

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА: ЭФФЕКТЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА И ПОЛЯРИЗАЦИОННО-СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ

Д. Н. Клышко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 1996 г.

Обычно поляризационные свойства монохроматического пучка света определяются тремя числами, например, параметрами Стокса. Однако при регистрации флуктуаций интенсивностей в поляризационных модах (или корреляции между ними) трех чисел уже недостаточно. Показано, что при этом необходимо задать девять параметров, которые можно упорядочить в виде матриц с размерностью 3×3 . Анализируются трансформационные свойства этих матриц по отношению к преобразователям поляризации и их инварианты; в частности, вводится степень поляризации четвертого порядка P_4 . Рассматривается несколько примеров света со «скрытой» поляризацией, который в обычном смысле не поляризован ($P_2 = 0$), но поляризован в четвертом порядке ($P_4 \neq 0$), а также «поляризационно-сжатого» света, в котором подавлены квантовые флуктуации параметров Стокса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно поляризация плоской квазимонохроматической волны задается тремя числами, например, степенью поляризации P_2 , отношением осей и ориентацией эллипса поляризации (см. [1]). Другой возможный набор включает три параметра Стокса S_1, S_2, S_3 , нормированные на общую интенсивность волны S_0 . Можно также задать поляризацию двумя сферическими координатами Θ, Φ точки на сфере Пуанкаре и степенью поляризации P_2 или еще поляризационной матрицей \mathbf{K} с размерностью 2×2 . Эти эквивалентные наборы полностью определяют свойства волны по отношению к различным преобразователям поляризации, помещаемым перед детектором (см. рис. 1), который регистрирует среднюю интенсивность света, т. е. второй момент поля. Одна-

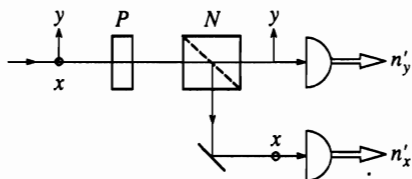


Рис. 1. Схема эксперимента по измерению поляризационных свойств пучка монохроматического света. Исследуемый свет проходит через преобразователь поляризации P с известными параметрами и далее через поляризационный светоделитель (призму Николя) N , который выделяет две ортогональные линейно-поляризованные компоненты поля (x, y) на выходе P . Два детектора регистрируют «мгновенные» интенсивности n'_x и n'_y . Многократное повторение процедуры и статистическая обработка данных позволяет определить моменты вида $\langle n'^k_x n'^l_y \rangle$

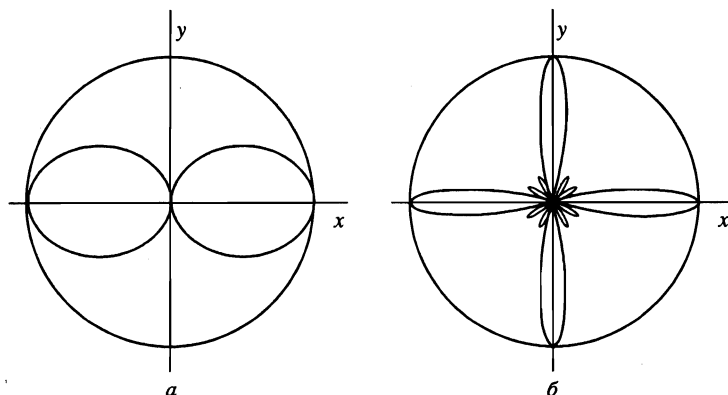


Рис. 2. Примеры проявления поперечной структуры плоской волны во втором и двенадцатом порядках. *а* — Закон Малюса $\cos^2 \chi$ в полярных координатах, т. е. вероятность регистрации фотона в канале x на рис. 1 в зависимости от ориентации призмы Николя (падающий свет поляризован вдоль направления x). *б* — Функция $[P_3(\cos 2\chi)]^2$, пропорциональная вероятности регистрации по 3 фотона в каждой из двух выходных мод призмы Николя в случае, когда во входных модах также имеется по 3 фотона ($P_3(x)$ — полином Лежандра) [5]

ко, как ясно из примера на рис. 2, трех параметров явно недостаточно в случаях, когда регистрируется не средняя интенсивность, а другие статистические параметры волны. В частности, понятия поляризованного и неполяризованного света нуждается в обобщении.

В настоящей работе рассматриваются наборы из 9 вещественных параметров, необходимых для описания экспериментов, в которых измеряются моменты четвертого порядка по амплитудам поля. Определяются преобразования этих параметров под действием преобразователей поляризации и соответствующие инварианты, в частности, вводится степень поляризации четвертого порядка P_4 . Этот параметр характеризует степень анизотропии флуктуаций вектора Стокса: $P_4 = 0$ в случае $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3$ и $P_4 = 1$ в случае, когда $\Delta S_x = 0$ для какого либо направления X . Примером света с $P_4 = 0$ является свет в двухмодовом когерентном состоянии $|\alpha, \beta\rangle$; при этом $P_2 = 1$ и $\Delta S_k = S_0$ ($k = 1, 2, 3$) — поляризационный шум вызван только квантовыми (фотонными) флуктуациями. Свойством $P_4 = 1$ обладают состояния с определенными числами фотонов в двух поляризационных модах.

Разработка удобного формализма для описания поляризационных эффектов четвертого порядка представляется актуальной задачей. Он может быть полезен для систематизации некоторых экспериментов квантовой оптики, а также в связи с проблемой повышения точности поляризационной интерферометрии, поляриметрии, измерения относительной фазы световых пучков и т. д. Точность оптических измерений в настоящее время ограничивается квантовыми флуктуациями, и возможность преодоления этого предела связывают со сжатыми состояниями световых пучков [2, 3]. Новые проблемы ставят методы квантовой криптографии, использующие поляризационную модуляцию света [4].

Математическое описание двух поляризационных мод одного пучка и их преобразований изоморфно описанию двух пространственно разделенных поляризованных пучков света — в обоих случаях амплитуды мод a, b и их линейные унитарные преобразова-

ния реализуют представление группы $SU(2)$ (как при классическом, так и при квантовом описании). В результате проблемы повышения чувствительности двухлучковых интерферометров типа Маха — Цендера [2, 3] и поляризационных интерферометров имеют много общего. Тесная связь группы $SU(2)$ с группой вращений $SO(3)$ позволяет наглядно изображать эволюцию двухмодового поля в трехмерном пространстве с помощью вектора Стокса. В работе [3] при описании интерферометра Маха — Цендера по существу использовался аналог вектора Стокса.

При регистрации четвертых или более высоких моментов даже неполяризованный в обычном смысле свет может обнаружить скрытую поляризацию. Это понятие было предложено в [5] для описания световых пучков, не поляризованных в обычном смысле ($P_2 = 0$), но обнаруживающих поперечную структуру при регистрации четвертых ($P_4 \neq 0$) или более высоких моментов поля. Например, суперпозиция полей двух независимых лазеров с одинаковыми частотами, одинаковыми средними интенсивностями и ортогональными линейными поляризациями дает свет со скрытой поляризацией: несмотря на то, что $P_2 = 0$, наблюдаемые в схеме на рис. 1 флуктуации интенсивностей и их корреляция зависят от параметров преобразователя поляризации [5–8]. Такой эксперимент недавно осуществил Пенин с сотр. [8]. Подчеркнем, что замена лазеров (имеющих стабильные интенсивности) на обычные источники света с гауссовской статистикой дает $P_2 = P_4 = 0$. При этом свет не поляризован во всех порядках, у него нет выделенного поляризационного базиса и он полностью инвариантен к действию любых преобразователей поляризации [5, 6]. Это свойство плоской волны можно назвать «поперечной изотропностью». Другой пример скрытой поляризации дает пучок двухфотонного света, состоящий из потока пар фотонов с ортогональной поляризацией [5, 6]; при этом амплитуды полей в модах не имеют определенной разности фаз (как и в случае независимых лазеров) и поэтому все типы поляризации равновероятны, $P_2 = 0$. Практически такой свет получают при параметрическом рассеянии (типа II, т. е. с ортогонально поляризованными модами) в кристаллах с квадратичной нелинейностью. Соответствующее состояние поля называют двухмодовым сжатым вакуумом.

Излучение при параметрическом рассеянии типа II обладает еще одной важной особенностью: поскольку фотоны в модах рождаются только парами, одновременно, флуктуации интенсивностей N_x и N_y в модах полностью коррелированы (этот эффект был экспериментально подтвержден в [9]). Это означает, что один из параметров Стокса не флуктуирует, отсутствуют даже квантовые шумы: $\Delta S_1 = 0$ [7]. Для излучения, в котором квантовые флуктуации некоторых компонент вектора Стокса S_k ($k = 1, 2, 3$) уменьшены, Чиркин с сотр. [10] ввели удачный термин поляризационно-сжатый свет. В работах [10–13] были рассмотрены методы получения такого света за счет анизотропной кубической нелинейности прозрачных веществ.

Ниже в разд. 2 и 3 для полноты изложения и преемственности обозначений повторяются в современных обозначениях некоторые известные соотношения поляризационной оптики. В разд. 2 вводятся вектор Стокса S и соответствующий оператор s ($S \equiv \langle s \rangle$), а также поляризационная матрица второго порядка K и соответствующий ей оператор k ($K \equiv \langle k \rangle$). Раздел 3 посвящен описанию преобразований этих операторов в рамках представления Гейзенберга ($s' = Rs$, $k' = Dk$) с помощью известных из классической оптики матриц Мюллера R (H. Mueller, 1943) и Джонса D (R. C. Jones, 1941), см. [1]. Для сравнения рассматривается также действие преобразователей поляризации в представлении Шредингера. Связи с наблюдаемыми в типичном эксперименте величинами описываются в разд. 4. В разделе 5 вводятся два параллельных набора параметров четвертого

порядка, упорядоченных в две матрицы $\mathbf{K}_4 = \langle : \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} : \rangle$ и $\mathbf{Q} \equiv \langle : \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} : \rangle$. Их трансформационные свойства анализируются в разд. 6. Далее, в разд. 7–9 введенный формализм применяется для анализа нескольких характерных случаев: когерентные состояния, два лазера с независимыми фазами, N -фотонные состояния, обобщенные когерентные состояния группы $SU(2)$ [14–16], сжатый двухмодовый вакуум и влияние на него дополнительных когерентных компонент (гомодинного поля). Рассмотрение ограничивается случаем плоской квазимонохроматической стационарной волны и ее поляризационных преобразований без потерь. Используется в основном представление Гейзенберга, что позволяет подчеркнуть общие черты квантового и классического подходов к описанию поляризационных эффектов.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Плоская квазимонохроматическая волна описывается операторами рождения $a_x^+ \equiv a^+$, $a_y^+ \equiv b^+$ и уничтожения $a_x \equiv a$, $a_y \equiv b$ фотонов в двух модах x , y с ортогональной поляризацией. В соответствии с рассматриваемой экспериментальной процедурой, использующей поляризационный светоделитель (рис. 1), полагаем, что мода x имеет линейную горизонтальную поляризацию, мода y — линейную вертикальную поляризацию. Квантовые свойства поля определяются коммутационными соотношениями группы Гейзенберга–Вейля $W(2)$ (см. [14]):

$$[a, a^+] = [b, b^+] = 1, \quad [a, a] = [b, b] = [a, b] = [a, b^+] = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрение поляризационных преобразований (как и других линейных преобразований, см. [5, 6]) в представлении Гейзенберга позволяет легко перейти от квантовой оптики к классической статистической оптике, основанной на классическом распределении вероятностей $P(a, b)$ для амплитуд поля. При этом a , b — безразмерные классические амплитуды поля в модах ($a^+ \rightarrow a^*$, $b^+ \rightarrow b^*$).

Обычно поляризационные свойства плоской монохроматической волны определяются через следующий набор вторых моментов [1]:

$$\begin{aligned} \langle a^+ a \rangle &\equiv \langle n_x \rangle \equiv N_x, & \langle b^+ b \rangle &\equiv \langle n_y \rangle \equiv N_y, \\ \langle a^+ b \rangle &\equiv \langle s_+ \rangle \equiv S_+, & \langle ab^+ \rangle &\equiv S_- = S_+^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нестационарные моменты вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle ab \rangle$, $\langle b^2 \rangle$ не влияют, как правило, на наблюдаемые величины и поэтому не рассматриваются (исключение см. в разд. 9). Статистика поля предполагается стационарной и эргодической, так что усредненные по времени средние значения наблюдаемых величин можно описывать с помощью квантового статистического ансамбля, при этом $\langle \dots \rangle = \text{Sp}(\rho \dots)$, где ρ — оператор плотности поля. Для перехода к классическому описанию достаточно под операцией $\langle \dots \rangle$ понимать классическое усреднение с помощью $P(a, b)$ и опустить квантовые шумы, т. е. оставить лишь нормально-упорядоченные моменты.

Параллельно с моментами (2.2) используется также альтернативный набор чисел — параметров Стокса S_0, S_1, S_2, S_3 . Определим их как средние значения $S_m \equiv \langle s_m \rangle$ от следующих операторов Стокса:

$$\begin{aligned} s_0 &\equiv a^+ a + b^+ b, & s_1 &\equiv a^+ a - b^+ b, \\ s_2 &\equiv a^+ b + ab^+, & s_3 &\equiv -i(a^+ b - ab^+). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) следуют связи

$$S_0 = N_x + N_y, \quad S_1 = N_x - N_y, \quad S_2 = 2 \operatorname{Re} S_+, \quad S_3 = 2 \operatorname{Im} S_+. \quad (2.4)$$

Неравенство Коши–Шварца дает ограничение $|S_k| \leq S_0$ ($k = 1, 2, 3$). Обратные к (2.3) соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{2}(s_0 + s_1), & s_+ &= \frac{1}{2}(s_2 + i s_3), \\ n_y &= \frac{1}{2}(s_0 - s_1), & s_- &= \frac{1}{2}(s_2 - i s_3). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.1) и (2.3) следует

$$\begin{aligned} [s_1, s_2] &= 2i s_3, & [s_2, s_3] &= 2i s_1, & [s_3, s_1] &= 2i s_2, \\ [s_0, s_m] &= 0, & s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= s_0(s_0 + 2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, операторы s_m образуют алгебру Ли $su(2)$ ($m = 0, 1, 2, 3$). Иначе говоря, коммутационные соотношения для операторов $(1/2)s_k$ и для операторов проекций момента количества движения j_k частицы со спином $J = (1/2)S_0$ совпадают, что дает дополнительные возможности для классификации возможных состояний двухмодового поля. Согласно (2.6) вторые моменты операторов Стокса связаны соотношением

$$\langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + \langle s_3^2 \rangle - \langle s_0^2 \rangle = 2S_0. \quad (2.7)$$

Моменты N_x, N_y, S_+ и $S_- = S_+^*$ удобно расположить в виде эрмитовой поляризационной матрицы $\mathbf{K} \equiv \langle \mathbf{k} \rangle$ (ее называют также матрицей когерентности [1]):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} N_x & S_+ \\ S_- & N_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + i S_3 \\ S_2 - i S_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix} = S_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^3 S_k \sigma_k^*. \quad (2.8)$$

Здесь σ_k — матрицы Паули, служащие вместе с матричной единицей \mathbf{I} удобным базисом в пространстве произвольных эрмитовых матриц 2×2 .

Моменты N_x, N_y, S_+ (2.2) и параметры Стокса S_m однозначно связаны и несут одинаковую информацию, однако параметры S_m имеют более простые трансформационные свойства и допускают наглядное геометрическое отображение. Итак, статистические свойства волны во втором порядке по амплитудам поля определяются четырьмя вещественными параметрами и им можно поставить в соответствие точку в пространстве \mathbf{R}^4 . Под действием преобразователя поляризации эта точка движется по некоторой орбите.

В случае преобразователя без потерь общая интенсивность волны $s_0 = n_x + n_y$ сохраняется и поэтому можно учитывать только три параметра, например, три компоненты S_k ($k = 1, 2, 3$). Их удобно наглядно изображать в виде вектора \mathbf{S} в трехмерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^3 , которое будем называть пространством Стокса — Пуанкаре. Пусть векторы \mathbf{e}_k образуют ортонормированный базис этого пространства, т. е. $(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = \delta_{kl}$, тогда имеем представление

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^3 S_k \mathbf{e}_k,$$

где $S_k = (\mathbf{e}_k \mathbf{S})$. Норма вектора Стокса

$$S = \sqrt{\sum S_k^2} = \sqrt{(\text{Sp } \mathbf{K})^2 - 4 \det \mathbf{K}} \equiv P_2 S_0 \quad (2.9)$$

вместе с S_0 определяет обычную степень поляризации (второго порядка) P_2 . Нормированные векторы Стокса \mathbf{S}/S отображаются на сферу Пуанкаре, каждой точке которой соответствует определенное состояние поляризации. Например, точке $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ соответствует горизонтальная поляризация, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ — линейная поляризация под углом 45° к оси x , $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ — правая круговая поляризация.

Векторный оператор Стокса определяется аналогичным образом:

$$\mathbf{s} \equiv \sum_{k=1}^3 s_k \mathbf{e}_k.$$

Его квадрат также является оператором:

$$\mathbf{s}^2 = (\mathbf{s}\mathbf{s}) = \sum s_k^2 = s_0^2 + 2s_0 =: s_0^2 + 3s_0 \quad (2.10)$$

(двоеточия означают нормальное упорядочение по операторам a^+ , a и b^+ , b).

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ КАК ВРАЩЕНИЕ

Если не учитывать общий для обеих мод фазовый множитель, то действие преобразователя без потерь в представлении Гейзенберга можно представить в виде

$$a' = t^* a + r^* b, \quad b' = -r a + t b. \quad (3.1)$$

Здесь t и r — амплитудные коэффициенты прохождения и отражения данного преобразователя. Например, линейной фазовой пластине с оптической толщиной δ и ориентацией χ относительно горизонтального направления x соответствует

$$t = \cos \delta + i \sin \delta \cos 2\chi, \quad r = i \sin \delta \sin 2\chi \quad (3.2)$$

(пластина « $\lambda/4$ » дает $\delta = \pi/4$). В векторном виде $\mathbf{a}' = \mathbf{D}^* \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — вектор с компонентами a , b и

$$\mathbf{D} \equiv \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Матрицы \mathbf{D} в классической оптике были введены Джонсом (см. [1]). При отсутствии потерь они обладают свойством унитарности и унимодулярности:

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^+ \mathbf{D} = I, \quad \det \mathbf{D} = |t|^2 + |r|^2 = 1, \quad (3.4)$$

и поэтому реализуют унитарное представление группы $SU(2)$.

Примем следующую параметризацию матриц \mathbf{D} [17, 18]:

$$t(\phi, \theta, \psi) \equiv \cos(\theta/2) \exp [i(\phi + \psi)/2], \quad r(\phi, \theta, \psi) \equiv -\sin(\theta/2) \exp [i(\phi - \psi)/2]. \quad (3.5)$$

Здесь можно принять $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \phi < 4\pi$. Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\phi &= \arg t + \arg r + \pi, \\ \psi &= \arg t - \arg r - \pi, \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} |r/t|.\end{aligned}\quad (3.6)$$

С помощью (3.1) находим действие преобразователя на операторы n_x , n_y и $s_+ = a^+ b$:

$$\begin{aligned}n'_x &= T n_x + R n_y + t r^* s_+ + t^* r s_+^*, \\ n'_y &= R n_x + T n_y - t r^* s_+ - t^* r s_+^*, \\ s'_+ &= t r (n_y - n_x) + t^2 s_+ - r^2 s_+^*.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Здесь $T \equiv |t|^2$, $R \equiv |r|^2$. Усредняя эти выражения, находим преобразованную поляризационную матрицу:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^+.\quad (3.8)$$

Параметры

$$\det \mathbf{K} = N_x N_y - |S_+|^2, \quad \operatorname{Sp} \mathbf{K} = N_x + N_y \equiv S_0, \quad S \equiv (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}, \quad P_2 = S/S_0$$

являются инвариантами преобразования.

Из (3.7) следует, что при измерении по схеме рис. 1 два преобразования \mathbf{D} и $-\mathbf{D}$ дают одинаковые наблюдаемые величины — эти преобразования отличаются лишь одинаковым набегом фазы в полволны в обоих каналах. Следовательно, можно ограничить максимальное значение ϕ величиной 2π (вместо 4π). При этом оставшееся множество матриц \mathbf{D} представляет уже лишь группу вращений $SO(3)$, являющуюся подгруппой $SU(2)$. (Отметим, что такое сужение пространства представления приводит к потере информации об общей фазе волны, которую можно наблюдать в некоторых экспериментальных схемах, см. [19].)

Действие всевозможных преобразователей на трехмерные вещественные векторы Стокса \mathbf{S} реализует неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве \mathbf{R}^3 : каждому преобразователю можно поставить в соответствие определенный поворот вектора \mathbf{S} в пространстве Стокса–Пуанкаре. Подставим (3.1) в определения (2.3). Результат можно представить в виде $s' = \mathbf{R} s$, где

$$\mathbf{R}(t, r) \equiv \begin{pmatrix} |t|^2 - |r|^2 & 2 \operatorname{Re}(t r^*) & -2 \operatorname{Im}(t r^*) \\ -2 \operatorname{Re}(t r) & \operatorname{Re}(t^2 - r^2) & -\operatorname{Im}(t^2 + r^2) \\ -2 \operatorname{Im}(t r) & \operatorname{Im}(t^2 - r^2) & \operatorname{Re}(t^2 + r^2) \end{pmatrix}.\quad (3.9)$$

В классической оптике матрицам \mathbf{R} соответствуют матрицы Мюллера (см. [1]), которые при наличии диссипации имеют размерность 4×4 и описывают также преобразование компоненты S_0 . Подставив сюда (3.5), получаем другую параметризацию:

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi \\ c_\phi s_\theta & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\theta c_\psi & -s_\phi c_\psi - c_\phi c_\theta s_\psi \\ s_\phi s_\theta & c_\phi s_\psi + s_\phi c_\theta c_\psi & c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi \end{pmatrix}.\quad (3.10)$$

Здесь $c_x \equiv \cos x$, $s_x \equiv \sin x$. Мы выразили \mathbf{R} через углы Эйлера ϕ, θ, ψ , описывающие вращение твердого тела с закрепленной точкой (ось I — полярная). Эквивалентный поворот координатных осей в пространстве Стокса–Пуанкаре («пассивная точка зрения») совершается обратной матрицей \mathbf{R}^{-1} (при этом $(R^{-1})_{mn} = R_{nm}$ ввиду ортогональности \mathbf{R}). Легко убедиться, что

$$\mathbf{R}^{-1}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(-\psi, -\theta, -\phi) = \mathbf{R}(\pi - \psi, \theta, \pi - \phi).$$

Любое вращение в \mathbf{R}^3 можно также задать, указав направление оси вращения \mathbf{n} и угол поворота α ($\alpha = 0 - 2\pi$), т. е. возможна еще одна параметризация преобразователя:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \alpha) \equiv \mathbf{R}(\alpha\mathbf{n}).$$

Предполагается, что $\alpha > 0$ соответствует вращению по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления \mathbf{n} . Таким образом, любому преобразователю можно поставить в соответствие вектор $\alpha\mathbf{n}$ в пространстве Стокса–Пуанкаре и точку \mathbf{n} на сфере Пуанкаре. Из определения оси вращения следует, что \mathbf{n} — собственный вектор \mathbf{R} с собственным значением $+1$. Согласно [18]

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} [\text{Sp } \mathbf{R} - 1] = \text{Re } t^2 - |r|^2 = \cos(\psi + \phi) \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \quad (3.11)$$

или в другой форме

$$\cos(\alpha/2) = \pm \cos(\theta/2) \cos[(\psi + \phi)/2]. \quad (3.12)$$

Вектор \mathbf{n} имеет следующие компоненты [18]:

$$\begin{aligned} n_1 &= C(R_{32} - R_{23}) = 2C \text{Im } t^2 = C(1 + \cos \theta) \sin(\psi + \theta), \\ n_2 &= C(R_{13} - R_{31}) = 4C \text{Re } t \text{Im } r = C \sin \theta (\sin \psi - \sin \phi), \\ n_3 &= C(R_{21} - R_{12}) = -4C \text{Re } t \text{Re } r = C \sin \theta (\cos \psi + \cos \phi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $C \equiv 1/2 \sin \alpha$ — нормировочная константа. Функции $\alpha(t, r)n_k(t, r)$ (или $\alpha(\psi, \theta, \psi)n_k(\psi, \theta, \psi)$), определенные в (3.11) и (3.13), дают отображение множества параметров преобразователя (t, r) (или (ψ, θ, ψ)) в пространство Стокса–Пуанкаре, что позволяет наглядно изображать повороты вектора Стокса под действием преобразователя. Направление оси поворота в сферических координатах определяется из (3.13) и связей $n_1 = \cos \Theta$, $n_2 = \sin \Theta \cos \Phi$, $n_3 = \sin \Theta \sin \Phi$. Например, для фазовой пластины « $\lambda/4$ » из (3.2) получаем $\alpha = 2\delta$, при этом ось вращения \mathbf{n} лежит в плоскости $(1, 2)$ под углом 2χ к оси I , т. е. $\Theta = 2\chi$, $\Phi = 0$. Таким образом, под действием пластины с параметрами (δ, χ) вектор \mathbf{S} поворачивается на угол 2δ вокруг направления $(2\chi, 0)$.

Произвольное вращение \mathbf{R} можно представить в виде трех последовательных вращений вокруг базисных осей \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_3 (рис. 3):

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(\phi, 0, 0)\mathbf{R}(0, \theta, 0)\mathbf{R}(0, 0, \psi) = \mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\theta)\mathbf{R}_1(\psi), \quad (3.14)$$

где $\mathbf{R}_n(\alpha) \equiv \mathbf{R}(\alpha\mathbf{e}_n)$. Единичный вектор \mathbf{e}_1 под действием \mathbf{R} переходит в $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\theta)\mathbf{e}_1$. Согласно (3.10)

$$(\mathbf{e}'_1)_k = R_{k1} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi),$$

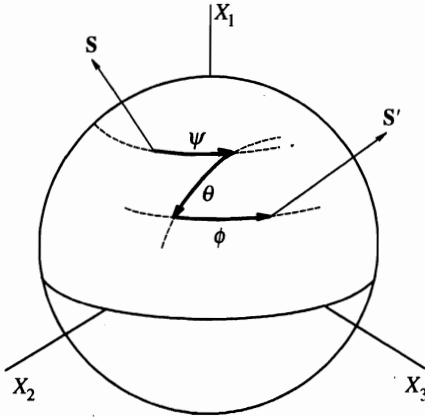


Рис. 3. Представление преобразования поляризации плоской волны как результата трех последовательных поворотов вектора Стокса S в пространстве Стокса-Пуанкаре на угол ψ вокруг оси 1, на угол θ вокруг оси 3 и на угол ϕ вокруг оси 1

т. е. сферические координаты повернутого вектора $R(\phi, \theta, \psi)e_1$ совпадают с углами Эйлера преобразователя: $\Theta = \theta$, $\Phi = \phi$. Параметр ψ не оказывает влияния, поскольку e_1 — собственный вектор для $R_1(\psi)$. С другой стороны, наблюдаемая в эксперименте на рис. 1 величина

$$s'_1 = \sum R_{1k} s_k = s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta \cos \psi + s_3 \sin \theta \sin \psi \tag{3.15}$$

не зависит от ϕ — общего фазового множителя t и r .

Аналогичное (3.14) представление возможно и для матриц Джонса D :

$$D(\phi, \theta, \psi) = D(\phi, 0, 0)D(0, \theta, 0)D(0, 0, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Дадим теперь краткое описание действия преобразователя в представлении Шредингера, когда он изменяет не операторы поля, а волновую функцию двухмодового поля: $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$. Нетрудно показать, что

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle, \quad U(\phi, \theta, \psi) \equiv \exp(-i\phi j_1) \exp(-i\theta j_3) \exp(-i\psi j_1). \tag{3.17}$$

(Это следует из эквивалентности преобразований $s' = Rs$ и $s' = U^+ s U$.) Здесь операторы $j_k = (1/2)s_k$ играют роль генераторов группы, т. е. $j_1 = i[dU/d\phi]_0$ и т. д.

Можно также выразить $|\psi'\rangle$ непосредственно через параметры t, r матрицы Джонса D . Пусть исходное состояние на входе преобразователя имеет вид

$$|\psi\rangle = f(a^+, a, b^+, b)|vac\rangle,$$

тогда нетрудно показать, что на выходе

$$|\psi'\rangle = f'(a^+, a, b^+, b)|vac\rangle, \tag{3.18}$$

$$f' \equiv f(t^* a^+ - r b^+, t a - r^* b, r^* a^+ + t b^+, r a + t^* b).$$

Здесь функция f' образована из f заменой $a \rightarrow (D^*)^{-1} a$, $a^+ \rightarrow D^{-1} a^+$.

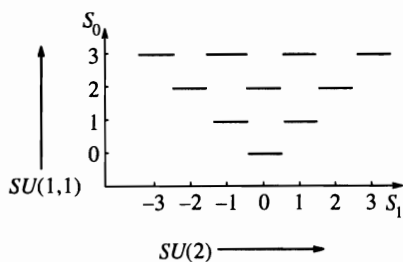


Рис. 4. Классификация состояний плоской волны с определенным числом фотонов N_x, N_y в поляризационных модах. По горизонтали отложена разность $S_1 = N_x - N_y$, по вертикали — сумма $S_0 = N_x + N_y$. Преобразователи поляризации без потерь вызывают «горизонтальные» переходы внутри поляризационного мультиплета ($S_0 = \text{const}$) (при этом образуются обобщенные когерентные состояния группы $SU(2)$). «Вертикальные» переходы с изменением энергии S_0 и сохранением S_1 вызываются параметрическими преобразователями и связаны с группой $SU(1, 1)$

Рассмотрим несколько возможных базисов пространства состояний двумерного осциллятора **H**.

1. Наиболее просто действие преобразователя описывается в непрерывном базисе $|\alpha, \beta\rangle \equiv |\alpha\rangle_x |\beta\rangle_y$, образованном когерентными состояниями группы $W(2)$ — собственными векторами операторов $a_x \equiv a$ и $a_y \equiv b$ [14]. При этом **H** отображается в пространство \mathbb{C}^2 или в \mathbb{R}^4 . Подставляя в (3.18) оператор смещения $f(a^+, a, b^+, b) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a + \beta b^+ - \beta^* b)$, получаем

$$|\alpha, \beta\rangle' = |t^* \alpha + r^* \beta, -r \alpha + t \beta\rangle. \tag{3.19}$$

Множество состояний (3.19) составляет «энергетическую» поверхность в **H** или орбиту элемента $|\alpha, \beta\rangle$, по которой он движется под действием различных унитарных преобразований. В случае когерентного состояния можно определить единичный вектор поляризации $\mathbf{e}(\alpha, \beta)$, аналогичный классическому вектору поляризации:

$$\mathbf{e} \equiv (e_x, e_y), \quad e_x \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{N}}, \quad e_y = \frac{\beta}{\sqrt{N}}, \quad N \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

При этом, как и в классической оптике, $\mathbf{e}' = \mathbf{D}^* \mathbf{e}$.

2. Дискретный (фоковский) базис $|N_x, N_y\rangle \equiv |N_x\rangle_x |N_y\rangle_y$ пространства **H** порождается общими собственными векторами операторов n_x, n_y и параметризуется двумя неотрицательными целыми числами N_x, N_y — числами фотонов в поляризационных модах.

3. Возможна также другая параметризация пространства **H** — с помощью чисел $N = S_0 = N_x + N_y$ и $S_1 = N_x - N_y$. N фотонов можно распределить между двумя модами $N + 1$ способами, поэтому стационарное состояние двумерного осциллятора с энергией N имеет $(N + 1)$ -кратное вырождение, т. е. является мультиплетом, см. рис. 4. Общие собственные векторы оператора энергии $s_0 = n = n_x + n_y$ и разности энергий в двух модах $s_1 = n_x - n_y$ образуют базис в **H**, параметризуемый двумя целыми числами — собственными значениями этих операторов $S_0 = 0, 1, 2, \dots$, и $S_1 = -N, -N + 2, \dots, N$.

Для перехода к стандартным в теории угловых моментов обозначениям положим $S_0 \equiv 2J$ и $S_1 \equiv 2M$, тогда базисные векторы принимают вид $|J, M\rangle$, где

$M = -J, -J + 1, \dots, J$. В старых обозначениях $|J, M\rangle = |N_x\rangle_x |N_y\rangle_y$, где $N_x = J + M$, $N_y = J - M$, $J = N/2$. Например, $|J, -J\rangle = |0\rangle_x |N\rangle_y$ и $|J, J\rangle = |N\rangle_x |0\rangle_y$. Векторы $|J, M\rangle$ образуют так называемый канонический базис в \mathbf{H} :

$$\exp(-i\phi j_1)|J, M\rangle = \exp(-iM\phi)|J, M\rangle.$$

Фиксируем N и рассмотрим произвольное состояние $|\psi\rangle_J \in \mathbf{H}_J$ с $N = 2J$ фотонами. В базисе $|J, M\rangle \equiv |M\rangle$ оно имеет вид

$$|\psi\rangle_J = \sum_{M=-J}^J e_M |M\rangle,$$

так что поляризационные свойства поля полностью описываются единичным вектором $\mathbf{e}^{(J)} \equiv \mathbf{e} \equiv \{e_M\}$ с $N + 1$ компонентами (вектор $\mathbf{e}^{(1/2)}$ преобразуется аналогично обычному классическому вектору поляризации). Соответствующее проективное пространство — сфера S^{2N} . Подпространство состояний \mathbf{H}_J с фиксированным общим числом фотонов $N = 2J$ является инвариантным относительно произвольных преобразователей без потерь. Внутри \mathbf{H}_J операторы наблюдаемых $j_k = (1/2)s_k$ (как и, согласно (3.17), операторы $U = U^{(J)}$) представляются матрицами с размерностью $(N + 1) \times (N + 1)$; например, в случае $N = 1$ $j_k \rightarrow (1/2)\sigma_k$. При этом действие преобразователя на базисные векторы $|M\rangle$ мультиплетом описывается с помощью известных матриц $\mathbf{D}^{(J)}(\phi, \theta, \psi)$ (функций Вигнера), дающих унитарные неприводимые представления группы $SU(2)$ в пространстве $\mathbf{H}_J = \{|M\rangle\}$:

$$|M'\rangle = U|M\rangle = \sum_{M_1} D_{M_1 M}^{(J)} |M_1\rangle. \quad (3.20)$$

(Явный вид функции $\mathbf{D}^{(J)}(t, \tau)$ см., например, в [5, 6, 17, 18].) В частности, матрицы $\mathbf{D}^{(1/2)} \equiv \mathbf{D}$ совпадают с матрицами Джонса (3.3). Матрицы $\mathbf{D}^{(1)}$ реализуют трехмерное унитарное представление группы $SU(2)$ в пространстве двухфотонных состояний H_1 (в то время как вещественные матрицы Мюллера \mathbf{R} реализуют представление группы $SO(3)$ в \mathbf{R}^3).

Можно также перенести действие преобразователей с базисных векторов $|M\rangle$ на вектор поляризации \mathbf{e} . Согласно (3.17), (3.20)

$$|\psi'\rangle_J = U|\psi\rangle_J = \sum e'_M |M\rangle,$$

где $\mathbf{e}' = \mathbf{D}^{(J)}\mathbf{e}$. Матрицы $\mathbf{D}^{(J)}$ определяются тремя параметрами, поэтому при $N = 2J \geq 2$, множество S^{2N} не является однородным пространством относительно поляризационных преобразований, т.е. с их помощью нельзя образовать произвольное поляризационное состояние в \mathbf{H}_J . (Реалистический метод приготовления двухфотонных состояний с произвольной поляризацией, т.е. произвольных векторов в \mathbf{H}_1 , с помощью параметрического рассеяния рассмотрен в [20].)

4. Пусть на входе оптической системы приготовлено состояние $|M = -J\rangle$. Под действием всевозможных преобразований на выходе можно получить множество состояний $|\phi, \theta, \psi; -J\rangle \equiv U(\phi, \theta, \psi)|-J\rangle$ (орбита элемента $|-J\rangle$). Это множество $|\phi, \theta, \psi; -J\rangle$ образует однородное подпространство относительно преобразований, параметризуемое тремя углами Эйлера (если не учитывать фазу состояния, то достаточно двух углов, см.

разд. 8). Состояния $|\phi, \theta, \psi; -J\rangle$ называются обобщенными когерентными состояниями для группы $SU(2)$ [14–16], они образуют непрерывный базис в \mathbf{H}_J — аналогично глауберовским когерентным состояниям $|\alpha\rangle$ для группы $W(1)$. Таким образом, любое состояние $|\psi\rangle_J$ можно представить в виде непрерывной суперпозиции когерентных состояний $|\phi, \theta, \psi; -J\rangle$.

4. НАБЛЮДАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим связь введенных величин с экспериментом. Операторы n_x и n_y можно наблюдать с помощью призмы Николя и двух фотодетекторов, измеряющих интенсивности полей в модах x и y (рис. 1). Используемый нами линейный базис (x, y) привязан к оптическим осям призмы Николя, но в общем случае индексы x, y могут относиться к волнам с правой и левой круговой поляризацией или к любой другой паре ортогональных волн. Сумма и разность токов детекторов в отсутствие преобразователей пропорциональна параметрам s_0 и s_1 исходного света. Под действием преобразователя общая интенсивность s_0 прераспределяется между двумя выходными модами. Пусть, например, перед призмой Николя поставлена пластина « $\lambda/4$ » с осью под углом $\chi = 45^\circ$ к направлению x , тогда, согласно (3.2), (3.9), (3.11), (3.13), $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2(\pi/2)$, т. е. исходный вектор Стокса s поворачивается на 90° вокруг оси 2. Теперь разность показаний детекторов пропорциональна параметру s_3 : $s'_1 = s_3$. Фазовая пластина с $\chi = 0$ дает вращение $\mathbf{R}_1(\pi/2)$. Совместное действие двух пластин описывается матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(\pi/2)\mathbf{R}_2(\pi/2)$, при этом наблюдается $s'_1 = s_2$ (этот же результат дает поворот призмы Николя вместе с детекторами на 45° вокруг падающего пучка света). Таким образом, операторы s_0, s_1, s_2, s_3 соответствуют реально наблюдаемым величинам. В общем случае при произвольных преобразователях наблюдаемая разность фототоков описывается оператором

$$s'_1 \equiv \sum_{k=1}^3 R_{1k} s_k.$$

Следовательно, синтезируя определенный преобразователь, можно наблюдать проекцию

$$s_X = (s\mathbf{X}) = \sum s_k X_k$$

операторного вектора Стокса s на любое заданное направление $\mathbf{X} = \sum X_k \mathbf{e}_k$ в пространстве Стокса–Пуанкаре (здесь $\sum X_k^2 = 1$).

Средняя интенсивность в одном выходном канале, согласно (3.5), (3.7), имеет вид

$$N'_x = tt^* N_x + rr^* N_y + t^* r S_+ + r^* t S_- = N_x \cos^2(\theta/2) + N_y \sin^2(\theta/2) - |S_+| \sin \theta \cos \psi', \quad (4.1)$$

где $\psi' \equiv \psi - \arg S_+$. При непрерывном изменении какого-либо параметра преобразователя, например, при вращении фазовой пластины « $\lambda/4$ », наблюдаемая интенсивность изменяется периодически: $N'_x \propto 1 \pm V \cos 2\chi$, $0 \leq V \leq 1$. Параметр V можно назвать видностью поляризационной интерференции. Возникает вопрос, каково максимально возможное значение V для данного источника света? Будем рассматривать (4.1) как квадратичную функцию с матрицей \mathbf{K} от комплексного вектора (t, r) с единичной нормой, $|t|^2 + |r|^2 = 1$. Как известно, экстремальные значения эрмитовой квадратичной

функции определяются минимальным (λ_{min}) и максимальным (λ_{max}) собственными значениями ее матрицы, т. е. решениями характеристического уравнения

$$f(\lambda) \equiv \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - \text{Sp } \mathbf{K} \lambda + \det \mathbf{K} = 0. \quad (4.2)$$

Отсюда находим экстремальные значения

$$(N'_x)_{max, min} = \lambda_{max, min} = \frac{1}{2} \left\{ \text{Sp } \mathbf{K} \pm [(\text{Sp } \mathbf{K})^2 - 4 \det \mathbf{K}]^{1/2} \right\} \quad (4.3)$$

(эти же значения можно найти и непосредственно — дифференцированием (4.1) по ψ и θ). Максимально возможная видность интерференции принимает вид

$$V_{max} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \sqrt{1 - \frac{4 \det \mathbf{K}}{(\text{Sp } \mathbf{K})^2}} = \frac{S}{S_0}. \quad (4.4)$$

Таким образом, V_{max} совпадает со степенью поляризации P_2 , так что последняя имеет непосредственный операциональный смысл. Нетрудно убедиться, что коэффициент корреляции $\gamma \equiv S_+ / (N_x N_y)^{1/2}$ не превышает по модулю P_2 . Это дает еще одно формальное определение степени поляризации — как максимального значения $|\gamma|_{max}$ коэффициента корреляции модовых амплитуд.

Из матрицы \mathbf{K} можно выделить инвариантную («изотропную» или «неполяризованную») часть:

$$\mathbf{K} = \lambda_{min} \mathbf{I} + \mathbf{K}_0.$$

При этом выполняется условие $\det \mathbf{K}_0 = 0$, т. е. матрица \mathbf{K}_0 вырождена — ее ранг меньше двух и она имеет единственное собственное значение λ_{max} . Условие полной поляризации $P_2 = 1$ (или $\lambda_{min} = 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$) с наглядной классической точки зрения означает, что конец вектора поля \mathbf{E}_0 описывает в поперечной плоскости волны некоторый эллипс с неизменными параметрами. Следовательно, существует определенный базис, в котором одна из поляризационных компонент равна нулю, при этом $S'_+ = 0$ и вектор Стокса \mathbf{S}' параллелен оси 1 (формально это следует из того, что эрмитову матрицу \mathbf{K} можно с помощью канонического преобразования привести к диагональному виду). В квантовой теории в этом базисе одна из мод находится в вакуумном состоянии: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle_1 |\text{vac}\rangle_2$. С операциональной точки зрения условие $P_2 = 1$ означает, что можно подобрать такой преобразователь, что средний фототок одного из детекторов обратится в нуль:

$$N'_x = N, \quad N'_y = 0.$$

Рассмотрим теперь эксперименты, описываемые четвертыми моментами модовых амплитуд. В схеме на рис. 1 можно регистрировать три типа таких величин: (1) флуктуации показаний детекторов, (2) корреляцию между показаниями двух детекторов, (3) флуктуации разности показаний детекторов. Эти величины описываются следующими параметрами поля на выходе призмы Николя:

$$\begin{aligned} \Delta N_x'^2 &\equiv \langle \Delta n_x'^2 \rangle = G'_{xx} - N_x'^2 + N_x', \\ \Delta N_y'^2 &\equiv \langle \Delta n_y'^2 \rangle = G'_{yy} - N_y'^2 + N_y', \\ G'_{xy} &\equiv \langle n'_x n'_y \rangle, \quad \Delta S_1'^2 \equiv \langle \Delta s_1'^2 \rangle \equiv \langle s_1'^2 \rangle - S_1'^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

(здесь $G_{\alpha\beta} \equiv \langle : n_\alpha n_\beta : \rangle = \langle a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\alpha a_\beta \rangle$).

Рассмотрим флуктуации ΔS_X вектора S вдоль определенного направления X с координатами (Θ, Φ) в пространстве Стокса–Пуанкаре. Обозначим $\Delta s \equiv s - S$, тогда

$$\Delta s_X \equiv (X \Delta s) = \sum_{k=1}^3 \Delta s_k X_k.$$

Отсюда

$$(\Delta S_X)^2 = \sum_{k,l=1}^3 \langle \Delta s_k \Delta s_l \rangle X_k X_l \equiv \sum_{k,l=1}^3 \Delta Q_{kl} X_k X_l. \quad (4.6)$$

(Здесь введена матрица $\Delta Q \equiv \langle \Delta s \otimes \Delta s \rangle$). Чтобы измерить ΔS_X надо использовать преобразователь с матрицей Мюллера R , которая поворачивает X в направлении оси l : $RX = e_l$, т.е. $X_k = (R^{-1})_{kl} = R_{lk}$. Из (3.10) находим необходимые параметры преобразователя: $\theta = -\Theta$, $\psi = -\Phi$ (см. рис. 3). Таким образом, подбирая параметры преобразователя, установленного перед призмой Николя, можно измерить флуктуации вектора Стокса s в любом направлении X пространства Стокса–Пуанкаре.

Типичные наблюдаемые зависимости изображены на рис. 5в. Форма кривой $\Delta S(\Theta) \propto \sqrt{1 + V \cos 2\Theta}$ далека от эллипса, однако по традиции принято говорить об «эллипсах» или «эллипсоидах» неопределенности (эллипсоиды порождаются в пространстве Стокса–Пуанкаре условием $\Delta S(\Theta, \Phi) = \text{const}$). Согласно предлагаемому ниже определению поле полностью поляризовано в четвертом порядке ($P_4 = 1$), если хотя бы в одном направлении X флуктуации ΔS_X равны нулю (пунктирная кривая на рис. 5в).

Пусть входные моды возбуждаются двумя независимыми лазерами с ортогональными поляризациями и одинаковыми средними интенсивностями ($N_x = N_y = (1/2)N$), тогда $G'_{xy} \propto 1 + (1/3) \cos 2\Theta$ и $\Delta N_x'^2 = \Delta N_y'^2 \propto 1 - V \cos 2\Theta$, где $V = N/(N + 8)$ (см. разд. 7). Соответствующие графики, иллюстрирующие «противофазный» характер этих зависимостей и инвариантность суммы $\Delta N_x'^2 + \Delta N_y'^2 + 2G_{xy}$ (см. ниже (6.1)), представлены на рис. 6.

5. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим стационарные четвертые моменты, т.е. моменты с одинаковыми числами положительно- и отрицательно-частотных амплитуд. Упорядоченный набор таких моментов можно получить, образуя прямое произведение $k \otimes k$. После нормального упорядочения, усреднения и вычеркивания дублирующих строк и столбца получаем следующую матрицу четвертых моментов:

$$K_4 \equiv \begin{pmatrix} A & D & E \\ D^* & C & F \\ E^* & F^* & B \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &\equiv \langle \bar{a}^2 a^2 \rangle, & B &\equiv \langle \bar{b}^2 b^2 \rangle, & C &\equiv \langle \bar{a} \bar{b} a b \rangle, \\ D &\equiv \langle \bar{a}^2 a b \rangle, & E &\equiv \langle \bar{a}^2 b^2 \rangle, & F &\equiv \langle \bar{a} \bar{b} b^2 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

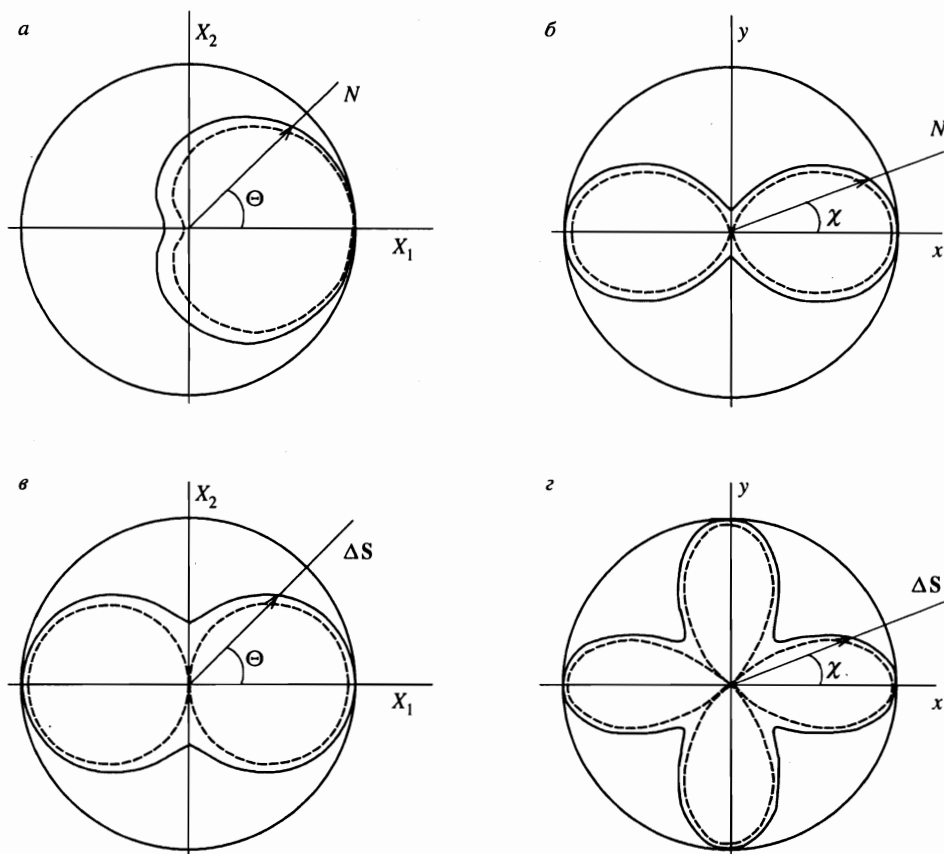


Рис. 5. Зависимости интенсивности $N \equiv N_x$ (рис. а, б) и неопределенности вектора Стокса ΔS (рис. в, г) от угла Θ в пространстве Стокса-Пуанкаре (рис. а, в) и ориентации призмы Николя $\chi = \Theta/2$ в лабораторной системе координат (рис. б, г). Видность V принята равной 0.75 (сплошные линии) и 1 (штрихи)

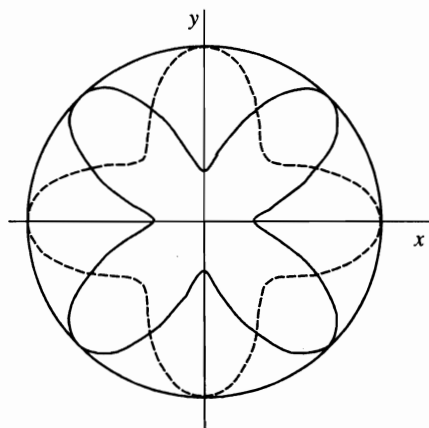


Рис. 6. Флуктуации интенсивности ΔN_x^2 (сплошная линия) и корреляция интенсивностей $G_{xy} \equiv \langle n_x n_y \rangle$ (штриховая) на выходе призмы Николя в зависимости от ее ориентации в случае, когда входные моды возбуждаются двумя независимыми лазерами с ортогональными поляризациями и одинаковыми интенсивностями, равными 10 фотонам на моду (при этом видность $V_x = 5/9$)

Диагональные компоненты $A = G_{xx}$, $B = G_{yy}$, $C = G_{xy}$ характеризуют классические части флуктуаций и корреляцию интенсивностей в поляризационных модах. Общее число независимых вещественных параметров, определяющих эрмитову матрицу \mathbf{K}_4 , равно 9.

Удобно определить также вещественную симметричную матрицу $\mathbf{Q} \equiv \langle : s \otimes s : \rangle$, составленную из нормально-упорядоченных вторых моментов операторов Стокса:

$$Q_{mn} \equiv \langle : s_m s_n : \rangle = Q_{nm} \quad (m, n = 0, 1, 2, 3). \tag{5.3}$$

С помощью (2.1), (2.3) находим следующие связи ($k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \langle s_m^2 \rangle &= Q_{mm} + S_0, \\ \langle s_0 s_m \rangle &= \langle s_m s_0 \rangle = Q_{0m} + S_m, \\ \langle s_k s_{k'} \rangle &= Q_{kk'} + i \varepsilon_{kk'k''} S_{k''} \quad (k \neq k'), \\ \langle s_k s_{k'} + s_k s_{k'} \rangle &= 2Q_{kk'}, \\ Q_{00} &= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

В соответствии с (2.10), $\langle s^2 \rangle = Q_{00} + 3S_0$. Появление здесь линейных слагаемых — компонент вектора Стокса S_m — результат некоммутативности операторов поля и единственное формальное отличие квантового описания от классического. Матрицу \mathbf{Q} можно выразить через компоненты поляризационной матрицы \mathbf{K}_4 :

$$\mathbf{Q} = 2 \begin{bmatrix} (A+B)/2 + C & (A-B)/2 & \text{Re}(D+F) & \text{Im}(D+F) \\ (A-B)/2 & (A+B)/2 - C & \text{Re}(D-F) & \text{Im}(D-F) \\ \text{Re}(D+F) & \text{Re}(D-F) & C + \text{Re} E & \text{Im} E \\ \text{Im}(D+F) & \text{Im}(D-F) & \text{Im} E & C - \text{Re} E \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Обратные преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} 4A &= Q_{00} + Q_{11} + 2Q_{01}, \\ 4B &= Q_{00} + Q_{11} - 2Q_{01}, & 4C &= Q_{00} - Q_{11}, \\ 4D &= Q_{02} + Q_{12} + i(Q_{03} + Q_{12}), \\ 4F &= Q_{02} - Q_{12} + i(Q_{03} - Q_{12}), & 4E &= Q_{22} - Q_{33} + 2iQ_{23}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Итак, поляризационные свойства волны в четвертом порядке определяются через 9 вещественных параметров — компонент нормально-упорядоченных матриц \mathbf{K}_4 или \mathbf{Q} (квантовая часть флуктуаций определяется согласно (5.4) общей энергией S_0). Этим параметрам можно поставить в соответствие точку в \mathbf{R}^9 . Под действием преобразователей точка движется по некоторой траектории в этом пространстве.

Удобно определить также матрицу

$$\Delta \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q} - \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} + S_0 \mathbf{I},$$

через которую просто выражаются дисперсии параметров Стокса ($m = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \langle \Delta s_m \Delta s_n \rangle &= \Delta Q_{mn} = Q_{mn} - S_m S_n + S_0 \delta_{mn}, \\ \Delta S_m^2 &= \Delta Q_{mm} = Q_{mm} - S_m^2 + S_0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Слагаемое $Q_{mm} - S_m^2$ описывает классические («избыточные») шумы, например, тепловые, а S_0 описывает описывает квантовые шумы, связанные с некоммутативностью алгебры наблюдаемых. Согласно (2.6) дисперсии связаны условием

$$\sum_{k=1}^3 \Delta S_k^2 = \Delta S_0^2 + 2S_0 + S_0^2(1 - P_2^2). \quad (5.8)$$

Имеется ряд ограничений на поляризационное сжатие. Так, из (5.8) следует

$$\sum_{k=1}^3 \Delta S_k^2 \geq 2S_0. \quad (5.9)$$

Знак равенства здесь достигается лишь для некоторого подмножества N -фотонных состояний, дающих $\Delta S_0 = 0$ и $P_2 = 1$. Эти состояния называют обобщенными когерентными состояниями для группы $SU(2)$ (см. разд. 8). Кроме того, имеют место соотношения неопределенностей

$$\Delta S_1 \Delta S_2 \geq |S_3|, \quad \Delta S_2 \Delta S_3 \geq |S_1|, \quad \Delta S_3 \Delta S_1 \geq |S_2|. \quad (5.10)$$

Отсюда $\Delta S_1 \Delta S_2 \Delta S_3 \geq |S_1 S_2 S_3|^{1/2}$.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим действие преобразователей на четвертые моменты. Напомним, что преобразователи сохраняют общую энергию $s_0 = n_x + n_y$, поэтому все моменты $\langle s_0^p \rangle$ являются инвариантами. В частности, сохраняются величины

$$\begin{aligned} \langle : s_0^2 : \rangle &\equiv Q_{00} = A + B + 2C, \\ \Delta S_0^2 &= \Delta N_x^2 + \Delta N_y^2 + 2\langle \Delta n_x \Delta n_y \rangle = Q_{00} + S_0 - S_0^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Инвариантность ΔS_0 можно назвать законом сохранения суммы флуктуаций и корреляции интенсивностей.

С помощью (3.1) можно непосредственно найти действие преобразователей на поляризационную матрицу \mathbf{K}_4 . Например, из (3.1), (5.2) получаем

$$\begin{aligned} A' &= T^2 A + R^2 B + 4TRC + 2 \operatorname{Re} [tr^*(2TD + 2RF + tr^*E)], \\ B' &= R^2 A + T^2 B + 4TRC - 2 \operatorname{Re} [tr^*(2RD + 2TF - tr^*E)], \\ C' &= TR(A + B) + (T - R)^2 C + 2 \operatorname{Re} \{tr^* [(T - R)(F - D) - tr^*E]\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Компонента $A' \equiv G'_{xx} \equiv \langle : n_x'^2 : \rangle$ определяет дисперсию флуктуаций интенсивности в выходном канале x :

$$\Delta N_x'^2 = A' + N_x' - N_x'^2. \quad (6.3)$$

Здесь, согласно (3.7)

$$N_x' = TN_x + RN_y + 2 \operatorname{Re}(tr^*S_+).$$

Аналогично связаны $\Delta N_y'^2$ и B' .

Пусть $D = E = F = 0$, тогда матрицы \mathbf{K}_4 и \mathbf{Q} диагональны в исходном базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_4 &= \text{diag}(A, C, B), \\ \mathbf{Q} &= \text{diag}(A + B + 2C, A + B - 2C, 2C, 2C). \end{aligned} \tag{6.4}$$

При этом, согласно (3.5), (6.2),

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{8} [3A + 3B + 4C + 4(A - B) \cos \theta + (A + B - 4C) \cos 2\theta], \\ B' &= \frac{1}{8} [3A + 3B + 4C - 4(A - B) \cos \theta + (A + B - 4C) \cos 2\theta], \\ C' &= \frac{1}{8} (A + B + 4C) [1 - V_{xy} \cos 2\theta]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Здесь введена видность

$$V_{xy} \equiv \frac{A + B - 4C}{A + B + 4C}. \tag{6.6}$$

Таким образом, при модуляции параметров преобразователей, например, при вращении фазовой пластины, наблюдаемые корреляция C' и дисперсии $\Delta N_x'^2$, $\Delta N_y'^2$, $\Delta S_1'^2$ периодически изменяются (см. рис. 5, 6). Этот эффект можно определить как поляризационную интерференцию четвертого порядка, это аналог интерференции интенсивностей.

При переходе к классической теории нормально-упорядоченный момент

$$Q_{11} \equiv \langle : s_1^2 : \rangle = A + B - 2C$$

отождествляется с моментом $\langle \langle s_1^2 \rangle \rangle$ (здесь $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ — знак классического усреднения, подробней см. [21, 22]). Последний не может принимать отрицательные значения, поэтому должно выполняться неравенство $(A + B - 2C)_{clas} \geq 0$ и, аналогично, $(A + B - 2|E|)_{clas} \geq 0$. В результате, в классической теории возникают ограничения на видность, которые могут нарушаться в экспериментах с «неклассическим» светом.

Матрица \mathbf{Q} обладает более простыми трансформационными свойствами, чем \mathbf{K}_4 , поскольку s_0 является инвариантом, и действие преобразователей на трехмерный операторный вектор Стокса \mathbf{s} сводится к его вращению, $\mathbf{s}' = \mathbf{R}\mathbf{s}$. В результате

$$Q'_{00} = Q_{00}, \quad Q'_{k0} = \sum_{p=1}^3 R_{kp} Q_{p0}, \tag{6.7}$$

$$Q'_{kl} = \sum_{p,q=1}^3 R_{kp} R_{lq} Q_{pq} \quad (k, l = 1, 2, 3). \tag{6.8}$$

Таким образом, матрица 3×3 Q_{kl} изменяется по тензорному представлению $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$ группы $SO(3)$.

Матрица $\Delta \mathbf{Q}' \equiv \mathbf{Q}' - \mathbf{S}' \otimes \mathbf{S}' + S_0 \mathbf{I}$ определяет изменение неопределенностей ΔS_k параметров Стокса. Например, наблюдаемые в эксперименте на рис. 1 флуктуации величины s'_1 зависят от преобразователя следующим образом (ср. (4.6)):

$$\Delta S_1'^2 = \sum_{k,l=1}^3 R_{1k} R_{1l} \Delta Q_{kl}. \tag{6.9}$$

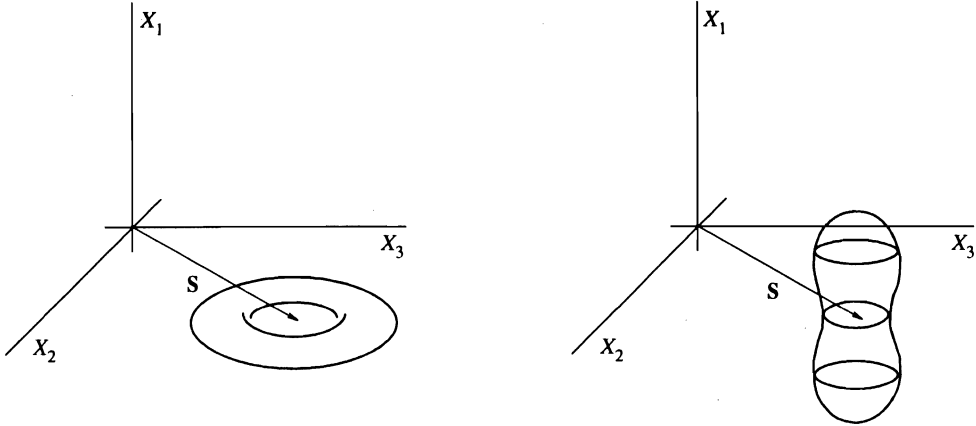


Рис. 7. Сжатие флуктуаций вектора Стокса S с помощью параметрического преобразования. На левом рисунке фаза гомодинного поля подобрана так, что область неопределенности сжата по вертикали и растянута по горизонтали. На правом рисунке фаза гомодинного поля дополнительно сдвинута на $\pi/2$, так что область неопределенности сжата по горизонтали и растянута по вертикали

Это выражение является квадратичной функцией (задаваемой исходной матрицей ΔQ) от единичного вектора X с компонентами из первой строки матрицы R : $X_k \equiv R_{1k}$. Измеряя $\Delta S'_1$ при различных преобразователях поляризации, можно построить область неопределенности $\Delta S(\Theta, \Phi)$, наглядно изображающую анизотропию флуктуаций вектора Стокса в пространстве Стокса-Пуанкаре (см. рис. 7). Размеры области вдоль главных осей равны $\sqrt{\mu_k}$, где μ_k — собственные значения матрицы ΔQ . Они являются инвариантами преобразования поляризации, которые определяются свойствами источника света (отметим, что в соответствии с (5.10) $\mu_1\mu_2 \geq S_3^2$ и т. д.).

При изменении параметров преобразователя значение $\Delta S'^2_1$ не выходит за пределы интервала между μ_{min} и μ_{max} — минимальным и максимальным числами из набора $\{\mu_k\}$. Определим степень поляризации четвертого порядка P_4 по аналогии с P_2 — по максимально возможной видности интерференции четвертого порядка, наблюдаемой по флуктуациям параметров Стокса:

$$P_4 \equiv \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{\mu_{max} + \mu_{min}}. \tag{6.10}$$

Экстремальные значения других наблюдаемых параметров также можно определить через собственные значения матриц ΔQ или Q . Например, $G'_{xy} = C' = (1/4) \times (Q_{00} - Q'_{11})$, т. е. C' также является квадратичной формой с матрицей $(1/4)(Q_{00}I - Q)$, так что экстремальные значения корреляции C' и видности V_{xy} определяются собственными значениями η_k матрицы Q (если S и Q диагональны в одном базисе, то $\mu_k = \eta_k - S_k^2 + S_0$). В диагональном для Q базисе имеем $D = F$ и $E = E^*$, так что собственные значения матрицы Q имеют вид $\eta_k = A + B - 2C, 2(C \pm E)$.

«Сжатые» состояния в общем случае принято определять через соответствующие соотношения неопределенностей, см. [15]. Согласно (5.10) такое условие сжатости для компоненты s_1 имеет вид

$$\Delta S_1^2 < |S_3|. \tag{6.11}$$

Однако этот критерий неудобен в рассматриваемом случае, так как он неинвариантен и теряет смысл при $|S_3| = 0$, поэтому мы примем несколько иное определение: назовем состояние поляризационно-сжатым, если хотя бы для одного направления X в пространстве Стокса–Пуанкаре выполняется следующее (инвариантное) условие:

$$(\Delta S_X^2)_{min} < S_0. \quad (6.12)$$

Поскольку $|S_k| \leq S_0$, это ограничение менее строгое, чем (6.11), оно охватывает более широкое множество состояний. Из него следует, что хотя бы для одной пары ортогонально поляризованных мод (1, 2) дисперсия разности энергии в модах $([\Delta(n_1 - n_2)]^2)$ меньше пуассоновского значения $\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = S_0$. Наглядно это означает, что флуктуации интенсивностей в этих модах — как квантовые, так и классические — коррелированы. Условие полного сжатия $\mu_{min} = 0$ дает $P_4 = 1$, при этом $\det(\Delta Q) = 0$ (т. е. ранг матрицы ΔQ меньше трех) и эллипсоид неопределенности для ΔS_X^2 вырождается в участок плоскости или прямой. Соответственно, операциональный смысл условия $P_4 = 1$ заключается в том, что можно подобрать такой преобразователь, что наблюдаемые флуктуации разности фототоков в двух детекторах на рис. 1 обращаются в нуль, $\Delta S_1^{\prime 2} = 0$. Напомним, что условие $P_2 = 1$ означает, что можно подобрать такой преобразователь, что наблюдаемый фототок в одном из детекторов обращается в нуль, $\langle N_x' \rangle = 0$. Пусть $\Delta S_1 = 0$, $\Delta S_2 \neq 0$, $\Delta S_3 \neq 0$, тогда, согласно соотношениям неопределенностей (5.10), $S_2 = S_3 = 0$, т. е. вектор Стокса направлен вдоль оси 1 (или его модуль равен нулю, см. рис. 7) и флуктуирует только в поперечном направлении.

Определение поляризационно-сжатых состояний (6.12) фактически совпадает с одним из критериев «неклассических» состояний для двухмодового света, основанных на сопоставлении квантовых нормально-упорядоченных моментов с классическими моментами, см. [21, 22]. Из неравенства (6.12) следует, что матрица $(: s_m s_n :)$ — $S_m S_n$, описывающая классические («избыточные») шумы, не является положительно определенной, одно или два ее собственных значения отрицательны — в противоречии с классическим случаем. Таким образом, поляризационно-сжатые состояния принадлежат множеству неклассических состояний. Можно считать для наглядности, что «сжатие» — результат антикорреляции классических и квантовых шумов [23]. Подчеркнем в связи с этим, что разделение ΔS_k на классическую и квантовую составляющие имеет четкий операциональный смысл — при наблюдении спектра флуктуаций фототока квантовые флуктуации дают не зависящий от частоты «белый» шум, в то время как спектр избыточных шумов ограничен сверху динамическими свойствами источника света или частотными фильтрами в оптическом тракте (подробней см. [23]).

7. КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ

Когерентные состояния группы $W(2)$ имеют вид $|\alpha, \beta\rangle \equiv |\alpha\rangle_x |\beta\rangle_y$, где α, β — произвольные комплексные числа. При этом $\langle a \rangle = \alpha$, $\langle b \rangle = \beta$ и нормально-упорядоченные моменты факторизуются:

$$\begin{aligned} N_x &= |\alpha|^2, & N_y &= |\beta|^2, & S_+ &= \alpha^* \beta, & S_0 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2, \\ A &= N_x^2, & B &= N_y^2, & C &= N_x N_y, \\ D &= |\alpha|^2 \alpha^* \beta, & E &= (\alpha^* \beta)^2, & F &= |\beta|^2 \alpha^* \beta. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Отсюда $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}$, $\Delta \mathbf{Q} = S_0 \mathbf{I}$, так что $\Delta S_k^2 = \mu_k = S_0$ — флуктуации вектора \mathbf{s} изотропны в пространстве Стокса–Пуанкаре, область неопределенности является сферой. При этом $P_2 = 1$ и $P_4 = 0$ — свет полностью поляризован во втором порядке и неполяризован в четвертом порядке.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \sqrt{N} \cos(\Theta/2) \exp(i\phi_x), & \beta &\equiv \sqrt{N} \sin(\Theta/2) \exp(i\phi_y), \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 &\equiv N, & \Phi &\equiv \phi_y - \phi_x, \end{aligned} \quad (7.2)$$

тогда параметры Стокса принимают вид

$$\begin{aligned} S_1 &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 = N \cos \Theta, \\ S_2 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) = N \sin \Theta \cos \Phi, \\ S_3 &= 2 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta) = N \sin \Theta \sin \Phi. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Таким образом, S_2 и S_3 пропорциональны косинусу и синусу разности фаз модовых амплитуд. Углы Θ и Φ определяют сферические координаты вектора Стокса \mathbf{S} в пространстве Стокса–Пуанкаре, если за полярную ось принять ось I .

Переход к диагональному базису с $\mathbf{S}' = (N, 0, 0)$ осуществляется преобразованием с параметрами, определяемыми из условия

$$\beta' = -r\alpha + t\beta = 0.$$

Из (3.6) находим параметры преобразователя (углы Эйлера) $\psi = \pi - \Phi$, $\theta = \Theta$, $\phi = 0$. Это соответствует повороту вектора \mathbf{S} в направлении оси I , см. рис. 3.

Рассмотрим далее случай, когда моды x и y возбуждаются двумя идеальными лазерами с одинаковыми частотами и независимо флуктуирующими фазами ϕ_x , ϕ_y [5–8] (в эксперименте [8] использовался один лазер и задержка в одной из мод, много большая времени фазовой когерентности лазера). При этом $P_2 = 0$ — излучение не поляризовано в обычном смысле. Однако флуктуации фототоков в схеме на рис. 1 будут периодически зависеть от ориентации призмы Николя χ :

$$\Delta N_x'^2 \propto 1 - V_x \cos 4\chi.$$

При $\chi = 0$ каждый детектор «видит» один лазер и шумы имеют пуассоновский характер с дисперсией N_x или N_y , а при $\chi = \pi/4$ добавляются дополнительные шумы за счет преобразования призмой Николя флуктуаций разности фаз в избыточные флуктуации интенсивности, см. рис. 6. Аналогичную анизотропию, наблюдавшуюся в [8], проявляет корреляция фототоков $\langle n_x n_y \rangle$.

Для количественного описания эффекта полагаем, что оба лазера находятся в когерентных состояниях $|\alpha\rangle_x$ и $|\beta\rangle_y$, фазы которых $\phi_x = \arg \alpha$ и $\phi_y = \arg \beta$ являются классическими случайными параметрами с равномерными независимыми распределениями (т. е. состояние поля — смешанное). Теперь $S_+ = \langle \langle \alpha^* \beta \rangle \rangle = 0$ ($\langle \langle \dots \rangle \rangle$ означает

классическое усреднение по ϕ_x, ϕ_y). При этом параметры поля имеют вид

$$\begin{aligned} S_1 &= N \cos \Theta, \quad S_2 = S_3 = 0, \quad P_2 = |\cos \Theta|, \quad Q_{10} = N_x^2 - N_y^2, \\ A &= N_x^2, \quad B = N_y^2, \quad C = N_x N_y = \frac{1}{4} N^2 \sin^2 \Theta, \\ \eta_0 &= N^2, \quad \eta_1 = N^2 \cos^2 \Theta, \quad \eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{2} N^2 \sin^2 \Theta, \\ \mu_0 &= \mu_1 = N, \quad \mu_2 = \mu_3 = \eta_2 + N. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Здесь μ_m и η_m — собственные значения матриц ΔQ и Q соответственно, параметр Θ определяется отношением интенсивностей лазеров, см. (7.2): $\text{tg}^2(\Theta/2) = N_y/N_x$. С помощью (6.10) находим степень поляризации четвертого порядка:

$$P_4 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{N_x N_y}{N_x + N_y + N_x N_y} = \frac{N \sin^2 \Theta}{4 + N \sin^2 \Theta}. \tag{7.5}$$

При равных интенсивностях лазеров оказывается, что $P_2 = 0$ и $P_4 = N/(N + 4)$, т. е. имеет место скрытая поляризация; при $N \gg 4$ можно пренебречь вкладом квантовых шумов, так что $P_4 = 1$.

Согласно (6.5) и (7.4) корреляция интенсивностей зависит от параметра преобразователя θ следующим образом:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{1}{8} N^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \right) [1 + V_{xy} \cos 2\theta], \\ V_{xy} &= \frac{3 \sin^2 \Theta - 2}{\sin^2 \Theta + 2}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

При этом корреляция флуктуаций интенсивностей отрицательна:

$$\langle \Delta n'_x \Delta n'_y \rangle = C' - N'_x N'_y = -\frac{1}{8} N^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \theta. \tag{7.6a}$$

Пусть $\sin^2 \Theta = 2/3$ (при этом $N_y/N_x = \text{tg}^2(\Theta/2) = 0.27$ и $P_2 = 1/\sqrt{3} = 0.577$), тогда $V_{xy} = 0$, т. е. $C' = C$ — корреляция интенсивностей инвариантна. Если же интенсивности в модах одинаковы ($\Theta = \pi/2, P_2 = 0$), то видность равна $1/3$:

$$C' = \frac{3}{16} N^2 \left[1 + \frac{1}{3} \cos 2\theta \right].$$

При $\Theta \ll 1$ получаем $V_{xy} = -1$.

Флуктуации интенсивности на выходе преобразователя, согласно (3.7), (6.2), (6.3), имеют вид

$$\Delta N'^2_x = T N_x + R N_y + 2 T R N_x N_y. \tag{7.7}$$

Последнее слагаемое описывает классический шум, возникающий из-за преобразования светодетелем флуктуаций фаз в (антикоррелированные) флуктуации интенсивностей, т. е. схема с призмой Николя на рис. 1 служит фазовым детектором. Дисперсия

$\Delta N_y'^2$ определяется из (7.7) заменой индексов $x \leftrightarrow y$. Выражение (7.7) можно представить в виде

$$\Delta N_x'^2 = \frac{1}{2}N \{ \cos^2 [(\Theta + \theta)/2] + \cos^2 [(\Theta - \theta)/2] \} + \frac{1}{8}N^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \theta. \quad (7.8)$$

Квантовый шум (пропорциональный N) зависит от θ с периодом 2π , а избыточный (пропорциональный N^2) — с периодом π . При равных интенсивностях

$$\Delta N_x'^2 = \frac{1}{2}N \left(1 + \frac{1}{8}N \right) [1 - V_x \cos 2\theta], \quad V_x = \frac{N}{N+8}. \quad (7.9)$$

Выражения (7.6а) и (7.7) удовлетворяют закону сохранения (6.1), согласно которому сумма шумов детекторов $\Delta N_x'^2 = \Delta N_y'^2$ и их удвоенной корреляции $\langle \Delta n_x' \Delta n_y' \rangle$ равна общей энергии N . Следовательно, «биения» шумов детекторов и их корреляции происходят в противофазе, см. рис. 6.

8. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Найдем поляризационные параметры N -фотонного состояния

$$|N_x\rangle_x |N_y\rangle_y = |JM\rangle \equiv |M\rangle$$

с определенной разностью

$$S_1 = N_x - N_y = 2M$$

числа фотонов в модах. Здесь

$$N_x = J + M, \quad N_y = J - M, \quad N = S_0 = 2J.$$

Оператор $s_+ = a^+b$ «переносит фотон» из y -моды в x -моду, а $s_- = ab^+$ производит обратное действие. Из (2.1) следует

$$s_{\pm}|M\rangle = [J(J+1) - M(M \pm 1)]^{1/2} |M \pm 1\rangle.$$

Отсюда $S_{\pm} = 0$. Вектор Стокса и степень поляризации второго порядка имеют вид

$$S = (2J, 2M, 0, 0), \quad P_2 = |M|/J.$$

Таким образом, состояния с $M = \pm J$ (в том числе однофотонные состояния $|\pm 1/2\rangle$) полностью поляризованы во втором порядке, состояния с четным числом фотонов и $M = 0$ неполяризованы, а все состояния с нечетным числом фотонов хотя бы частично поляризованы.

Поляризационная матрица четвертого порядка (5.1) диагональна ($D = E = F = 0$) и имеет элементы

$$\begin{aligned} A &= (J+M)(J+M-1) = N_x(N_x-1), \\ B &= (J-M)(J-M-1) = N_y(N_y-1), \\ C &= J^2 - M^2 = N_x N_y. \end{aligned} \quad (8.1)$$

С помощью (5.5) находим следующие отличные от нуля компоненты матрицы Q :

$$\begin{aligned} Q_{00} &= 2J(2J - 1) = N(N - 1), \\ Q_{10} &= (J + M)(J + M - 1) - (J - M)(J - M - 1) = S_1(S_0 - 1), \\ Q_{11} &= 4M^2 - 2J = S_1^2 - S_0, \\ Q_{22} &= Q_{33} = 2(J^2 - M^2) = 2N_x N_y. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Согласно (5.7) дисперсии параметров Стокса $\Delta S_m^2 = \mu_m$ имеют вид

$$\mu_0 = \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu_3 = 2(J^2 - M^2 + J) = 2N_x N_y + N. \quad (8.3)$$

Таким образом, при любых M свет полностью поляризован в четвертом порядке, $P_4 = 1$. Неопределенность $\Delta S'$ в зависимости от направления Θ изменяется от нуля до $\Delta S_2 = \sqrt{\mu_2}$ (штрихи на рис. 5в). В случае однофотонного состояния $\mathbf{S} = (1, 0, 0)$ и $\Delta S_2 = 1$.

Состояния $|M\rangle$ дают знак равенства в соотношении неопределенностей: $\Delta S_1 \Delta S_2 = S_3 = 0$. Такие состояния получили название разумных (intelligent), см. [15]. Кроме того, поскольку обе стороны соотношения неопределенностей имеют минимальные значения, состояния $|M\rangle$ относятся также и к классу состояний с минимальной неопределенностью. При четном N и $M = 0$ имеем пример скрытой поляризации с $P_2 = 0$ и $P_4 = 1$. Отметим, что при $M = \pm J$ в (5.9) достигается знак равенства.

В состояниях $|M\rangle$ квантовая часть S_0 флуктуаций параметра S_1 полностью компенсируется избыточными шумами $Q_{11} - S_1^2 = -S_0$. Практически такая компенсация может происходить лишь в ограниченном сверхдиапазоне частот флуктуаций интенсивности, см. [23].

Интерференция интенсивности согласно (6.5) и (8.1) описывается выражениями

$$C' \propto 1 + V_{xy} \cos 2\theta, \quad V_{xy} = \frac{J(J+1) - 3M^2}{J(3J-1) - M^2}. \quad (8.4)$$

Например, при $N = 2$ и $M = 0$, т.е. в случае двухфотонного симметричного состояния $|1\rangle_x |1\rangle_y$, получаем $V_{xy} = 1$. При $T = R = 1/2$ корреляция полностью подавлена, $C' = 0$, т.е. оба фотона обнаруживаются лишь в одном и том же выходном канале. Это эффект антикорреляции фотонов [5, 6, 24–27], который позволяет измерять сверхкороткие времена групповой задержки.

Пусть теперь $M = -J$, т.е. x -мода находится в вакуумном состоянии, а y -мода находится в N -фотонном состоянии, так что поле полностью поляризовано вдоль y . Под действием различных преобразователей поле переходит в множество состояний вида $U(\phi, \theta, \psi) | -J \rangle$, которые называются обобщенными когерентными состояниями для группы $SU(2)$ (см. разд. 3). Их можно параметризовать двумя углами Эйлера ϕ, θ и отобразить на сферу Пуанкаре, положив $\theta = \Theta$, $\phi = \Phi$. При этом, согласно (3.10), (8.2),

$$\begin{aligned} S_0 &= -S_1 = N, & Q_{00} &= -Q_{10} = Q_{11} = N(N - 1), \\ S'_1 &= -N \cos \Theta, & S'_2 &= -N \sin \Theta \cos \Phi, & S'_3 &= -N \sin \Theta \sin \Phi. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Из (5.7) получаем

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu_3 = N$$

и из (6.9)

$$\Delta S'_k{}^2 = N(1 - R_{k1}^2).$$

С учетом (3.10) находим дисперсии в $SU(2)$ -когерентных состояниях $U(\Phi, \Theta, \psi) | - J \rangle$:

$$\begin{aligned} \Delta S'_1{}^2 &= N \sin^2 \Theta, \\ \Delta S'_2{}^2 &= N(1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi), \\ \Delta S'_3{}^2 &= N(1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Эквивалентные результаты были получены в [15] с помощью представления Шредингера. Отметим, что сумма трех дисперсий в (8.6) достигает минимально возможного значения $2N$ (см. (5.9)), что характерно для когерентных состояний [14, 16].

Во всех $SU(2)$ -когерентных состояниях $\mu_1 = \Delta S_1^2 = 0$, т. е. согласно нашему определению имеется полное поляризационное сжатие, $P_4 = 1$. В то же время стандартное условие для сжатых состояний типа $\Delta S_2'^2 \leq |S_1'|$ [15], которое принимает согласно (8.6) вид

$$1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi < |\cos \Theta|,$$

выполняется лишь для некоторой ограниченной области на сфере Пуанкаре и поэтому не является поляризационным инвариантом.

9. СЖАТЫЙ ВАКУУМ

При спонтанном параметрическом рассеянии типа II фотоны излучаются только парами, причем один фотон из каждой пары имеет x -поляризацию, а другой — y -поляризацию. Нас интересует вырожденный случай, когда частоты мод одинаковы и равны половине частоты поля накачки. Соответствующее состояние поля называют двухмодовым сжатым вакуумом, оно порождается из вакуума гамильтонианом вида

$$H \propto a^+ b^+ + ab.$$

Этот оператор, принадлежащий алгебре $su(1, 1)$ [15, 16], коммутирует с оператором Стокса $s_1 = n_x - n_y$. В результате наблюдаемая s_1 не флуктуирует, $\Delta S_1 = 0$, а интенсивности поля в каждой моде (которые сами испытывают хаотические флуктуации) полностью коррелированы, $n_x = n_y$. Таким образом, состояние является полностью поляризационно сжатым и $P_4 = 1$.

Гамильтониан H порождает из вакуума состояние с гауссовской статистикой, которая полностью определяется вторыми моментами:

$$\begin{aligned} \langle a^+ a \rangle &\equiv N_x = N_y = \text{sh}^2 \Gamma, \quad S_+ = \langle a^+ b \rangle = 0, \\ \langle ab \rangle &\equiv L = [N_x(N_x + 1)]^{1/2} \exp(i\phi_0) = \frac{1}{2} \text{sh} 2\Gamma \exp(i\phi_0) \end{aligned} \quad (9.1)$$

(Γ — показатель параметрического усиления, ϕ_0 — фаза накачки плюс $\pi/2$). Таким образом, $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ — поле во втором порядке не поляризовано, $P_2 = 0$.

Матрицы K_4 , Q и ΔQ диагональны и их компоненты выражаются через общую энергию $N \equiv 2 \text{sh}^2 \Gamma$ следующим образом

$$\begin{aligned} A = B &= \frac{1}{2} N^2, \quad C = N_x^2 + |L|^2 = \frac{1}{2} N(N+1), \\ \eta_0 &= N(2N+1), \quad \eta_1 = -N, \quad \eta_2 = \eta_3 = N(N+1), \\ \mu_1 &= 0, \quad \mu_0 = \mu_2 = \mu_3 = N(N+2) = \text{sh}^2 2\Gamma. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Это еще один пример поля со скрытой поляризацией: $P_2 = 0$, $P_4 = 1$. Область неопределенности для ΔS имеет диаметр $\sqrt{\mu_2} = \text{sh} 2\Gamma$ в плоскости (2, 3) и нулевую толщину по оси 1 (штрихи на рис. 5в). Из (6.9) и (3.10) следует

$$\Delta S_1'^2 = \frac{1}{2} N(N+2) [1 - \cos 2\theta] = \text{sh}^2 2\Gamma \sin^2 \theta. \tag{9.3}$$

Из (6.3), (6.5) находим вид интерференционных зависимостей для флуктуаций интенсивности в одном канале и для корреляции интенсивностей:

$$\begin{aligned} \Delta N_x'^2 &= \frac{3}{8} N(N+2) \left[1 - \frac{1}{3} \cos 2\theta \right], \\ C' &= \frac{1}{8} N(3N+2) [1 + V_{xy} \cos 2\theta], \\ V_{xy} &= \frac{N+2}{3N+2}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Пусть теперь к сжатому вакууму добавлена когерентная компонента с комплексными параметрами $\langle a \rangle = \alpha$ и $\langle b \rangle = \beta$, играющая роль гомодинного поля. Практически это можно сделать с помощью светоделителей с близким к 1 пропусканием. При этом поле описывается следующей нормально-упорядоченной характеристической функцией (см. [21, 22]):

$$\chi(x, x^*, y, y^*) = \exp \left[-N_x (xx^* + yy^*) + L^* xy + Lx^* y^* + \alpha^* x - \alpha x^* + \beta^* y - \beta y^* \right]. \tag{9.5}$$

Здесь величина L определена в (9.1) и $N_x = \text{sh}^2 \Gamma \equiv N/2$ относится лишь к интенсивности некогерентной части поля. Из (9.5) дифференцированием находим вторые и четвертые моменты:

$$\begin{aligned} \langle a^+ a \rangle &= N_x + |\alpha|^2, \quad \langle b^+ b \rangle = N_x + |\beta|^2, \\ \langle a^+ b \rangle &\equiv S_+ = \alpha^* \beta, \quad \langle ab \rangle = \alpha \beta + L, \\ A &= \frac{1}{2} N^2 + 2N|\alpha|^2 + |\alpha|^4, \quad B = \frac{1}{2} N^2 + 2N|\beta|^2 + |\beta|^4, \\ C &= \frac{1}{2} N(1 + N + N_c) + |\alpha \beta|^2 + 2 \text{Re}(L^* \alpha \beta), \\ D &= \alpha^{*2} \alpha \beta + N \alpha^* \beta + L \alpha^{*2}, \quad E = (\alpha^* \beta)^2, \\ F &= \alpha^* \beta^* \beta^2 + N \alpha^* \beta + L^* \beta^2. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Здесь $N_c \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2$, $N \equiv 2N_x = 2 \text{sh}^2 \Gamma$, так что $S_0 = N + N_c$. Вектор Стокса определяется лишь когерентной частью поля, поэтому $P_2 = N_c/S_0$.

Дисперсии компонент вектора Стокса, согласно (5.5), (5.7) и (7.3), имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta S_1^2 &= N_c(N+1) - 4 \operatorname{Re}(L^* \alpha \beta) = N_c [\operatorname{ch} 2\Gamma - \operatorname{sh} 2\Gamma \sin \Theta \cos \phi], \\ \Delta S_k^2 &= N(N+2) + N_c(N+1) + 4 \operatorname{Re}(L^* \alpha \beta) = \\ &= \operatorname{sh}^2 2\Gamma + N_c [\operatorname{ch} 2\Gamma + \operatorname{sh} 2\Gamma \sin \Theta \cos \phi] \quad (k = 0, 2, 3).\end{aligned}\quad (9.7)$$

Здесь $\phi \equiv \phi_x + \phi_y - \phi_0$ — относительная фаза гомодинного поля и $\operatorname{tg} \Theta/2 \equiv |\beta/\alpha|^2$. Рассмотрим два предельных случая.

1. Пусть $\phi = 0$ и $\Theta = \pi/2$, тогда ΔS_1 испытывает максимальное сжатие:

$$\Delta S_1^2 = N_c e^{-2\Gamma} \quad (\phi = 0, \quad \Theta = \pi/2).\quad (9.8)$$

Здесь одновременно проявляются два типа подавления флуктуаций [28].

(а) Гауссовские флуктуации поля параметрического рассеяния полностью подавлены за счет полной корреляции интенсивностей в двух модах ($n_x = n_y$) независимо от N_c .

(б) Пуассоновские флуктуации гомодинного поля подавлены благодаря наличию «аномального» момента $L = \langle ab \rangle$ — аналогично случаю одномодового сжатого света. В классических терминах это свидетельство антикорреляции фаз в модах, $\phi_x + \phi_y = \phi_0$. Для заметного сжатия этого типа необходимы условия $N_c \gg N \gg 1$.

Согласно (9.7)

$$\Delta S_k^2 = \operatorname{sh}^2 2\Gamma + N_c e^{2\Gamma} \quad (k = 0, 2, 3, \quad \phi = 0, \quad \Theta = \pi/2).\quad (9.9)$$

Здесь гауссовские флуктуации проявляются полностью, а пуассоновские увеличены в e^Γ раз. Таким образом, область неопределенности сплюснута по оси 1 и растянута в направлениях 2 и 3 (рис. 7а). Выбором разности $\phi_x - \phi_y$ (при неизменной фазе $\phi = \phi_x + \phi_y - \phi_0 = 0$) ее центр, помещенный в точку S, можно перемещать в плоскости (2, 3), получая, например, сжатую линейную (под углом 45°) или сжатую круговую поляризацию.

2. Пусть $\Theta = \pi/2$ и $\phi = \pi$, тогда область неопределенности, согласно (9.7), сжата в направлениях 2 и 3 и растянута в направлении 1 (рис. 7б):

$$\begin{aligned}\Delta S_1^2 &= N_c e^{2\Gamma}, \\ \Delta S_k^2 &= \operatorname{sh}^2 2\Gamma + N_c e^{-2\Gamma} \quad (k = 0, 2, 3).\end{aligned}\quad (9.10)$$

Теперь вклад гауссовских флуктуаций в неопределенности ΔS_0 , ΔS_2 , ΔS_3 не подавляется и для большого относительного сжатия необходимо выполнение условий $N_c \gg N \gg 1$.

При несимметричном смещении, когда $\Theta \neq \pi/2$, $|\alpha| \neq |\beta|$ и вектор S не принадлежит плоскости (2, 3), эффект сжатия уменьшается.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, все поляризационные свойства плоской монохроматической волны в четвертом порядке определяются девятью параметрами, например, компонентами симметрич-

ной матрицы $4 \times 4 \Delta Q_{mn} = \langle \Delta s_m \Delta s_n \rangle$. Флуктуации вектора Стокса в различных направлениях ΔS_x можно задать шестью параметрами — тремя собственными значениями μ_k подматрицы $3 \times 3 \Delta Q_{kl}$, определяющими размеры эллипсоида неопределенности $\Delta S_x = \text{const}$, и тремя углами, задающими его ориентацию в пространстве Стокса-Пуанкаре. Действие преобразователей поляризации наглядно изображается как вращение эллипсоида (центр которого можно совместить с концом вектора Стокса). В случае «классического света» для всех направлений имеем $\Delta S_x \geq N$, где N — среднее число фотонов в двух поляризационных модах, определяющее квантовую часть флуктуаций вектора Стокса. В поляризационно-сжатом свете [10] для некоторых направлений $\Delta S_x \leq N$.

Данный формализм применим также для описания двух мод, отличающихся не поляризацией, а направлением распространения. Аналог вектора Стокса при этом помогает визуализировать различные состояния двух мод и их преобразования светодетекторами и фазовращателями [3]. Эллипсоид неопределенности для вектора Стокса (рис. 7) дает наглядное трехмерное отображение двухмодового сжатия, аналогичное известным двумерным диаграммам с эллипсами для одномодового сжатия.

В заключение подчеркнем еще раз, что поляризационная симметрия свободного светового поля не специфична для квантовой теории; это становится очевидным при использовании представления Гейзенберга, в котором преобразования поляризации описываются известными в классической оптике феноменологическими матрицами Джонса или Мюллера.

Здесь рассматривалась лишь эффекты поляризации четвертого порядка в случае одной плоской монохроматической волны. Направления дальнейших обобщений очевидны: анализ более высоких порядков, учет многих продольных мод (т. е. спектрально-поляризационный анализ), случай двух и более поперечных мод. Отметим особо случай двухфотонных состояний для двух пучков, который в последние годы привлекает исключительное внимание в связи с методологическими проблемами квантовой механики, см. [27, 29–30]. Поляризационная матрица плотности таких состояний рассматривалась в [31]. Известны также исследования поляризации n пучков и неплоских волн [32–34]. Некоторые особенности интерференции высших порядков, в частности, ее негармонической характер, рассматривались в [5, 6, 35].

Автор благодарен А. С. Чиркину за полезные обсуждения и ознакомление с работами [12, 13] до их публикации.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16334-а).

Литература

1. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970); А. Джеррард, Дж. М. Берч, *Введение в матричную оптику*, Мир, Москва (1978); У. Шерклифф, *Поляризованный свет*, Мир, Москва (1965).
2. С. М. Caves, Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981).
3. В. Yurke, S. L. McCall, and J. H. Klauder, Phys. Rev. A **33**, 4033 (1986).

4. C. H. Bennet, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, and J. Smolin, *J. Crypto* **5**, 3 (1992); C. H. Bennett, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3121 (1992); Special Issue on Quantum Communication: *J. Mod. Opt.* **41**, № 12 (1994).
5. D. N. Klyshko, *Phys. Lett. A* **163**, 349 (1992).
6. A. V. Belinsky, and D. N. Klyshko, *Laser Physics* **2**, 113 (1992).
7. В. П. Карасев, А. Н. Масалов, *Опт. и спектр.* **74**, 928 (1993).
8. D. I. Guzun, and A. N. Penin, *Proc. SPIE* **2799**, 249 (1996).
9. A. Heidman, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
10. А. С. Чиркин, А. А. Орлов, Д. Ю. Парашук, *КЭ* **20**, 999 (1993).
11. А. П. Алоджанц, С. М. Аракелян, А. С. Чиркин, *ЖЭТФ* **108**, 63 (1995).
12. N. V. Korolkova and A. S. Chirkin, *J. Modern Opt.* **43**, 869 (1996).
13. В. Н. Бескровный, А. С. Чиркин, *КЭ* **23**, 843 (1996).
14. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния*, Наука, Москва (1987); A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer (1986).
15. K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 458 (1985).
16. Я. А. Смородинский, А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин, *УФН* **162**, 1 (1992).
17. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, Москва (1965).
18. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1970).
19. Д. Н. Клышко, *УФН* **163**, 1 (1993).
20. Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **105**, 1574 (1994).
21. D. N. Klyshko, *Phys. Lett. A* **213**, 7 (1996).
22. Д. Н. Клышко, *УФН* **166**, 613 (1996).
23. А. В. Масалов, Д. Н. Клышко, *УФН* **165**, 1249 (1995).
24. C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
25. A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2421 (1992).
26. Y. H. Shih and A. V. Sergienko, *Phys. Lett. A* **186**, 29 (1994).
27. Д. Н. Клышко, *УФН* **164**, 1187 (1994).
28. D. N. Klyshko, *Phys. Lett. A* **146**, 471 (1990).
29. Т. В. Pittman, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, and M. H. Rubin, *Phys. Rev. A* **51**, 3495 (1995).
30. J. R. Torgersin, D. Branning, C. H. Mouken, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **51**, 4400 (1995); *Phys. Lett. A* **204**, 323 (1995).
31. V. E. Mkrтчian and V. O. Chaltykian, *Opt. Com.* **63**, 239 (1987).
32. P. Roman, *Nuovo Cim.* **13**, 974 (1959).
33. К. С. Вульфсон, *УФН* **152**, 667 (1987).
34. R. Barakat, *J. Opt. Soc. Am.* **53**, 317 (1963).
35. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **100**, 1116 (1992).