэффициент C_6 связан с поляризуемостью α основного состояния:

$$C_6 = -\frac{3}{2}\alpha\rho^2, \tag{30}$$

где ρ — радиус экситона.

Поляризуемость α вычислим по формуле

$$\alpha = -2e^2 \sum_k' \frac{|x_{0k}|^2}{E_0 - E_k} = \frac{2ime^2}{\hbar^2} (xb)_{00}, \quad (31)$$

где x — координата вдоль пленки; E_k — энергии невозмущенных уровней, \hat{b} — вспомогательный оператор (см. [18]):

$$\hat{z} = \frac{m}{\hbar} \frac{db}{dt}. \quad (32)$$

Функция $f(r)$, введенная с помощью равенства $\hat{b}\psi_0 = f(r)\psi_0 \cos \phi$, подчиняется уравнению

$$ir = \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2r}f' - \frac{1}{2r^2}f + \frac{\psi_0'}{\psi_0}f', \quad (33)$$

где ψ_0 — волновая функция основного состояния экситона. Невозмущенная функция ψ_0 для малых D вычисляется в первом порядке теории возмущений по $U(r) = 2e^2D^2/\epsilon r^3$ на волновых функциях двумерного экситона (при $D = 0$). Для больших D основное состояние экситона описывается волновой функцией осциллятора с радиусом из (25).

Воспользовавшись решением дифференциального уравнения для $f(r)$, найдем α согласно (31). Для малых D имеем

$$\alpha = \frac{21}{16}a^{*3} \left(1 + \frac{64\pi^2 m^2 e^4 D^4}{\hbar^4 a^{*2}} \right), \quad (34)$$

а при больших D —

$$\alpha = 0.93D^{9/4}a^{*3/4}. \quad (35)$$

Подставляя (34) и (35) в (30) и (29), найдем вклад ван-дер-ваальсова взаимодействия в химический потенциал.

Химический потенциал μ системы, $\mu = dE/dn$ получается как сумма рассмотренных выше вкладов; обменного, диполь-дипольного и ван-дер-ваальсова взаимодействий экситонов:

$$\mu = \mu_{ex} + \mu_d + \mu_W. \quad (36)$$

Используя найденный химический потенциал (см. (36), а также (24), (26), (29), (34), (35)), мы вычислили скорость c звуковых возбуждений в системе, $c = \sqrt{(n/m)d\mu/dn}$, как функцию n и D .

Для расчета энергии основного состояния $E(n)$ во всей области равновесных концентраций n мы использовали сшивку результатов расчетов в области больших и промежуточных концентраций (см. разд. 4) с результатами, полученными для малых концентраций. На рис. 4 показано, что экситонная жидкость может существовать при $D < D_{sp} = 1.9$, а при $D \geq D_{sp}$ жидкая фаза отсутствует.

Результаты расчета энергии $E(n)$ с учетом вклада диполь-дипольного, а также ван-дер-ваальсова и обменного взаимодействий представлены на рис. 2 (см. область малых n , где $dE/dn > 0$ в силу диполь-дипольного отталкивания экситонов).

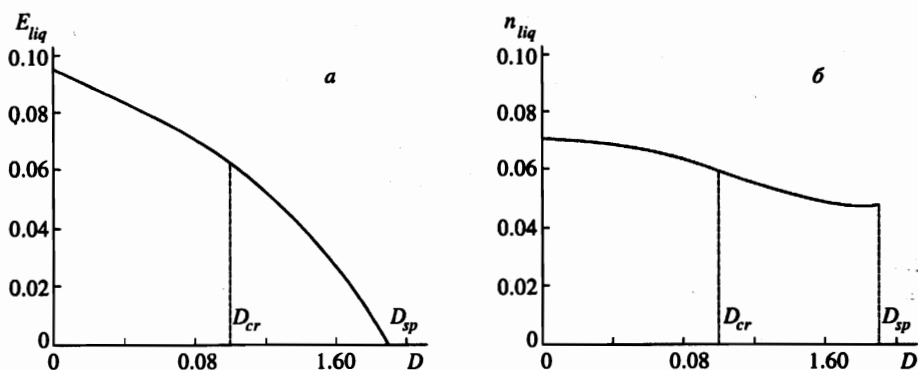


Рис. 4. а) Энергия экситонной жидкости E_{liq} с пространственно-разделенными электронами и дырками как функция расстояния D между слоями; E_{liq} в единицах Ry_2^* , D в единицах a^* . При $D = D_{cr} = 1.1$ происходит переход первого рода по D , при $D_{cr} < D < D_{sp}$ экситонная жидкость метастабильна, при $D = D_{sp} = 1.9$ экситонная жидкость становится нестабильной. б) Равновесная концентрация n_{liq} экситонной жидкости (в единицах $(a^*)^{-2}$) как функция расстояния D между слоями (в единицах a^*)

6. КВАНТОВЫЙ ПЕРЕХОД ГАЗ–ЖИДКОСТЬ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЭКСИТОННОЙ СИСТЕМЕ

Рассчитанные кривые $E(n)$ (см. рис. 2) имеют минимум, глубина которого отвечает энергии связи экситонной жидкости. Энергия связи уменьшается с ростом D , минимумы становятся более пологими, равновесные концентрации $n_{liq}(D)$ уменьшаются. При $D < D_{cr} = 1.1$ энергия жидкой фазы больше энергии $E(0)$ изолированного экситона с пространственно-разделенными электронами и дырками, т. е. в этой области D стабильной фазой является экситонная жидкость, а метастабильной — экситонный газ. Энергия связи изолированного биекситона с пространственно-разделенными электронами и дырками [8] (убывающая с ростом D) меньше энергии связи экситонной жидкости, т. е. жидкая фаза в рассматриваемой системе устойчива и относительно развала на изолированные биекситоны. При $D = D_{cr} \approx 1.1$ энергия связи экситонной жидкости сравнивается с энергией изолированного экситона, и в этой точке при изменении D происходит скачкообразный квантовый фазовый переход экситонная жидкость–экситонный газ. Однако в узкой области $D_{cr} < D < D_{sp}$ ($D_{sp} = 1.9$, $D_{cr} = 1.1$) минимум, соответствующий экситонной жидкой фазе, еще существует, т. е. жидкая фаза остается метастабильной. При больших D ($D > 1.9$) жидкая фаза абсолютно неустойчива и стабильной является лишь газовая фаза, в которой плотность экситонов определяется лишь внешними условиями. В последнем случае возможны любые режимы — от разреженного бозе-газа до плотной экситонной фазы типа БКШ.

Подчеркнем, что наличие квантового перехода по параметру D и нестабильность жидкости при $D > D_{sp}$ есть специфика экситонов с пространственно-разделенными электронами и дырками, связанная с их диполь-дипольным отталкиванием на больших расстояниях²⁾.

²⁾ Аналогично, возможен квантовый переход жидкость–газ в двумерной экситонной системе при изменении электрического поля [18].

Образование жидкой экситонной фазы может быть обнаружено по сдвигу линии фотолюминесценции, скачкообразному изменению коэффициента диффузии экситонов. Появление жидкой фазы характеризуется также возникновением жидких экситонных капель, которые могут быть найдены экспериментально по соответствующим движению капель гигантским флуктуациям фотолюминесценции при локальном наблюдении фотолюминесценции с использованием непрозрачной маски с микродырками или с помощью оптического волокна. Возможно также наблюдение экситонных капель по большим флуктуациям тока вдоль слоев в системе двух квантовых ям. Межуровневое сопротивление относительно увлечения электронов и дырок также может быть чувствительным индикатором фазового перехода газ-жидкость и перехода в сверхтекучую и другие фазы электрон-дырочной системы.

7. ПЕРЕХОД В СВЕРХТЕКУЧЕЕ СОСТОЯНИЕ И СВЕРХТЕКУЧИЕ ФАЗЫ ДВУХСЛОЙНОЙ ЭКСИТОННОЙ СИСТЕМЫ

Как было показано выше для $T = 0$, в рассматриваемой системе имеется щель в энергетическом спектре. По этой причине при $T = 0$ система является сверхтекучей. При увеличении температуры сверхтекучесть экситонов в рассматриваемой квазидвумерной системе сохраняется вплоть до температуры T_c топологического фазового перехода Костерлица-Таулесса [19], при которой происходит распаривание пар вихрей в экситонной системе. Эта температура может быть вычислена согласно формуле

$$T_c = \frac{0.45\pi\hbar^2 n_s}{k_B m}, \quad (37)$$

где n_s — концентрация сверхтекучей компоненты; k_B — константа Больцмана; m — приведенная масса квазичастицы.

Концентрация n_s существенно зависит от температуры, и в (37) входит значение n_s в точке перехода Костерлица-Таулесса T_c , т. е. (37) представляет собой уравнение для определения T_c .

Функция $n_s(T)$ может быть определена из соотношений $n_s = n - n_n$ (n и n_n — полная плотность и плотность нормальной компоненты); $n_n = j_n/v_n$ (j_n и v_n — ток и скорость нормальной компоненты). С использованием этих соотношений сверхтекучая плотность $n_s(T)$ может быть выражена через затравочные концентрации электронов и дырок $n_e = n_h = n$ и через параметры взаимодействия в электрон-дырочной системе. Пусть все квазичастицы движутся со скоростью u . В этом случае аргументом функции распределения будет не $\epsilon(p)$, а $\epsilon(p) - pu$. Движение квазичастиц приведет к появлению импульса P , равного

$$P = 2 \int p n_F(\epsilon - pu) \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \quad (38)$$

(n_F — функция Ферми). Считая скорость u малой и разлагая по u , можно найти коэффициент n_n в выражении $P = n_n m u$, который является концентрацией нормальной компоненты.

Рассмотрим сначала случай высокой и промежуточной плотностей. Используем для оценки вклада одночастичных возбуждений в области больших и промежуточных плотностей связь между $n_s(T)$ и T_c^0 в приближении БКШ [20] при $T_c^0 - T_c \ll T_c^0$:

$$\frac{n_s}{n} = \frac{2(T_c^0 - T)}{T_c^0}, \quad (39)$$

и соотношение

$$\Delta(0) = 1.76T_c^0. \quad (40)$$

Для величины $\Delta(0)$ подставляем полученное в результате вариационного расчета значение щели при нулевой температуре.

Можно учесть также и вклад коллективных возбуждений в концентрацию нормальной компоненты. В отличие от сверхпроводников, где вследствие заряда куперовских пар вместо звукового спектра коллективных колебаний возникает плазменная ветвь колебаний, в экситонной фазе пары нейтральны и звуковая ветвь существует. При низких температурах вклад термодинамически равновесных элементарных возбуждений может быть описан в приближении идеального бозе-газа. В интеграл (38) надо подставить вместо функции распределения Ферми функцию распределения Бозе. Тогда для n_s имеем

$$n_s = n - n \frac{2T - T_c^0}{T_c^0} - \frac{\pi^2 T^3}{30\hbar^2 c^4 m} - \frac{2mT\pi^2}{3(2\pi\hbar)^2}, \quad (41)$$

где $c = \sqrt{(n/m)d\mu/dn}$ — скорость звука, а μ — химический потенциал системы, определяющийся для промежуточной плотности в результате вариационного расчета (см. разд. 4).

Для разреженного экситонного газа общий подход аналогичен случаю промежуточных плотностей, но мы учитываем вклад в нормальную плотность лишь коллективных звуковых возбуждений. Тогда справедливо выражение

$$n_s = n - \frac{\pi^2 T^3}{30\hbar^2 c^4 m} - \frac{2mT\pi^2}{3(2\pi\hbar)^2}, \quad (42)$$

где c — скорость звука для разреженного экситонного газа, а химический потенциал системы μ (в отличие от рассмотренного выше случая промежуточной плотности) определяется суммой (36) вкладов обменного, диполь-дипольного и ван-дер-ваальсова взаимодействий экситонов.

В результате, подставляя (41) или (42) в (37), можно получить оценки для значения температуры фазового перехода Костерлица–Таулесса (см. таблицу). Величина T_c заметно уменьшается с ростом расстояния между ямами D и уменьшением концентрации экситонов. Переход в сверхтекучее состояние при $D < D_{cr} \approx 1.1$ в метастабильной газовой фазе экситонов, а также в стабильной газовой фазе при $D > D_{cr}$ будет зависеть от задаваемой внешними условиями концентрации и определяется приведенной выше формулой для сверхтекучей плотности. При $T = T_c$ (универсальным [19]) скачком исчезает глобальная сверхтекучая плотность, а при несколько более высоких T кроссовером исчезает флуктуационная локальная сверхтекучая плотность $n_s(L)$, определяемая перенормировками на все меньших промежуточных масштабах L .

Локальная сверхтекучая плотность выше T_c может проявляться, например, при наблюдении диффузии экситонов на промежуточные расстояния (с помощью локального измерения фотолюминесценции экситонов в двух точках с использованием оптических волокон или масок с отверстиями (в экспериментах типа [3])). Появлению глобальной сверхтекучей плотности при $T = T_c$ должно отвечать скачкообразное возрастание

D	$-E_{ex} [\text{Ry}_2^*]$	$-E_t [\text{Ry}_2^*]$	$E_b [\text{Ry}_2^*]$	r_s^{min}	$k_B T_c^0 \cdot 10^{-3} [\text{Ry}_2^*]$	$k_B T_c \cdot 10^{-3} [\text{Ry}_2^*]$
0	1.0	1.06	0.06	2.2	1.7	1.3
0.5	0.80	0.84	0.04	2.6	1.3	1.1
1.0	0.50	0.51	0.01	3.2	0.8	0.7
5.0	0.26	—	—	—	—	0.2

Примечание. Приведены зависимости от расстояния D между плоскостями энергии изолированного экситона E_{ex} , полной энергии E_t , приходящейся на электрон-дырочную пару, энергии связи $E_b = E_{ex} - E_t$ жидкой фазы на пару, равновесного расстояния между экситонами в основном состоянии r_s^{min} ($r_s^{min} = \frac{1}{a^* \sqrt{\pi n_{min}}}$; $a^* = \frac{\hbar \epsilon}{2m\epsilon^2}$; n_{min} — равновесная плотность), критических температур Костерлица–Таулесса (T_c) и БКШ (T_c^0). Приняты обозначения m — приведенная масса; ϵ — диэлектрическая проницаемость. Значения T_c , T_c^0 в первых трех строках соответствуют равновесным концентрациям жидкой фазы при заданных расстояниях D ; четвертая строка соответствует фиксированному $r_s = 100.0$ (жидкая фаза не существует при $D \geq D_{sp} \simeq 1.9$); $\text{Ry}_2^* = 2me^2/\hbar^2\epsilon$.

коэффициента взаимного кулоновского увлечения электронов и дырок в двухслойной системе [8]. В противоположность обычным сверхпроводникам отличные от нуля (и равные) электрические поля имеются в сверхтекучей фазе при увлечении частиц одного слоя другим. Сверхтекучее состояние при $T < T_c$ проявляется в существовании незапускающих («сверхпроводящих») противоположно направленных электрических токов в каждом слое. Учет туннелирования в равновесной электрон-дырочной системе (в двойной квантовой яме второго рода) приводит к интересным джозефсоновским явлениям в системе: поперечному джозефсоновскому току, неоднородным продольным токам [6], диамагнетизму в параллельном контакту продольном магнитном поле H (меньшем некоторого критического значения H_{c1} , зависящего от коэффициента туннелирования) и смешанному состоянию с джозефсоновскими вихрями при $H > H_{c1}$ [8] (кроме того, учет туннелирования приводит к потере симметрии параметра порядка и к изменению характера фазового перехода).

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, программы «Твердотельные наноструктуры» и Международным научным фондом.

Один из авторов (Ю. Е. Л.) признателен А. Мак-Доналду (A. MacDonald), В. Сивану (V. Sivan), Э. Бурштейну (E. Burstein), участникам конференции по низкоразмерным системам (Триест) за интерес к работе и полезные обсуждения результатов. Ю. Е. Л. благодарен Ю. Лу (Yu. Lu) и Э. Тосатти (E. Tosatti) за гостеприимство в Международном центре теоретической физики (Триест), где была выполнена часть работы.

Литература

1. V. Sivan, P. M. Solomon, and H. Strikman, Phys. Rev. Lett. **74**, 450 (1995).
2. T. Fukuzawa, E. E. Mendez, and J. M. Hong, Phys. Rev. Lett. **64**, 3066 (1990); J.-P. Cheng, J. Kono, B. D. McCombe et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 450 (1995).

3. L. V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 304 (1994); A. Zrenner, L. V. Butov, M. Hang, G. Abstreiter, G. Bohm, and G. Weigmann, Phys. Rev. Lett. **72**, 3383 (1994).
4. M. Bayer, V. B. Timofeev, F. Faller et al., Phys. Rev. B **54**, 2335 (1996).
5. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 26 (1975); ЖЭТФ **71**, 738 (1976); Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Sol. St. Comm. **18**, 628 (1976); **21**, 211 (1977); Physica A **93**, 493 (1978); Ю. Е. Лозовик, Тезисы докл. 1-й Всес. конф. по диэлектрической электронике, Ташкент (1973), с. 59.
6. А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **76**, 670 (1979); Yu. E. Lozovik and A. V. Klyuchnik, J. Low. Temp. Phys. **38**, 761 (1980); J. Phys. C **11**, L483 (1978); Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **25**, 18 (1977); I. O. Kulik and S. I. Shevchenko, Sol. St. Comm. **21**, 409 (1977); Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Sol. St. Comm. **22**, 117 (1977).
7. И. В. Лернер, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **78**, 1167 (1980); **80**, 1488 (1981); **82**, 1188 (1982); А. Б. Дзюбенко, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **25**, 1519 (1983); **26**, 1540 (1984); A. B. Dzyubenko and Yu. E. Lozovik, J. Phys. A **24**, 415 (1991); D. Paquet, T. M. Rice, and K. Ueda, Phys. Rev. B **32**, 5208 (1985); С. М. Дикман, С. В. Иорданский, Письма в ЖЭТФ **63**, 43 (1996).
8. Yu. E. Lozovik, Abstracts of Rep. on Adriatico Conf. «The Electron Quantum Liquids in Systems of Reduced Dimensions», Trieste, ICTP (1996), p. 51.
9. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968); Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964); А. Н. Козлов, Л. А. Максимов, ЖЭТФ **48**, 1184 (1965); Л. В. Келдыш, А. П. Силин, Крат. сообщ. ФИАН № 8, 33 (1975); В. I. Halperin and T. M. Rice, Sol. St. Phys. **21**, 115 (1968); Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ФТТ **17**, 1613 (1975).
10. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
11. Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, Москва (1970).
12. А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **20**, 625 (1978).
13. Д. Пайнс, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, Мир, Москва (1967).
14. W. F. Brinkman and T. M. Rice, Phys. Rev. B **7**, 1508 (1973).
15. Ю. Е. Лозовик, В. Н. Нишанов, ФТТ **18**, 3267 (1976).
16. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, Письма в ЖЭТФ **64**, 526 (1996); Yu. E. Lozovik and O. L. Berman, Phys. Scripta (in print) (1996).
17. Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Physica A **93**, 493 (1978).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
19. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973); D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
20. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).