

## ГЕНЕРАЦИЯ ФАЗОВО-КОРРЕЛИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА В ГИПЕРКОМБИНАЦИОННО-АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Ю. П. Малакян, А. Р. Мхитарян

*Институт физических исследований Национальной академии наук Армении  
378410, Аштарак-2, Армения*

Поступила в редакцию 13 августа 1996 г.

Представлен квантовый анализ эффекта корреляции монохроматических полей стока и параметрического излучений, которые генерируются в двухфотонно-поглощающей среде на основе гиперкомбинационного рассеяния и четырехволнового смешения соответственно. Результаты показывают, что в условиях деструктивной интерференции между двумя процессами обе моды усиливаются в среде коррелированным образом так, что после некоторого характеристического расстояния выходят на стационарный режим распространения с одинаковыми амплитудами и статистикой фотонов и с обратными фазами, а среда становится прозрачной для них. Вычислены интенсивности полей, ширины линии излучений и диффузия суммарной фазы, определяющая степень корреляции фазовых шумов на выходе, и показано, что как бы ни диффундировали фазы отдельных мод, квантовые флуктуации в суммарной фазе могут быть полностью сжаты.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация фазово-коррелированных пучков излучения, в котором квантовые шумы подавлены ниже когерентного предела, остается объектом интенсивных исследований [1–11], целью которых является создание высокоточных лазерных интерферометров. Для повышения чувствительности этих приборов, которая обычно ограничена вакуумными флуктуациями в пассивных интерферометрах и спонтанными шумами в активных, было предложено использовать сжатые состояния света [1, 2] и лазеры коррелированного испускания [3–5]. Генерация двухмодового сжатого света на основе четырехволнового смешения, теоретически исследованная в работах [6, 7], была получена в [8–10] со степенью сжатия до 20%, а подавление спонтанных шумов в относительной фазе двухмодового лазера коррелированного испускания ниже предела Шавлова–Таунса наблюдалось в [11]. Однако некоторые принципиальные трудности ограничивают в обоих случаях применение этих схем. Как было показано в [6], потери в модах накладывают принципиальное ограничение на величину сжатия, которая может быть получена в четырехволновом смешении. Более того, потери должны быть малы не только по абсолютной величине, но и по сравнению с константой нелинейного взаимодействия между модами, что не всегда достижимо, поскольку в резонансной среде сильные нелинейности обычно сопровождается большими потерями (см. первую работу [7]). В лазере коррелированного испускания решающую роль в подавлении спонтанных шумов играет когерентность между атомными состояниями, и поэтому прежде чем инжектировать атомы в лазерный резонатор, необходимо приготовить их в когерентной суперпозиции этих состояний [5], что требует применения методов лазерной генерации без инверсии населенностей.

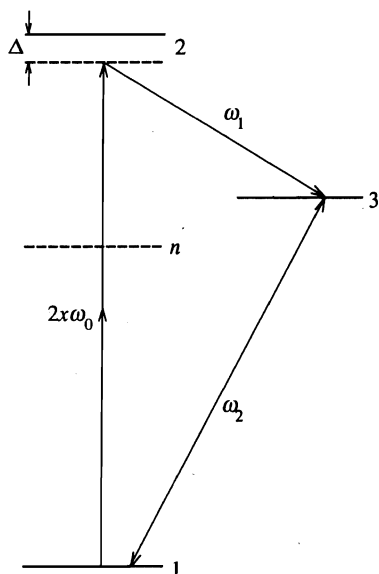


Рис. 1. Диаграмма энергетических уровней гиперкомбинационно активного атома;  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — частоты накачки, стоксова и параметрического полей соответственно

В настоящей работе мы предлагаем новый механизм генерации фазово-коррелированного света, основанный на деструктивной интерференции между гиперкомбинационным рассеянием и сопровождающим его четырехволновым смещением. Напомним, что через гиперкомбинационное рассеяние в среде с двухфотонным поглощением генерируется стоксово излучение, квазирезонансное атомному переходу  $2 \rightarrow 3$  (рис. 1), которое вместе с полем накачки индуцирует на основе четырехволнового смещения генерацию параметрического поля на частоте перехода  $3 \rightarrow 1$ . Эти процессы хорошо исследованы как теоретически [12, 13], так и экспериментально [14–17], а эффект деструктивной интерференции был предсказан в наших ранних работах [12, 18] и недавно подтвержден экспериментально в [19, 20]. Его физический смысл будет обсужден ниже.

Мы здесь представляем квантовую теорию этих процессов и показываем, что в условиях деструктивной интерференции квантовые флуктуации в суммарной фазе двух мод могут быть сжаты практически до 100%, а поля усилены, несмотря на то что в отличие от предыдущих схем четырехволнового смещения константа параметрического взаимодействия полей меньше, чем линейные потери в модах. Речь идет фактически о генерации яркого сжатого света в экспериментально легко реализуемой системе. Мы покажем также, что на больших расстояниях наступает стационарный режим распространения, что обеспечивает стабилизацию амплитуд полей, а среда становится прозрачной. Важная особенность рассматриваемой схемы заключается в том, что частоты двух мод меняются в широком интервале. Так, в случае гиперкомбинационного рассеяния на переходе  $5S-5P_{3/2}$  через промежуточное состояние  $5D_{5/2}$  в парах рубидия они приблизительно равны, в то время как в парах тяжелых металлов стоксово излучение генерируется в инфракрасном диапазоне, а параметрическое поле — в вакуумном ультрафиолетовом [16, 17].

В нашей предыдущей работе [21] в рамках квазиклассического подхода было показано, что стоксово и параметрическое поля коррелированы по амплитуде и фазе. Вопрос о влиянии квантовых шумов на величину этой корреляции исследуется в настоящей работе. Мы вычисляем спектральные ширины излучений и диффузию суммарной фазы,

определяющую фазовую корреляцию мод на выходе. С этой целью решаются стохастические дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд одномодовых стокасова и параметрического излучений. Исходным для квантового анализа является базисное уравнение для матрицы плотности двух мод, которое выводится в следующем разделе. Здесь же мы сообщаем об обнаружении когерентной суперпозиции полей, которая распространяется в среде без изменения. В разд. 3 находятся общие решения для квазиклассических амплитуд, а также для среднего числа и дисперсии фотонов, описывающие развитие корреляции между модами как функцию длины распространения. В разд. 4 вычисляются ширины излучений и квантовые флуктуации в суммарной фазе двух мод и обсуждается степень фазовой корреляции на выходе. Заключительные замечания содержатся в разд. 5.

## 2. БАЗИСНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ДВУХ МОД

Рассмотрим взаимодействие газовой среды из идентичных атомов с конфигурацией уровней, изображенной на рис. 1, с классическим полем накачки  $E$  на частоте  $\omega_0$  с двухфотонной расстройкой  $\Delta = \omega_{21} - 2\omega_0$  и с квантованными одномодовыми полями стокасова и параметрического излучений с частотами  $\omega_1 = \omega_{21} - \Delta$  и  $\omega_2 \sim \omega_{31}$ , которые описываются операторами уничтожения (рождения)  $a_1(a_1^\dagger)$  и  $a_2(a_2^\dagger)$  соответственно. Гамильтониан взаимодействия системы, который получается адиабатическим исключением амплитуды заполнения уровня 2, в резонансном приближении имеет вид

$$H = \frac{i\hbar}{\sqrt{V}} \sum_i (Ga_1^\dagger - fa_2)\sigma_{31}^{(i)} + \text{H.c.}, \quad (1)$$

где  $V$  — объем квантования, считающийся равным объему среды,  $\sigma_{31}^{(i)}$  — оператор атомного перехода  $1 \rightarrow 3$  для  $i$ -го атома, а коэффициенты

$$G = \sqrt{\frac{2\pi\omega_2}{\hbar}} E^2 \mu_{23} \sum_n \frac{\mu_{1n}\mu_{n2}}{\hbar^2 \Delta(\omega_{n1} - \omega_0)}, \quad (2)$$

$$f = \sqrt{\frac{2\pi\omega_3}{\hbar}} \mu_{31}$$

представляют соответственно эффективный трехфотонный матричный элемент перехода  $1 \rightarrow 3$  с испусканием стокасова фотона и константу связи параметрического поля. В дальнейшем для простоты будем считать  $G$  и  $f$  действительными и положительными. Они связаны с коэффициентом усиления стокасова поля  $\alpha$  и коэффициентом поглощения параметрического поля  $\beta$  соотношениями [21]

$$\alpha = \frac{2G^2 N}{c\Gamma}, \quad \beta = \frac{2f^2 N}{c\Gamma}, \quad (3)$$

где  $N$  — плотность числа атомов,  $\Gamma$  — поперечная релаксация поляризации на частоте  $\omega_2 \cong \omega_{31}$ .

Условие деструктивной интерференции между гиперкомбинационным рассеянием и четырехволновым смешением записывается в виде [18]

$$\alpha < \beta. \quad (4)$$

Этому условию нетрудно удовлетворить, если учесть, что  $\alpha$  зависит от двух свободных параметров, каковыми являются интенсивность и двухфотонная расстройка накачки, а  $\beta$  — величина постоянная, пропорциональная силе осциллятора перехода  $1 \rightarrow 3$ .

Напомним, что деструктивная интерференция имеет место только в направлении вперед (направление распространения импульса накачки), благодаря тому что в этом случае фазовая расстройка волновых векторов трех волн  $\Delta k = 2k - k_1 - k_2$  мала по сравнению с  $\alpha$ . В направлении назад параметрические процессы подавлены и имеет место только гиперкомбинационное рассеяние. Заметим также, что поскольку деструктивная интерференция сильно зависит от относительных фаз трех полей и чувствительна к столкновительному и доплеровскому уширениям, расстройка  $\Delta$  считается много большей, чем ширины этих процессов.

Уравнение для матрицы плотности двух мод  $\rho$  получается стандартным образом с использованием гамильтониана (1) и в предположении, что все атомы остаются в основном состоянии 1:

$$\frac{1}{c} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\alpha}{2} [a_1 a_1^\dagger \rho - 2a_1^\dagger \rho a_1 + \rho a_1^\dagger a_1] - \frac{\beta}{2} [a_2^\dagger a_2 \rho - 2a_2 \rho a_2^\dagger + \rho a_2 a_2^\dagger] + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} [(a_1 a_2 \rho + \rho a_1 a_2 - 2a_2 \rho a_1) + \text{H.c.}] \quad (5)$$

Сделаем два замечания относительно уравнения (5). Во-первых, непосредственные потери имеются только в  $\omega_2$ -мод в виде поглощения на переходе  $1 \rightarrow 3$ , которое описывается вторым членом в правой части (5). Индивидуальные потери в  $\omega_1$ -мод отсутствуют, поскольку мы пренебрегаем движением населенностей, считая, что уровень 3 не заселяется. Тем не менее стоксово поле может поглотиться за счет параметрического взаимодействия с константой связи  $\sqrt{\alpha\beta}/2$ , которая согласно (4) меньше, чем линейные потери в  $\omega_2$ -мод. Остальными потерями мы пренебрегаем. Первый член в правой части (5) соответствует испусканию стоксова фотона при трехфотонном переходе атома  $1 \rightarrow 3$ . Во-вторых, поскольку мы рассматриваем стационарное взаимодействие с полями, предполагая, что длительность импульсов больше всех времен релаксаций среды, то в одномодовом приближении уравнение (5) равнозначно уравнению распространения  $z = ct$ . Тогда, вводя оператор

$$M = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} [\sqrt{\alpha} a_1^\dagger - \sqrt{\beta} a_2] \quad (6)$$

с коммутационным свойством  $[M, M^\dagger] = 1$ , (5) можно представить как уравнение

$$\frac{d\rho}{dz} = -g [M^\dagger M \rho + \rho M^\dagger M - 2M \rho M^\dagger], \quad g = \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad (7)$$

которое решается с граничным условием  $\rho = \rho_1 \rho_2$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — начальные матрицы плотности стоксовой и параметрической мод и будут заданы ниже. Сразу обратим внимание на одну особенность уравнения (7). Оно содержит только линейную комбинацию полей  $M$ , в то время как их вторая линейная суперпозиция

$$L = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} [-\sqrt{\beta} a_1^\dagger + \sqrt{\alpha} a_2] \quad (8)$$

является интегралом движения, поскольку  $[M, L] = [M^\dagger, L] = 0$ . Это обстоятельство приводит к тому, что поля с самого начала усиливаются и распространяются в среде коррелированным образом так, чтобы сохранить статистические свойства составной моды

$L$ . Корреляция становится максимальной в области  $z > g^{-1}$ , где оба поля принимают стационарное значение, а среда становится прозрачной. Решение уравнения (7) в этом пределе находится из равенства  $M\rho = \rho M^+ = 0$ , т. е.  $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ , где  $|\phi\rangle$  удовлетворяет уравнению [22]

$$(\sqrt{\alpha} a_1^+ - \sqrt{\beta} a_2) |\phi\rangle = 0. \quad (9)$$

Это уравнение позволяет найти все асимптотические соотношения между амплитудами, средним числом фотонов и статистикой двух мод, не решая уравнение (7). В частности, из (9) следует

$$\begin{aligned} \langle a_1(\infty) \rangle &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \langle a_2^+(\infty) \rangle, \quad \langle n_1(\infty) \rangle = \frac{\beta}{\alpha} \langle n_2(\infty) \rangle - 1, \\ \langle \Delta n_1^2(\infty) \rangle &= \frac{\beta(\beta^2 - 2g^2)}{\alpha(\alpha\beta - 2g^2)} \langle \Delta n_2^2(\infty) \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$  — дисперсия числа фотонов. При большом усилении полей можно с помощью замены  $a_i \rightarrow E_i/\sqrt{\omega_i}$ ,  $i = 1, 2$  перейти к классическим амплитудам  $E_1$  и  $E_2$ , которые, как видно из (10), равны по величине (с точностью до множителя  $\sqrt{\beta\omega_1/\alpha\omega_2}$ ) и имеют обратные фазы. Более того, при  $\alpha \leq \beta$  обе моды обладают фактически одинаковой статистикой. Но, что более интересно, воспользовавшись (10) и свойством пространственно инвариантной структуры  $L$

$$\langle (L^+)^m L^p \rangle|_{z>g^{-1}} = \langle (L^+)^m L^p \rangle|_{z=0}, \quad (11)$$

где  $m$  и  $p$  — целые числа, можно также найти корреляцию между асимптотическими полями и входными импульсами. Рассмотрим случай, когда сигнальное поле имеется только на частоте  $\omega_1$ , а второе поле генерируется в среде. Тогда с помощью (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \langle a_1(\infty) \rangle &= \frac{\beta}{2\alpha} \langle a_1(0) \rangle, \\ \langle n_1(\infty) \rangle &= \frac{\beta^2}{4g^2} (\langle n_1(0) \rangle + 1) - 1 \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\langle \Delta n_1^2(\infty) \rangle = \frac{\beta^4}{16g^4} [\langle \Delta n_1^2(0) \rangle + \langle n_1(0) \rangle] - \frac{\beta^2}{4g^2} \langle n_1(0) \rangle. \quad (13)$$

Особый интерес представляет последний результат, связывающий статистику фотонов  $\omega_1$ -моды на входе в среду и в асимптотике. Видно, что в случае  $\alpha \ll \beta$  статистика фактически сохраняется, но усиления поля при этом почти нет (см. (12)), а  $\omega_2$ -мода, согласно (10), не генерируется. Наоборот, заметное усиление имеет место, если  $\alpha \leq \beta$ , но при этом в еще большей степени ухудшается статистика. Есть некоторая область оптимальных значений  $\alpha/\beta$ , для которых при начальном когерентном  $\omega_1$ -поле асимптотические моды также когерентны, но они одновременно и значительно усилены. Более подробно эти вопросы будут обсуждены в следующем разделе.

В заключение отметим, что инвариантные комбинации полей типа  $L$  были обнаружены также в случае генерации коррелированных импульсов в трехуровневых  $\Lambda$ -системах в условиях электромагнитно индуцированной прозрачности [23–25]. Их простые свойства позволяют компактным образом описать возникновение корреляции между полями, не изучая при этом динамику процессов.

### 3. КОРРЕЛИРОВАННОЕ УСИЛЕНИЕ ПОЛЕЙ. ВЕЛИЧИНА КОРРЕЛЯЦИЙ ЧИСЛА ФОТОНОВ

В настоящем разделе мы исследуем законы коррелированного усиления полей и роста корреляции между интенсивностями двух мод как функцию  $z$ , предполагая, что вначале они находятся в чистом состоянии и корреляция между ними отсутствует. Квантовая динамика, описываемая уравнением (7), приводит к сильному перемешиванию (entanglement) полей, и при  $z > 0$  матрица плотности  $\rho$  уже не факторизуется в виде прямого произведения векторов состояния отдельных мод. Аналитическое решение уравнения (7) в общем случае нам неизвестно, и мы находим амплитуды, среднее число и дисперсию фотонов из соответствующих уравнений, получаемых из (7). Для средних значений комплексных амплитуд и чисел фотонов эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\langle a_1 \rangle}{dz} &= \frac{\alpha}{2} \langle a_1 \rangle - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} \langle a_2^+ \rangle, \\ \frac{d\langle a_2 \rangle}{dz} &= -\frac{\beta}{2} \langle a_2 \rangle + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} \langle a_1^+ \rangle\end{aligned}\quad (14)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{d\langle n_1 \rangle}{dz} &= \alpha \langle n_1 \rangle - D + \alpha, \quad \frac{d\langle n_2 \rangle}{dz} = -\beta \langle n_2 \rangle + D, \\ D &= \sqrt{\alpha\beta} \operatorname{Re} \eta, \quad \eta = \langle a_1 a_2 \rangle, \\ \frac{d\eta}{dz} &= -g\eta + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} (\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle + 1).\end{aligned}\quad (15)$$

При этом (14), (15) имеют решения

$$\begin{aligned}\langle a_1(z) \rangle &= \frac{a_{10}}{2g} (\beta - \alpha e^{-gz}) - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2g} a_{20}^* (1 - e^{-gz}), \\ \langle a_2(z) \rangle &= \frac{a_{20}}{2g} (\beta e^{-gz} - \alpha) + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2g} a_{10}^* (1 - e^{-gz})\end{aligned}\quad (16)$$

и

$$\begin{aligned}\langle n_1(z) \rangle &= \frac{n_{10}}{4g^2} (\beta - \alpha e^{-gz})^2 + \frac{\alpha\beta}{4g^2} n_{20} (1 - e^{-gz})^2 + n_{1s}, \\ \langle n_2(z) \rangle &= \frac{n_{20}}{4g^2} (\beta e^{-gz} - \alpha)^2 + \frac{\alpha\beta}{4g^2} n_{10} (1 - e^{-gz})^2 + n_{2s}, \\ \eta(z) &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{4g^2} [n_{10} (\beta - \alpha e^{-gz}) + n_{20} (\alpha - \beta e^{-gz})] (1 - e^{-gz}) + \eta_s,\end{aligned}\quad (17)$$

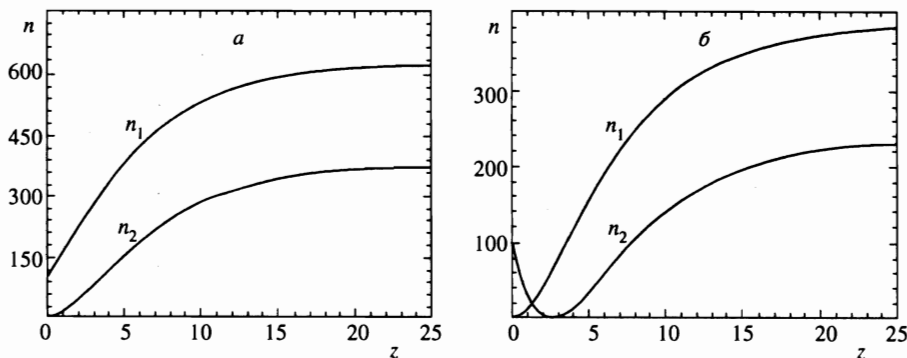


Рис. 2. Зависимость числа фотонов от  $z$  (в единицах  $g^{-1}$ ) в стоксовой ( $n_1$ ) и параметрической ( $n_2$ ) модах при  $n_{10} = 100$ ,  $n_{20} = 0$  и  $\alpha = 0.6\beta$  (а) и при  $n_{10} = 0$ ,  $n_{20} = 100$  (б)

где  $n_{i0} = |a_{i0}|^2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $a_{i0}$  — начальные значения амплитуд, а через  $n_{i_s}$  и  $\eta_s$  обозначены вклады спонтанных фотонов:

$$\begin{aligned} n_{1s} &= \frac{1}{4g^2}(\beta - \alpha e^{-gz})^2 - 1, \\ n_{2s} &= \frac{\alpha\beta}{4g^2}(1 - e^{-gz})^2, \\ \eta_s &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{4g^2}(\beta - \alpha e^{-gz})(1 - e^{-gz}). \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе (17) было учтено, что  $\eta(0) = 0$ . Заметим, что  $\eta$  — действительная величина.

Объясним действие деструктивной интерференции между гиперкомбинационным рассеянием и четырехволновым смешением на примере уравнения для  $\langle n_1 \rangle$ . Первый член  $\alpha \langle n_1 \rangle$  в его правой части описывает рост числа стоксовых фотонов за счет гиперкомбинационного рассеяния с коэффициентом усиления  $\alpha$ . Второй член  $D$  соответствует вкладу четырехволнового смешения и является отрицательным, поскольку два процесса конкурируют. Однако деструктивная интерференция между двумя процессами приводит к их подавлению только в том случае, когда величина  $D$  сравнима с  $\alpha \langle n_1 \rangle$  или больше  $\alpha \langle n_1 \rangle$ . А это имеет место, только если  $\beta \geq \alpha$ .

Из этих решений следует, что в зависимости от начальных условий поля усиливаются совершенно по-разному. Так, если на вход в среду подается только стоксов сигнал, а параметрическое поле генерируется в среде, т.е.  $a_{10} \neq 0$  и  $a_{20} = 0$ , то, как следует из (16), оба поля монотонно возрастают по  $z$  с постоянной фазой. Однако в обратном случае  $a_{20} \neq 0$  и  $a_{10} = 0$ ,  $\omega_2$ -поле сначала полностью поглощается в окрестности  $z_0 = g^{-1} \ln(\beta/\alpha)$ , а потом вновь генерируется, но уже с фазой, смещенной относительно начального значения на  $\pi$ . Физический смысл этого эффекта заключается в том, что  $\omega_2$ -мода поглощается из-за деструктивной интерференции (4). При этом на переходе  $3 \rightarrow 1$  создается когерентная поляризация, которая, однако, не релаксирует, а за счет параметрического взаимодействия генерирует излучение снова в  $\omega_2$ -моду, но уже с фазой, соответствующей четырехволновому смешению. Эффект хорошо виден на рис. 2, показывающем поведение зависимости  $\langle n_{1,2}(z) \rangle$  от  $z$  для двух начальных значений с пренебрежением вклада спонтанных фотонов.

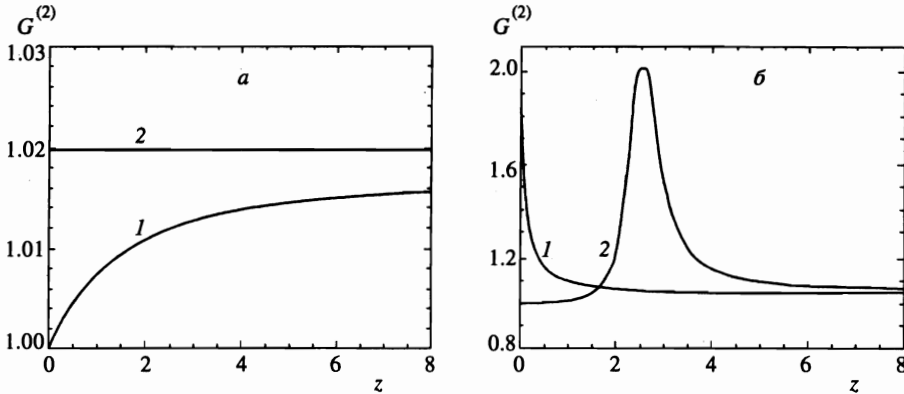


Рис. 3. Поведение корреляционных функций второго порядка  $G_1^{(2)}(z)$  (кривая 1) и  $G_2^{(2)}$  (кривая 2) (в единицах  $g^{-1}$ ) для  $\alpha = 0.6\beta$  и  $n_{10} = 100, n_{20} = 0$  (a) и для  $n_{10} = 0, n_{20} = 100$  (б)

При исследовании статистики фотонов более удобным параметром, чем дисперсия фотонов, является корреляционная функция второго порядка  $G_i^{(2)} = [\langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2] / \langle n_i \rangle^2$ , изменяющаяся в малом интервале значений. Напомним, что для когерентного поля  $G^{(2)} = 1$ . Для вычисления  $G^{(2)}$  необходимо знать решение для  $\langle n_i^2 \rangle$ . Последние связаны с новыми корреляторами  $\langle n_1 n_2 \rangle, \langle a_1^{+2} a_2^{+2} \rangle$  и т.д. Уравнения для этих величин довольно громоздки, и мы не будем приводить их здесь, тем более, что аналитические решения для них найдены только в случае начальных когерентных полей или когда они генерируются из состояния вакуума. В обоих случаях решения для  $\langle n_i^2 \rangle$  и  $\langle n_1 n_2 \rangle$  в пренебрежении членами  $n_{is}^2$  и  $\eta_s^2$  имеют вид

$$\langle n_i^2 \rangle = \langle n_i \rangle^2 + (2n_{is} + 1)\langle n_i \rangle, \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

$$\langle n_1 n_2 \rangle = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle + 2\eta_s. \tag{20}$$

Соответственно, для функций  $G_i^{(2)}$  получаем

$$G_i^{(2)} = 1 + \frac{2n_{is}}{\langle n_i \rangle}. \tag{21}$$

На рис. 3 показано поведение  $G_i^{(2)}$  для разных начальных условий. Видно, что в первом случае, когда начальное стоксово поле когерентно,  $a_{10} \neq 0$  и  $G_i^{(2)} = 1$ , а параметрическое поле находится в состоянии вакуума, обе моды фактически когерентны с самого начала. В обратном случае стоксово поле хаотично на малых расстояниях, но очень быстро становится когерентным и намного раньше, чем  $\langle n_i(z) \rangle$ , достигает стационарного значения. В то же время параметрическая мода становится хаотичной в области полного поглощения, но также быстро восстанавливает статистику начального когерентного поля. Таким образом, в обоих случаях квантовые шумы существенно подавлены, что приводит к пуассоновскому распределению в обеих модах.

Обратимся теперь к вопросу о величине корреляции флуктуаций чисел фотонов. Она определяется кросскорреляционной функцией  $C = \langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle$ , которая для некоррелированных мод равна нулю. Чем больше  $C$ , тем сильнее перемешиваются поля



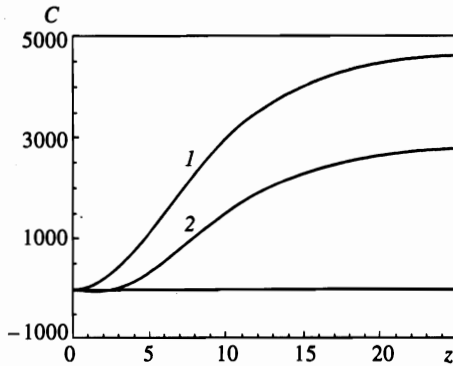


Рис. 4. Эволюция кросскорреляции  $C$  между двумя модами для двух начальных значений заполнения мод: 1 —  $n_{10} = 100$ ,  $n_{20} = 0$ , 2 —  $n_{10} = 0$ ,  $n_{20} = 100$ ;  $\alpha = 0.6\beta$

и тем выше степень корреляции. Очевидно, что коррелированы только те спонтанные фотоны в модах, которые рождаются парами. Действительно, из (20) следует, что

$$C = 2\eta\eta_s, \quad (22)$$

т. е.  $C \propto \eta_s$ , а последнее определяет процесс парного испускания спонтанных фотонов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Поскольку  $C \sim n_{i0}/g^4$ , корреляция флуктуаций числа фотонов растет пропорционально интенсивности сигнального поля и тем быстрее, чем ближе к единице отношение  $\beta/\alpha$ . Из рис. 4 видно, что при прочих равных условиях большая корреляция имеет место в случае начального когерентного стоксова поля. В любом случае положительное значение  $C$  при больших  $z$  указывает на коррелированное рождение спонтанных фотонов в модах, число которых растет с  $z$ , достигая максимума в стационарном режиме.

#### 4. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЙ. КОРРЕЛЯЦИЯ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

В линейной теории амплитудные и фазовые флуктуации вносят одинаковый вклад в ширину спектра излучений. Однако в области сильных усилений из-за стабилизации амплитуд вклад амплитудных флуктуаций подавлен, и спектр излучений определяется только диффузией фазы в каждой моде. Для их вычисления будем исходить из стохастических дифференциальных уравнений для  $c$ -числовых комплексных амплитуд  $A_i$ ,  $A_i^+$ ,  $i = 1, 2$ , стохастические средние которых соответствуют средним значениям операторов  $\langle a_i \rangle$  и  $\langle a_i^+ \rangle$ . Эти уравнения получаются из (5) при разложении матрицы плотности  $\rho$  по положительному  $P$ -представлению и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \dot{A}_1 &= \frac{\alpha}{2} A_1 - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} A_2^+ + f_1, \\ \frac{1}{c} \dot{A}_2^+ &= -\frac{\beta}{2} A_2^+ + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} A_1 + f_2^+, \end{aligned} \quad (23)$$

где флуктуационные операторы  $f_i$  и  $f_i^+$  имеют нулевые средние значения и коррелированы с  $\delta$ -функцией, что соответствует марковскому приближению в соответствующих процессах распада. Значения корреляторов приведены в Приложении.

Перейдем к полярным координатам  $A_j = r_j \exp(i\varphi_j)$ ,  $j = 1, 2$ , где  $r_j$  считаются постоянными и равными  $\sqrt{\langle n_j(\infty) \rangle}$ . Асимптотические значения чисел фотонов находятся из (17) при  $z \gg g^{-1}$ . Тогда для фаз из (23) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} \frac{r_2}{r_1} \sin \phi + F_1(t), \\ \frac{1}{c} \dot{\varphi}_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\alpha\beta} \frac{r_1}{r_2} \sin \phi + F_2(t), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\phi = \varphi_1 + \varphi_2$ , а  $F_i(t)$  — фазовые шумовые операторы с  $\langle F_i(t) \rangle = 0$ .

Их коэффициенты диффузии также приведены в Приложении. Спектр излучений вычисляется согласно формуле

$$S_j(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle A_j^+(t+\tau) A_j(t) \rangle = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} S_j(\tau), \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

где, как нетрудно показать,

$$S_j(\tau) = \langle n_j(\infty) \rangle \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi_j^2(\tau) \rangle \right], \quad (26)$$

а дисперсии фаз определяются через коэффициенты диффузии как

$$\langle \Delta\varphi_j^2(\tau) \rangle = 2D_{jj}\tau. \quad (27)$$

Подставляя  $D_{jj}$ , из (25) находим ширины линий излучения для стоксовой и параметрической мод соответственно:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{8\langle n_1(\infty) \rangle}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta}{8\langle n_2(\infty) \rangle}. \quad (28)$$

Эти результаты с точностью до множителя 1/2 совпадают с формулой Шавлова–Таунса для ширины линии излучения стандартного лазера выше порога с механизмом линейного поглощения. Подавление в два раза обусловлено пренебрежением амплитудными флуктуациями по соображениям, приведенным выше. Подставляя из (10)  $\langle n_1(\infty) \rangle = \beta \langle n_2(\infty) \rangle / \alpha$ , находим соотношение

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 > 1, \quad (29)$$

показывающее, что по сравнению со стоксовой модой параметрическая мода уширена в большей степени, хотя число спонтанных фотонов, наоборот, больше в стоксовой моде:  $\langle n_{1s} \rangle > \langle n_{2s} \rangle$  (см. (18)). Дело в том, что ширины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  определяются разными стохастическими процессами. Диффузия фазы в  $\omega_1$ -моды действительно обусловлена испусканием спонтанных фотонов, и поэтому  $\gamma_1 \approx \alpha$ . В то же время фаза  $\omega_2$ -моды диффундирует из-за поглощения фотонов с вероятностью  $\beta > \alpha$ , и это приводит, с одной стороны, к уменьшению количества спонтанных фотонов во второй моде, а с другой, — к увеличению ширины линии излучения. Результат для отношения  $\gamma_2/\gamma_1$  (29) представляет самостоятельный интерес и легко может быть проверен экспериментально.

Перейдем теперь к вопросу о величине корреляции фазовых флуктуаций. Поскольку, как было видно выше, амплитуды полей коррелированы с обратными фазами, степень корреляции этих флуктуаций определяется диффузией суммарной фазы  $\phi$ . Уравнение для последней находится из (24):

$$\frac{1}{c} \dot{\phi} = -g \sin \phi + F_1(t) + F_2(t), \quad (30)$$

откуда следует, что стационарное значение  $\phi$  равно  $\langle \phi(\infty) \rangle = \phi_0 = 0$ . Линеаризовав слабые флуктуации вблизи  $\phi_0$  в виде  $\phi = \phi_0 + \delta\phi \cong \delta\phi$ , для дисперсии суммарной фазы получаем уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{d\langle \delta\phi^2 \rangle}{dt} = -2g\langle \delta\phi^2 \rangle + 2\langle \phi[F_1(t) + F_2(t)] \rangle. \quad (31)$$

Второй член в правой части (31) вычисляется согласно формуле (см. [26])

$$\langle \phi F_j(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 \frac{d\phi}{d\varphi_i} D_{ij}(\varphi). \quad (32)$$

Используя (32), стационарное решение уравнения (31) запишем в виде

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \frac{(D_{11} + D_{22})(1 - \varepsilon)}{g} = \frac{\beta - \alpha}{4\sqrt{\alpha\beta} \tau_1 \tau_2}, \quad (33)$$

где

$$\varepsilon = -(D_{12} + D_{21}) / (D_{11} + D_{22}) > 0.$$

Заметим, во-первых, что стационарное решение для  $\langle \delta\phi^2 \rangle$  существует только в условиях деструктивной интерференции, когда  $\beta > \alpha$ . Во-вторых, уже в этом случае фазовые флуктуации насыщаются до постоянного значения  $(D_{11} + D_{22})g^{-1}$ , если даже корреляция между модами слабая ( $D_{12} \ll D_{11}$ ) или вовсе отсутствует. Однако благодаря именно корреляции  $D_{12}$ , вклад которой становится существенным, когда константа параметрической связи  $\sqrt{\alpha\beta}$  сравнима с потерями  $\beta$  в  $\omega_2$ -моду, флуктуации в суммарной фазе могут быть практически полностью сжаты. И если учесть, что при этом также велики амплитуды полей  $r_j$  (см. (17)), то рассматриваемая система в этом случае действует как генератор яркого сжатого света.

Таким образом, при  $\alpha < \beta$  дисперсия суммарной фазы много меньше, чем ширины линий излучения двух мод. Это означает, что, как бы ни диффундировали фазы индивидуальных мод, эти флуктуации в суммарной фазе взаимно сокращаются. Поэтому следует ожидать, что функция распределения  $P$  должна иметь острый максимум в точке  $\langle \phi \rangle = 0$ . Однако решение уравнения Фоккера–Планка выходит за рамки настоящей статьи. Отметим только, привлекая результаты предыдущего раздела, что система становится классической смесью коррелированных когерентных состояний

$$|r_1 e^{i\varphi}\rangle_1 |r_1 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-i\varphi}\rangle_2$$

с произвольной фазой  $\varphi$ , где индексы 1 и 2 относятся к  $\omega_1$ - и  $\omega_2$ -модам соответственно. Некоторые из этих состояний макроскопически разделены в фазовом пространстве. Поэтому, если возможно приготовить систему с суперпозицией этих состояний, то корреляция между полями позволяет генерировать состояние «шредингеровского кота» в одной из мод, сделав измерение в другой моде.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы показали, что в условиях деструктивной интерференции одновременно имеют место коррелированное усиление стоковского и параметрического полей и сжатие спонтанных шумов в их суммарной фазе. В обоих случаях величина эффекта зависит от степени корреляции между модами, которую нетрудно контролировать, используя ее зависимость от интенсивности и двухфотонной расстройки накачки. Мы определили также условия, при которых практически достижимо полное подавление квантовых флуктуаций. Важным обстоятельством является тот факт, что максимальный эффект имеет место в области прозрачности среды, где в условиях стационарного режима распространения интенсивности полей постоянны и стабильны. Эти результаты, а также классические решения для амплитуд и ширин линий излучений, полученные в разд. 3 и 4, доступны для экспериментальной проверки, хотя остается открытым целый ряд вопросов. В частности, результаты были получены в пренебрежении истощением накачки и потерями в резонаторе, которые могут влиять на корреляцию фазовых флуктуаций, особенно если не контролировать индивидуальные потери в модах. Эти вопросы, а также возможность генерации в каждой моде суперпозиционного состояния двух макроскопически разделенных когерентных состояний, будут объектом отдельных исследований.

Работа выполнена в рамках темы 96-770, финансируемой из бюджета Республики Армения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приводим диффузионные коэффициенты шумовых операторов  $f_i$  в уравнениях (23), которые вычисляются с помощью (5):

$$\begin{aligned}\langle f_1^+(t)f_1(t') \rangle &= \alpha\delta(t-t'), \\ \langle f_1^+(t)f_2^+(t') \rangle &= \langle f_2(t)f_1(t') \rangle = \sqrt{\alpha\beta}\delta(t-t'), \\ \langle f_2(t)f_2^+(t') \rangle &= \beta\delta(t-t').\end{aligned}\quad (\text{П.1})$$

Остальные корреляторы равны нулю.

Вычислим теперь диффузионные коэффициенты для шумовых источников  $F_i$ , входящих в уравнения (24). Учитывая, что

$$F_j = \frac{1}{2ir_j} [f_j^+ \exp(-i\varphi_j) - f_j \exp(i\varphi_j)],$$

и используя (П.1), находим

$$\langle F_l(t)F_m(t') \rangle = 2D_{lm}\delta(t-t'), \quad (\text{П.2})$$

где с учетом  $\langle \phi \rangle = 0$

$$D_{11} = \frac{\alpha}{8r_1^2}, \quad D_{22} = \frac{\beta}{8r_2^2}, \quad D_{12} = D_{21} = -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{8r_1r_2}. \quad (\text{П.3})$$

## Литература

1. C. M. Caves, Phys. Rev. D **26**, 1817 (1982).
2. R. S. Bondurant and J. H. Shapiro, Phys. Rev. D **30**, 2548 (1984).
3. W. Schleich and M. O. Scully, Phys. Rev. A **37**, 1261 (1988).
4. J. Bergou, M. Orszag, and M. O. Scully, Phys. Rev. A **38**, 754 (1988), **38**, 768 (1988).
5. M. O. Scully, K. Wodkiewicz, M. S. Zubairy et al., Phys. Rev. Lett. **60**, 1832 (1988).
6. R. S. Bondurant, P. Kumar, J. H. Shapiro et al., Phys. Rev. A **30**, 343 (1984).
7. P. Kumar and J. H. Shapiro, Phys. Rev. A **30**, 1568 (1984). M. D. Reid and D. F. Walls, Phys. Rev. A **31**, 1622 (1985). B. Yurke, Phys. Rev. A **32**, 300 (1985).
8. R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke et al., Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
9. R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmatter et al., Phys. Rev. Lett. **57**, 691 (1986).
10. B. L. Shumaker, S. H. Perlmutter, R. M. Shelby et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 357 (1987).
11. M. Winters, J. L. Hall, and P. E. Toschek, Phys. Rev. Lett. **65**, 3116 (1990).
12. Ю. П. Малакян, КЭ **7**, 1365 (1985); **16**, 1870 (1989).
13. Yu. P. Malakyan, J. Mod. Opt. **39**, 509 (1992).
14. W. Hartig, Appl. Phys. **15**, 427 (1978).
15. J. Heinrich and W. Behmenburg, Appl. Phys. **23**, 333 (1980).
16. F. S. Tomkins and R. Manon, Opt. Lett. **6**, 179 (1981).
17. P.-L. Zhang, Y.-C. Wang, and A. L. Shawlow, J. Opt. Soc. Amer. B **1**, 9 (1984).
18. Yu. P. Malakyan, Opt. Commun. **69**, 315 (1989).
19. M. A. Moore, W. R. Garrett, and M. G. Payne, Opt. Commun. **68**, 310 (1988).
20. M.-H. Lu and Yu Mei Liu, Appl. Phys. B **57**, 167 (1993).
21. Yu. P. Malakyan and A. R. Mkhitarian, J. Mod. Opt. **43**, 537 (1996).
22. Yu. P. Malakyan, Opt. Commun. **78**, 67 (1990).
23. S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **72**, 52 (1994).
24. J. H. Eberly, M. L. Pons, and H. R. Haq, Phys. Rev. Lett. **72**, 56 (1994).
25. J. H. Eberly, Quant. Semiclass. Opt. **7**, 373 (1995).
26. М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления*, Мир, Москва (1976), с. 119.