

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Н. В. Гряник^а, В. И. Кляцкин^{а,б}

^а Институт физики атмосферы Российской академии наук
109017, Москва, Россия

^б Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, Россия

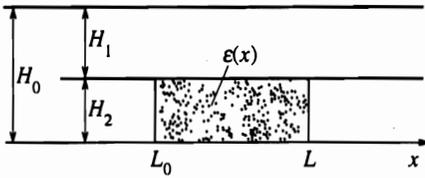
Поступила в редакцию 10 сентября 1996 г.

Рассматривается простейшая система стохастических краевых волновых уравнений, описывающая взаимодействие двух типов волн в случайно-неоднородной среде. Обсуждается статистика коэффициентов отражения и прохождения для падающих и возбуждаемых волн. Показано, что эффект возбуждения волн статистически эквивалентен включению затухания для исходных падающих волн, которые локализованы в отдельных конкретных реализациях. Оцениваются параметры длины такой локализации в терминах спектральной плотности неоднородностей среды. Показано также, что для возбуждаемых волн отсутствует эффект динамической локализации, и оцениваются коэффициенты прохождения для них.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы локализации плоских волн в слоистых средах, описываемых в рамках одномерного уравнения Гельмгольца со случайным показателем преломления, в настоящее время изучены довольно подробно (см., например, [1–4]). Для анализа таких задач существует несколько подходов. Традиционный подход основывается на аналогии уравнения Гельмгольца со стационарным уравнением Шредингера со случайным потенциалом, для анализа которого изучаются спектральные свойства этого уравнения [1]. Другой также часто используемый подход, основывается на аналитических и численных методах анализа экспонент Ляпунова, также характеризующих пространственную локализацию собственных функций однородной краевой волновой задачи [1, 5]. В работах же [2–4] использовался совершенно другой подход, основанный на анализе конкретных физических краевых задач о генерации волн в случайных средах и на анализе пространственной структуры волнового поля в такой среде.

Однако часто исследователи сталкиваются с многомерной ситуацией, когда одни типы волн могут порождать другие благодаря зависимости параметров задачи от пространственных координат. В ряде случаев возможно параметризовать такую задачу, разбивая среду на слои в каком-то направлении, характеризуемые дискретным набором некоторых параметров, в то время как другие параметры в этих слоях меняются непрерывным образом. В качестве примера можно привести уравнение крупномасштабных и низкочастотных движений в атмосфере и океане Земли (например, волн Россби). Эти движения можно описывать в рамках квазигеострофической модели, в которой атмосфера и океан рассматриваются как тонкие многослойные пленки, характеризуемые по вертикали толщинами слоев и значениями плотности в них [6]. При этом параметры



Геометрия постановки стохастической задачи (1)

среды внутри слоев меняются непрерывным образом. Возможным источником локализации волн Россби являются пространственные изменения неоднородностей топографии дна в горизонтальной плоскости. Простейшая однослойная модель, эквивалентная одномерному уравнению Гельмгольца, описывает баротропные движения среды [5, 7], а двухслойная модель учитывает уже бароклинные эффекты [8, 9]. При этом вопрос о возможности существования явления локализации волн в рамках двухслойной модели среды, описываемой системой уравнений Гельмгольца, практически не изучен. В настоящей работе эта задача рассматривается на примере простейшей системы волновых уравнений, в результате чего показано, что полная (для всех видов волн) локализация не осуществляется.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Простейшая модель распространения взаимодействующих волн в двухслойной среде описывается системой уравнений [9]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 + k^2 \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2 + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2 + \alpha_2 F(\psi_1 - \psi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha_1 = 1/H_1$, $\alpha_2 = 1/H_2$ (H_1, H_2 — толщины верхнего и нижнего слоев), F характеризует взаимодействие волн, а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды в нижнем слое. Считаем, что функция $\varepsilon(x)$ отлична от нуля только в области (L_0, L) и является случайной. Геометрия задачи приведена на рисунке. Краевыми условиями для уравнения (1) являются условия излучения на бесконечности и условие непрерывности волновых полей и их производных на границах области L и L_0 .

Отметим, что численная величина F , характеризующая параметризацию среды по вертикали, в системе уравнений (1) проявляется как горизонтальный масштаб, ответственный за генерацию дополнительной волны. Характер взаимодействия волн (и, в частности, зависимости параметров α_i от толщин слоев) в системе (1) соответствует задачам геофизической гидродинамики [6]. Для задач другого типа эти соотношения могут измениться, что несущественно для дальнейшего анализа (см. Заключение). Принципиально важно лишь то, что взаимодействие между волнами линейно.

Переход к однослойной модели осуществляется при $F = 0$, $\psi_1 = 0$, и соответствующее волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi = 0. \quad (2)$$

Волну этого типа будем называть для определенности k -волной. Переход к однослойной задаче можно также осуществить и предельным переходом $H_1 \rightarrow 0$; при этом $\psi_1 = \psi_2$. Следует, однако, иметь в виду, что предельные переходы $L_0 \rightarrow -\infty$ (переход к полупространству) и $H_i \rightarrow 0$ в статистической задаче не перестановочны [9]. Далее нас будет интересовать случай полупространства и, следовательно, толщины слоев H_i могут быть хоть и малыми, но конечными.

2.1. Точечные источники генерации волн внутри слоев

Рассмотрим систему уравнений для функции Грина:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 + k^2 \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2) &= -v_1 \delta(x - x_0), \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2 + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2 + \alpha_2 F(\psi_1 - \psi_2) &= -v_2 \delta(x - x_0), \end{aligned} \tag{3}$$

соответствующую задаче о возбуждении волн в верхнем и нижнем слоях. Вводя векторные обозначения $\psi(x; x_0) = \{\psi_1(x; x_0), \psi_2(x; x_0)\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$, можно переписать систему (3) в векторной форме:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \psi(x; x_0) &= -\mathbf{v} \delta(x - x_0), \\ A^2 &= \begin{bmatrix} k^2 - \alpha_1 F & \alpha_1 F \\ \alpha_2 F & k^2 - \alpha_2 F \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A &= k \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 + \lambda \tilde{\alpha}_1 & (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_1 \\ (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 + \lambda \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{k\lambda} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 + \lambda \tilde{\alpha}_2 & -(1 - \lambda) \tilde{\alpha}_1 \\ -(1 - \lambda) \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_2 + \lambda \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

где введен параметр

$$\lambda^2 = [1 - (\alpha_1 + \alpha_2)F/k^2], \tag{5}$$

описывающий моду, которую будем называть λ -волной (считаем, что $\lambda^2 > 0$), и относительные толщины слоев

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_2}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_1}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = 1. \tag{5'}$$

Рассмотрим матрицу Ψ , описываемую уравнением

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; x_0) = -E \delta(x - x_0), \tag{6}$$

через которую вектор-функция $\psi(x; x_0)$ определяется согласно равенству

$$\psi(x; x_0) = \Psi(x; x_0) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \psi_{11} + v_2 \psi_{12} \\ v_1 \psi_{21} + v_2 \psi_{22} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Как следствие, компоненты матрицы $\{\psi_{11}, \psi_{21}\}$ и $\{\psi_{12}, \psi_{22}\}$ описывают волны, генерируемые источниками $\{v_1, 0\}$, $\{0, v_2\}$ в верхнем и нижнем слоях соответственно. Краевыми условиями для уравнения (6) являются

$$\left(\frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x; x_0)|_{x=L} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x; x_0)|_{x=L_0} = 0. \tag{6'}$$

Далее, следуя [9], еще больше упростим задачу, а именно, будем считать, что источник плоских волн расположен на границе области существования неоднородностей $x_0 = L$. В этом случае, используя условие для скачка волнового поля в точке расположения источника x_0

$$\frac{d}{dx}\Psi(x; x_0)|_{x=x_0+0} - \frac{d}{dx}\Psi(x; x_0)|_{x=x_0-0} = -E,$$

получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2\varepsilon(x)\Gamma \right] \Psi(x; L) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x; L)|_{x=L} &= E, \quad \left(\frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x; L)|_{x=L_0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

2.2. Генерация k - и λ -волн

Чтобы привести задачу к физически более наглядному виду, будем вместо матрицы $\Psi(x; L)$ рассматривать матричную функцию

$$U(x; L) = -2iK\Psi(x; L)K^{-1}B, \quad (9)$$

где

$$B = k \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & 1 \\ -\tilde{\alpha}_2 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет перейти к краевой задаче для $U(x; L)$ с диагональной матрицей B :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} + B^2 + k^2\varepsilon(x)\tilde{\Gamma} \right] U(x; L) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} - iB \right) U(x; L)|_{x=L} &= -2iB, \quad \left(\frac{d}{dx} + iB \right) U(x; L)|_{x=L_0} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\tilde{\Gamma} = K\Gamma K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & -1 \\ -\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}.$$

Краевая задача (10) описывает падение на среду k - и λ -волн с единичными амплитудами, причем падающая λ -волна U_{11} генерирует k -волну U_{21} , а падающая k -волна U_{22} генерирует λ -волну U_{12} .

Отметим, что из системы (10) следует, что амплитуда генерируемой k -волны U_{21} пропорциональна параметру

$$\delta = \lambda\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2 = \lambda \frac{H_1 H_2}{H_0^2}, \quad (11)$$

т. е.

$$U_{21} = \delta\tilde{U}_{21}. \quad (11')$$

В общем случае параметр $\delta < \lambda/4$. Однако, поскольку обычно в моделях, описывающих реальные среды, $\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \ll 1$ (так, например, для атмосферы предполагается, что $H_2 \ll H_1$ или $\tilde{\alpha}_1 \ll 1$, $\tilde{\alpha}_2 \cong 1$, а для океана предполагается, что $H_1 \ll H_2$ или $\tilde{\alpha}_2 \ll 1$, $\tilde{\alpha}_1 \cong 1$), в рассматриваемой задаче появляется малый параметр δ . Для моделей среды, где $H_2/H_1 \simeq 1$, параметр $\delta \ll 1$ при $\lambda \ll 1$.

Введем теперь в рассмотрение матрицы $R(L) = U(L; L) - E$ и $T(L) = U(L_0; L)$. Тогда R_{ij} , T_{ij} будут комплексными коэффициентами отражения и прохождения падающих ($i = j$) и возбужденных ($i \neq j$) λ - и k -волн соответственно.

Из системы (10) следует существование двух интегралов, соответствующих сохранению плотности потока энергии λ - и k -волн:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[U_{11}^*(x) \frac{d}{dy} U_{11}(x) - U_{11}(x) \frac{d}{dy} U_{11}^*(x) \right] + U_{21}^*(x) \frac{d}{dy} U_{21}(x) - U_{21}(x) \frac{d}{dy} U_{21}^*(x) &= \text{const}, \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[U_{12}^*(x) \frac{d}{dy} U_{12}(x) - U_{12}(x) \frac{d}{dy} U_{12}^*(x) \right] + U_{22}^*(x) \frac{d}{dy} U_{22}(x) - U_{22}(x) \frac{d}{dy} U_{22}^*(x) &= \text{const}. \end{aligned}$$

В терминах коэффициентов отражения и прохождения они записываются в виде равенств

$$\begin{aligned} \delta [1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2] &= |R_{21}|^2 + |T_{21}|^2, \\ 1 - |R_{22}|^2 - |T_{22}|^2 &= \delta [|R_{12}|^2 + |T_{12}|^2], \end{aligned} \tag{12}$$

которые в силу (11') можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2 &= \delta [|\tilde{R}_{21}|^2 + |\tilde{T}_{21}|^2], \\ 1 - |R_{22}|^2 - |T_{22}|^2 &= \delta [|R_{12}|^2 + |T_{12}|^2]. \end{aligned} \tag{12'}$$

Если осуществляется полная локализация волн в области неоднородностей среды (L_0, L), то все коэффициенты прохождения T_{ij} должны стремиться к нулю при увеличении ее размера $L - L_0$.

Равенства (12), (12') определяют связь коэффициентов прохождения с коэффициентами отражения, которые на основе метода погружения можно описать замкнутой системой уравнений. Метод погружения позволяет перейти от задачи с краевыми условиями для матричной функции $U(x)$ к системе уравнений для матричных функций $U(x; L)$ и $U(L; L)$ с начальными условиями по параметру L (в этом случае переменная x рассматривается как параметр) [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} U(x; L) &= iU(x; L)B + \frac{i}{2}k^2 \varepsilon(L)U(x; L)B^{-1} \tilde{\Gamma}U(L; L), \quad U(x; L)|_{L=x} = U(x; x), \\ \frac{d}{dL} U(L; L) &= -2iB + i[U(L; L)B + BU(L; L)] + \frac{i}{2}k^2 \varepsilon(L)U(L; L)B^{-1} \tilde{\Gamma}U(L; L), \\ U(L; L)|_{L=L_0} &= E. \end{aligned} \tag{13}$$

Последнее уравнение для матрицы $R(L) = U(L; L) - E$ можно переписать в виде матричного уравнения Риккати:

$$\frac{d}{dL} R(L) = i[R(L)B + BR(L)] + \frac{i}{2}k^2 \varepsilon(L)[E + R(L)]B^{-1} \tilde{\Gamma}[E + R(L)], \quad R(L)|_{L=L_0} = 0. \tag{13'}$$

Записывая (13') в виде системы уравнений для компонент R_{ij} , легко видеть, что имеется дополнительный интеграл: $R_{21} = \delta R_{12}$, т. е. $\dot{R}_{21} = R_{12}$. Это позволяет в дальнейшем рассматривать систему из трех уравнений для R_{11} , R_{12} и R_{22} , которую представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_{11} &= 2i\lambda k R_{11} + i\bar{\varepsilon}(L) [\bar{\alpha}_2(1 + R_{11})^2 - 2\delta(1 + R_{11})R_{12} + \delta\lambda\bar{\alpha}_1 R_{12}^2], \\ \frac{d}{dL} R_{22} &= 2ik R_{22} + i\bar{\varepsilon}(L) [\lambda\bar{\alpha}_1(1 + R_{22})^2 - 2\delta(1 + R_{22})R_{12} + \delta\bar{\alpha}_2 R_{12}^2], \\ \frac{d}{dL} R_{12} &= ik(1 + \lambda)R_{12} + i\bar{\varepsilon}(L) \times \\ &\times \{[\bar{\alpha}_2(1 + R_{11}) + \lambda\bar{\alpha}_1(1 + R_{22}) - \delta R_{12}]R_{12} - (1 + R_{11})(1 + R_{22})\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\bar{\varepsilon}(L) = \frac{k}{2\lambda} \varepsilon(L).$$

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

До сих пор не делалось никаких предположений о характере неоднородностей случайной функции $\varepsilon(x)$. Далее будем считать, что $\varepsilon(x)$ — однородный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением ($\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$) и корреляционной и спектральной функциями

$$B_\varepsilon(\xi) = \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle, \quad \Phi_\varepsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \exp(iq\xi), \quad \xi = x - x', \quad (15)$$

характеризуемыми радиусом корреляции l_0 . Здесь и далее через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\varepsilon(x)$.

3.1. Некоторые результаты статистического анализа однослойной модели

Отметим, что для однослойной модели среды уравнение для коэффициента отражения $R = \psi - 1$ следует из уравнения (2) и соответствующих краевых условий для него:

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L + i\frac{k}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0. \quad (16)$$

Для этой модели условие сохранения плотности потока энергии дает равенство

$$1 - |R_L|^2 = |T_L|^2, \quad (16')$$

и в диффузионном приближении с использованием дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей $P_L(W) = \langle \delta(W(L) - W) \rangle$ случайной величины $W(L) = |R_L|^2$ имеет вид [2–4]

$$\frac{\partial}{\partial L} P_L(W) = D \frac{\partial}{\partial W} \left[-(1 - W)^2 + \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \right] P_L(W) \quad (17)$$

с коэффициентом диффузии, имеющим размерность обратной длины:

$$D = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k). \quad (17')$$

Диффузионное приближение справедливо при некоторых ограничениях. А именно, случайные флуктуации функции $\varepsilon(x)$ не должны оказывать влияния на распространение волны на масштабах порядка корреляционного радиуса l_0 , т. е. должно выполняться условие $Dl_0 \ll 1$. Другими словами, волна на таких масштабах «не чувствует» неоднородностей среды и распространяется как в свободном пространстве. Условием применимости усреднения по быстрым осцилляциям является неравенство $kD \gg 1$.

Для мелкомасштабных неоднородностей среды, для которых $kl_0 \ll 1$, имеем

$$D = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(0), \quad (17'')$$

и решение статистической задачи не зависит от вида спектральной функции.

Из уравнения (17) следует, что для достаточно большой области неоднородностей среды, а именно, при $D(L - L_0) \gg 1$ плотность вероятностей $P_L(W) = \delta(W - 1)$, и, следовательно, величина $|T|^2$ равна нулю с вероятностью равной единице, что и соответствует динамической локализации волны. В этом случае интенсивность волнового поля внутри среды в конкретных реализациях имеет структуру экспоненциально затухающей кривой [3, 4]:

$$I(x; L) = |U(x; L)|^2 \simeq 2 \exp[-(L - x)/l_{loc}], \quad (18)$$

где величина l_{loc} определяется коэффициентом диффузии,

$$l_{loc} = 1/D, \quad (18')$$

и называется локализационной длиной. Статистические моменты интенсивности волны при этом экспоненциально возрастают с распространением в глубину слоя:

$$\langle I^n(x; L) \rangle \sim \exp[n(n - 1)D(L - x)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18'')$$

что обусловлено большими случайными выбросами интенсивности относительно кривой (18) в отдельных реализациях [3, 4].

3.2. Статистический анализ двухслойной модели

Вернемся теперь к двухслойной модели среды. В Приложении в диффузионном приближении получено уравнение Фоккера–Планка (П.5), описывающее плотность вероятностей квадратов модулей коэффициентов отражения $W_{ij} = |R_{ij}|^2$ и содержащее в отличие от однослойной среды четыре коэффициента диффузии, которые выражаются через спектральную функцию случайного процесса $\varepsilon(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\frac{k}{2\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \Phi_\varepsilon(2\lambda k), & D_2 &= \left(\frac{k}{2} \frac{H_2}{H_0} \right)^2 \Phi_\varepsilon(2k), \\ D_3 &= \left(\frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_\varepsilon(k(1 + \lambda)), & D_4 &= \left(\frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_\varepsilon(k(1 - \lambda)). \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что для мелкомасштабных неоднородностей среды ($kl_0 \ll 1$) все коэффициенты диффузии выражаются через один, D , описываемый формулой (17''):

$$D_1 = \left(\frac{1}{\lambda} \frac{H_1}{H_0}\right)^2 D, \quad D_2 = \left(\frac{H_2}{H_0}\right)^2 D, \quad D_3 = D_4 = \frac{1}{\lambda^2} D. \quad (19')$$

Диффузионное приближение применимо при условии

$$D_i l_0 \ll 1. \quad (20)$$

При выводе уравнения (П.5) также использовалось дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что справедливо при

$$k\lambda \gg D_i. \quad (21)$$

Как упоминалось выше, в рассматриваемой задаче существует параметр δ , малость которого можно использовать для упрощения анализа задачи. Пренебрегаем в уравнении (П.5) слагаемыми второго порядка по δ , т. е. эффектами вторичного переизлучения волн. В этом приближении величины W_{11} и W_{22} статистически независимы и их плотности вероятностей $P_L(W_{11})$ и $P_L(W_{22})$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P_L(W_{11}) = & \\ = & \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1-W_{11})^2 + 2\delta(D_3+D_4)W_{11}] + D_1 \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} W_{11}(1-W_{11})^2 \right\} P_L(W_{11}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P_L(W_{22}) = & \\ = & \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1-W_{22})^2 + 2\delta(D_3+D_4)W_{22}] + D_2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} W_{22}(1-W_{22})^2 \right\} P_L(W_{22}), \end{aligned}$$

которые отличаются от уравнения (17) для однослойной модели наличием члена

$$2\delta(D_3 + D_4) \frac{\partial}{\partial W} W P_L(W).$$

Это означает, что процесс генерации λ - (или k -) волны падающей k - (или λ -) волной статистически эквивалентен включению «затухания» в исходную стохастическую задачу для падающих волн U_{11} , U_{22} (т. е. замене в уравнениях для этих волн $\tilde{\epsilon}(x) \rightarrow \tilde{\epsilon}(x) + i\delta(D_3 + D_4)$). При этом для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) существуют «стационарные» (не зависящие от L) решения уравнений (22) [2-4]:

$$P_\infty(W_{11}) = \frac{2\gamma_1}{(1-W_{11})^2} \exp\left(-\frac{2\gamma_1 W_{11}}{1-W_{11}}\right), \quad P_\infty(W_{22}) = \frac{2\gamma_2}{(1-W_{22})^2} \exp\left(-\frac{2\gamma_2 W_{22}}{1-W_{22}}\right), \quad (23)$$

где параметры

$$\gamma_1 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_1}, \quad \gamma_2 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_2} \quad (24)$$

определяют относительную роль такого «затухания» (т. е. генерации вторичных волн) по сравнению с непосредственной диффузией этих волн (т. е. многократным переотражением этих волн на неоднородностях среды). Для мелкомасштабных неоднородностей среды параметры «затухания»

$$\gamma_1 = 2\lambda \frac{H_2}{H_1}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\lambda} \frac{H_1}{H_2} \quad (24')$$

определяются только относительными толщинами слоев (для фиксированной длины λ -волны) и не зависят от статистических характеристик неоднородностей. При этом имеет место равенство $\gamma_1\gamma_2 = 4$, т. е. малость одного из параметров γ по сравнению с единицей означает большое значение для другого параметра.

Распределения вероятностей (23) позволяют вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения для падающих волн. В частности, при $\gamma_i \ll 1$ имеем

$$\langle W_{11} \rangle \approx 1 - 2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1), \quad \langle W_{22} \rangle \approx 1 - 2\gamma_2 \ln(1/\gamma_2). \quad (25)$$

В обратных предельных случаях $\gamma_i \gg 1$ получаем соответственно

$$\langle W_{11} \rangle \approx 1/2\gamma_1, \quad \langle W_{22} \rangle \approx 1/2\gamma_2. \quad (25')$$

Из сказанного выше ясно, что для достаточно большой области (L_0, L) (или предельного случая полупространства $L_0 \rightarrow -\infty$) величины $|T_{11}|^2$ и $|T_{22}|^2$ равны нулю с вероятностью 1, т. е. падающие λ - и k -волны локализованы, и их локализационные длины определяются либо коэффициентами диффузии, если диффузия действует существенно сильнее, чем «затухание», либо «затуханием» в противоположном случае. Так, если $\gamma_1 \ll 1$ ($\gamma_2 \gg 1$), то

$$l_{loc}^{(1)} = \frac{1}{D_1} = \left(\frac{\lambda H_0}{H_1} \right)^2 l_{loc}, \quad l_{loc}^{(2)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{loc}, \quad (26)$$

где l_{loc} — локализационная длина в однослойной задаче (18'). В случае выполнения обратного неравенства $\gamma_1 \gg 1$ ($\gamma_2 \ll 1$) имеем

$$l_{loc}^{(1)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{loc}, \quad l_{loc}^{(2)} = \frac{1}{D_2} = \left(\frac{H_0}{H_2} \right)^2 l_{loc}. \quad (26')$$

Нахождение статистики для W_{12} — существенно более сложная задача, так как она обусловлена корреляцией W_{12} с W_{11} , W_{22} .

Чтобы оценить средние значения коэффициентов прохождения возбуждаемых волн, воспользуемся равенствами (12'), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} 1 - \langle W_{11} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \\ 1 - \langle W_{22} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |T_{12}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Из уравнения Фоккера–Планка (П.5) видно, что для комбинаций $T_1 = 1 - W_{11} - \delta W_{12}$ и $T_2 = 1 - W_{22} - \delta W_{12}$, определяющих коэффициенты прохождения возбуждаемых волн, стационарные решения для полупространства вида $P(T_j) = \delta(T_j)$ отсутствуют. Это означает отсутствие локализации для генерируемых волн. Поскольку уравнение (П.5)

симметрично по индексам 1 и 2, среднее значение $\langle W_{12} \rangle$ также должно быть симметричным относительно этих индексов и, следовательно, с точностью до симметричных частей по крайней мере порядок величин $\langle |T_{ij}|^2 \rangle$ должен определяться порядком несимметричных частей равенств (27). Так, для асимптотического случая $\gamma_1 \ll 1$ ($\gamma_2 \gg 1$) равенства (27) в силу (25), (25') принимают вид

$$2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1) = \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \quad 1 - 1/2\gamma_2 = \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |T_{12}|^2 \rangle, \quad (28)$$

т. е.

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_1 \ln \frac{1}{\gamma_1}, \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}. \quad (29)$$

Аналогичным образом для противоположного асимптотического случая $\gamma_2 \ll 1$ ($\gamma_1 \gg 1$) получаем оценку

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}, \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_2 \ln \frac{1}{\gamma_2}. \quad (29')$$

Возвращаясь к первоначальной постановке задачи об источниках, расположенных в верхнем и нижнем слоях среды на границе области существования неоднородностей $x_0 = L$, найдем интенсивности волн на границе L_0 при $L_0 \rightarrow -\infty$, т. е. коэффициенты прохождения для этой задачи.

Рассмотрим два случая:

1. Источник находится в нижнем слое ($v_1 = 0, v_2 = 1$). В этом случае на основе равенства (7) получаем выражения

$$\langle |\psi_1(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \langle |\psi_{12}(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \frac{1}{4k^2} \frac{H_2^2}{H_0^2} \left(\frac{H_1^2}{H_0^2} \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle + \frac{H_2^2}{H_0^2} \langle |T_{12}|^2 \rangle \right), \quad (30)$$

$$\langle |\psi_2(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \langle |\psi_{22}(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \frac{1}{4k^2} \frac{H_1^2 H_2^2}{H_0^4} \left(\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle + \langle |T_{12}|^2 \rangle \right).$$

2. Источник находится в верхнем слое ($v_1 = 1, v_2 = 0$). Тогда аналогично формулам (30) получаем

$$\langle |\psi_1(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \langle |\psi_{11}(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \frac{1}{4k^2} \frac{H_1^2 H_2^2}{H_0^4} \left(\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle + \langle |T_{12}|^2 \rangle \right), \quad (30')$$

$$\langle |\psi_2(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \langle |\psi_{21}(x)|^2 \rangle|_{x=L_0} = \frac{1}{4k^2} \frac{H_1^2}{H_0^2} \left(\frac{H_2^2}{H_0^2} \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle + \frac{H_1^2}{H_0^2} \langle |T_{12}|^2 \rangle \right).$$

Таким образом, коэффициенты прохождения для волн, генерируемых источником как в верхнем, так и в нижнем слоях среды, отличны от нуля во всей среде, т. е. локализация волн не осуществляется. Конкретные же их значения определяются как отношением толщин слоев, так и параметром λ (см., например, асимптотические формулы (29), (29'), а также (24')).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы показали, что в рамках простейшей двухслойной модели среды, описываемой системой стохастических уравнений (1) со случайными неоднородностями

в нижнем слое, падающие на слой k - или λ -волны являются локализованными, как и в однослойной модели среды. При этом падающие k - или λ -волны генерируют λ - или k -волны, которые уже не локализованы, т. е. их коэффициент прохождения не стремится к нулю при увеличении размера области неоднородной среды. Для асимптотического случая полупространства оценены значения этих коэффициентов прохождения. Отсутствие локализации в этом предельном случае означает отсутствие локализации и для конечной области неоднородной среды.

Отметим, что усложнение задачи (включение неоднородностей также в верхний слой, изменение характера взаимодействия волн, изменение модели флуктуирующих параметров, например, $\varepsilon(x)$ на $d\varepsilon(x)/dx$ и т. п.) приводит к усложнению соответствующего уравнения Фоккера–Планка, изменению зависимостей статистических характеристик от геометрических параметров, но не меняет основного результата работы — отсутствия динамической локализации для волн в целом.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 95-05-14247 и 96-05-65347).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диффузионное приближение и уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей интенсивностей отраженных волн

Уравнения для интенсивностей отраженных волн могут быть получены из системы уравнений (14) ($W_{ij} = |R_{ij}|^2$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_{11}(L) &= i\bar{\varepsilon}(L) [\bar{\alpha}_2 R_{11}^* (1 - W_{11}) - 2\delta R_{11}^* R_{12} - 2\delta W_{11} R_{12} + \delta \lambda \bar{\alpha}_1 R_{11}^* R_{12}^2 - \text{c.c.}] , \\ \frac{d}{dL} W_{22}(L) &= i\bar{\varepsilon}(L) [\lambda \bar{\alpha}_1 R_{22}^* (1 - W_{22}) - 2\delta R_{22}^* R_{12} - 2\delta W_{22} R_{12} + \delta \bar{\alpha}_2 R_{22}^* R_{12}^2 - \text{c.c.}] , \quad (\text{П.1}) \\ \frac{d}{dL} W_{12}(L) &= i\bar{\varepsilon}(L) [(\bar{\alpha}_2 R_{11} + \lambda \bar{\alpha}_1 R_{22} - \delta R_{12}) W_{12} - (1 + R_{11})(1 + R_{22}) R_{12}^* - \text{c.c.}] . \end{aligned}$$

Их плотность вероятностей описывается формулой

$$P_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \langle \Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) \rangle ,$$

где функция Φ определяется равенством

$$\Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \delta(W_{11}(L) - W_{11}) \delta(W_{22}(L) - W_{22}) \delta(W_{12}(L) - W_{12})$$

и описывается уравнением Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) &= \\ &= -i\bar{\varepsilon}(L) \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [\bar{\alpha}_2 R_{11}^* (1 - W_{11}) - 2\delta R_{11}^* R_{12} - 2\delta W_{11} R_{12} + \delta \lambda \bar{\alpha}_1 R_{11}^* R_{12}^2 - \text{c.c.}] + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial W_{22}} [\lambda \bar{\alpha}_1 R_{22}^* (1 - W_{22}) - 2\delta R_{22}^* R_{12} - 2\delta W_{22} R_{12} + \delta \bar{\alpha}_2 R_{22}^* R_{12}^2 - \text{c.c.}] + \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial W_{12}} [(\bar{\alpha}_2 R_{11} + \lambda \bar{\alpha}_1 R_{22} - \delta R_{12}) W_{12} - (1 + R_{11})(1 + R_{22}) R_{12}^* - \text{c.c.}] \right\} \Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) . \quad (\text{П.2}) \end{aligned}$$

Усредним уравнение (П.2) по ансамблю реализаций случайного процесса $\bar{\varepsilon}(L)$. Для расщепления корреляций $\bar{\varepsilon}(x)$ с функциями $W_{ij}(L)$, которые являются функционалами процесса $\bar{\varepsilon}(L)$, воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова (см., например, [10])

$$\langle \bar{\varepsilon}(L)R[\bar{\varepsilon}(x)] \rangle = \int_{L_0}^L d\xi B_{\bar{\varepsilon}}(L - \xi) \left\langle \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R[\bar{\varepsilon}(x)] \right\rangle, \tag{П.3}$$

справедливой для гауссова случайного процесса с нулевым средним значением и произвольного функционала от него.

Для вычисления вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R[\bar{\varepsilon}(x)]$$

проварируем уравнения (14). Учитывая, что основной вклад в интеграл (П.3) вносит область интегрирования по ξ порядка корреляционного радиуса l_0 , в которой влияние случайных неоднородностей на динамику волн несущественно (диффузионное приближение), для вариационных производных получаем уравнения с начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{11}(L) &= 2i\lambda k \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{11}(L), \\ \frac{\delta}{i\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{11} \Big|_{L=\xi} &= [\bar{\alpha}_2(1 + R_{11})^2 - 2\delta(1 + R_{11})R_{12} + \delta\lambda\bar{\alpha}_1 R_{12}^2]_{L=\xi}, \\ \frac{d}{dL} \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{22}(L) &= 2ik \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{22}(L), \\ \frac{\delta}{i\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{22} \Big|_{L=\xi} &= [\lambda\bar{\alpha}_1(1 + R_{22})^2 - 2\delta(1 + R_{22})R_{12} + \delta\bar{\alpha}_2 R_{12}^2]_{L=\xi}, \\ \frac{d}{dL} \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{12}(L) &= ik(1 + \lambda) \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{12}(L), \\ \frac{\delta}{i\delta \bar{\varepsilon}(\xi)} R_{12} \Big|_{L=\xi} &= [(\bar{\alpha}_2(1 + R_{11}) + \lambda\bar{\alpha}_1(1 + R_{22}) - \delta R_{12})R_{12} - (1 + R_{11})(1 + R_{22})]_{L=\xi}, \end{aligned}$$

которые легко интегрируются. Учитывая, что на этих масштабах интегрирования также

$$R_{11}(\xi) = \exp[-2i\lambda k(L - \xi)] R_{11}(L), \quad R_{22}(\xi) = \exp[-2ik(L - \xi)] R_{22}(L),$$

$$R_{12}(\xi) = \exp[-ik(1 + \lambda)(L - \xi)] R_{12}(L),$$

выражения для вариационных производных можно записать в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{i\delta \bar{\varepsilon}(L - \xi)} R_{11} &= \\ &= \left\{ \bar{\alpha}_2 (e^{i\lambda k\xi} + e^{-i\lambda k\xi} R_{11})^2 - 2\delta (e^{-ik(1-\lambda)\xi} + e^{-ik(1+\lambda)\xi} R_{11}) R_{12} + \delta\lambda\bar{\alpha}_1 e^{-2ik\xi} R_{12}^2 \right\}, \\ \frac{\delta}{i\delta \bar{\varepsilon}(L - \xi)} R_{22} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \lambda \bar{\alpha}_1 (e^{ik\xi} + e^{-ik\xi} R_{22})^2 - 2\delta (e^{ik(1-\lambda)\xi} + e^{-ik(1+\lambda)\xi} R_{22}) R_{12} + \delta \bar{\alpha}_2 e^{-2i\lambda k\xi} R_{12}^2 \right\}, \\
 &\frac{\delta}{i\delta\bar{\varepsilon}(L-\xi)} R_{12} = \\
 &= \left\{ - (e^{i\lambda k\xi} + e^{-i\lambda k\xi} R_{11}) (e^{ik\xi} + e^{-ik\xi} R_{22}) + \right. \\
 &\left. + \bar{\alpha}_2 (1 + e^{-2i\lambda k\xi} R_{11}) R_{12} + \lambda \bar{\alpha}_1 (1 + e^{-2ik\xi} R_{22}) R_{12} - \delta e^{-ik(1+\lambda)\xi} R_{12}^2 \right\}. \quad (\text{П.4})
 \end{aligned}$$

В результате получаем уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial L} P_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1 - W_{11})^2 - 4\delta^2 D_4 W_{12} + 2\delta(D_3 + D_4)W_{11} - \delta^2 D_2 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12}] + \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1 - W_{22})^2 - 4\delta^2 D_4 W_{12} + 2\delta(D_3 + D_4)W_{22} - \delta^2 D_1 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12}] + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial W_{12}} [(D_1(1 - W_{11}) + D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + 2D_4) - \delta^2 D_3 W_{12}) W_{12} - D_3(1 + W_{11} W_{22}) - \\
 &- D_4(W_{11} + W_{22})] + \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} W_{11} [D_1(1 - W_{11})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12} + \delta^2 D_2 W_{12}^2] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} W_{22} [D_2(1 - W_{22})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12} + \delta^2 D_1 W_{12}^2] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial W_{12}^2} W_{12} [W_{12} (D_1 W_{11} + D_2 W_{22} + \delta^2 D_3 W_{12} - 2\delta D_3) + D_3(1 + W_{11} W_{22}) + \\
 &+ D_4(W_{11} + W_{22})] + 8\delta^2 D_3 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{22}} W_{22} W_{11} W_{12} - \\
 &- 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{12}} W_{12} W_{11} [D_1(1 - W_{11}) + 2\delta(D_3 + D_4) - 2\delta^2 D_3 W_{12}] - \\
 &\left. - 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22} \partial W_{12}} W_{12} W_{22} [D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + D_4) - 2\delta^2 D_3 W_{12}] \right\} P_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}), \quad (\text{П.5})
 \end{aligned}$$

где введены коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 2\bar{\alpha}_2^2 \int_0^\infty d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2\lambda k\xi), & D_2 &= 2(\lambda \bar{\alpha}_1)^2 \int_0^\infty d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi), \\
 D_3 &= 2 \int_0^\infty d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos[k(1 + \lambda)\xi], & D_4 &= 2 \int_0^\infty d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos[k(1 - \lambda)\xi],
 \end{aligned}$$

которые можно выразить через спектральную функцию случайного процесса $\varepsilon(x)$ согласно приведенным в тексте формулам (19).

При выводе уравнения (П.5) использовалось также дополнительное усреднение по быстроменяющимся функциям (что можно делать при выполнении условий $k\lambda \gg D_i$).

Литература

1. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
2. В. И. Кляцкин, *Метод погружения в теории распространения волн*, Наука, Москва (1986).
3. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, УФН **162**, 161 (1992).
4. V. I. Klyatskin, *Progr. in Opt.* **33**, 1 (1994).
5. D. Segurta, L. Piterbarg, and G. Reznik, *Dynamics of Atm. and Oceans* **17**, 1 (1992).
6. Дж. Педлоски, *Геофизическая гидродинамика*, Мир, Москва (1984).
7. R. E. Thomson, *J. Fluid Mech.* **70**, 267 (1982).
8. Г. М. Резник, Т. Б. Цыбанева, *Океанология* **34**, 5 (1994).
9. В. И. Кляцкин, *Изв. РАН, Физ. атмосфер. и океана* **32**, 824 (1996).
10. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1980).