

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОНА И ДЫРКИ В КВАЗИДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ЕЕ СВЯЗЬ С ТЕНЗОРОМ РАССЕЯНИЯ СВЕТА

Л. И. Коровин¹, И. Г. Ланг¹, С. Т. Павлов²

¹ Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия

² Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 октября 1996 г.,
после переработки 11 декабря 1996 г.

В линейном приближении по интенсивности возбуждающего света исследована пространственная корреляция генерированных светом электрона и дырки в квазидвумерном электронном газе в сильном магнитном поле. Корреляция обусловлена взаимодействием электронов и дырок с продольными оптическими (LO) фононами. На основе специальной диаграммной техники теория позволяет вычислить две функции распределения электронно-дырочной пары по относительному расстоянию между электроном и дыркой после испускания N фононов: во-первых, функцию, определяющую полное число пар, испустивших N фононов, и, во-вторых, связанную с тензором рассеяния света 4-го ранга в межзонном резонансном комбинационном рассеянии света. Специфика системы состоит в дискретности уровней энергии электрона и дырки. Расчет проведен для прямоугольной квантовой ямы с бесконечно высокими барьерами. Вычислены функция распределения и полное число электронно-дырочных пар до испускания фононов, а также функция распределения, соответствующая двухфононному резонансному комбинационному рассеянию света. Теория предсказывает появление в спектре возбуждения в условиях резонанса нескольких близко расположенных пиков, число которых связано с номером уровня Ландау, участвующего в оптическом переходе. Расстояние между пиками определяется константой электрон-фононной связи. Вдали от резонанса имеется один пик, интенсивность которого существенно меньше интенсивности пиков в условиях резонанса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уровни энергии электрона в квантовой яме в сильном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ямы, как известно, дискретны. При определенной ширине ямы в ней может оказаться только один уровень размерного квантования. Для широкозонного полупроводника и невырожденной зоны проводимости параболический участок спектра электрона может быть сравним с глубиной ямы. В такой ситуации спектр электрона в квантовой яме в сильном магнитном поле, перпендикулярном плоскости ямы, представляет собою систему дискретных эквидистантных уровней. Например, в прямоугольной яме глубиной 0.3 эВ и эффективной массе электрона $m_e = 0.06m_0$ (m_0 — масса свободного электрона) второй уровень размерного квантования выходит из ямы при ширине ямы $d \simeq 40 \text{ \AA}$. При циклотронной энергии $\hbar\Omega_e = \hbar|e|H/m_e c = \hbar\omega_{LO} = 0.03 \text{ эВ}$ (e — заряд электрона, H — напряженность магнитного поля, c — скорость света в вакууме, ω_{LO} — частота LO -фонона) в яме помещается

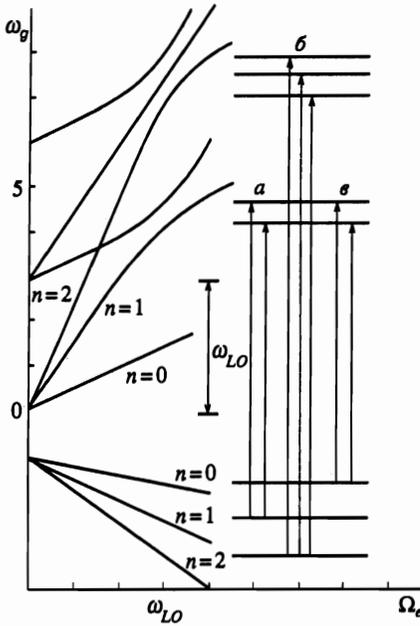


Рис. 1. Снятие вырождения уровней электрон-фононной системы в точке их пересечения для уровней Ландау $n = 0, 1, 2$. По абсциссе отложена циклотронная частота Ω_e , по ординате — энергия уровней в произвольных единицах. Справа показаны переходы электрона из валентной зоны в зону проводимости в область расщепления термов. Входной резонанс: а) $n = 1$, б) $n = 2$, выходной резонанс в) $n = 2$. Штриховой линией показан переход, не проявляющийся в двухфононном рассеянии, если выполнено условие (1). Расщепление термов в точке r не показано

6 уровней Ландау. Аналогичные оценки справедливы для дырок.
Если выполняется резонансное условие

$$\Omega_e = \omega_{LO}, \quad (1)$$

то становится возможным реальное испускание LO -фонона и переход электрона на соседний уровень Ландау (имеются в виду низкие температуры, при которых LO -фононы не возбуждены). Тем самым уровни Ландау связываются электрон-фононным взаимодействием [1, 2]. Уровень $n = 1$ связывается с уровнем $n = 0$, уровень $n = 2$ в силу эквидистантности связан с уровнями $n = 1$ и $n = 0$ (n — квантовое число Ландау). Если рассматривать общую систему, состоящую из электрона и LO -фононов, то уровни энергии такой системы, рассматриваемые как функции магнитного поля, в отсутствие взаимодействия пересекаются в точке $\Omega_e = \omega_{LO}$. По мере увеличения числа n возрастает число пересекающихся уровней. Если $n = 1$, то пересекаются два уровня: электрон с $n = 1$ и электрон с $n = 0$ + один фонон. При $n = 2$ пересекаются три уровня: электрон с $n = 1$, электрон с $n = 1$ + один фонон и электрон с $n = 0$ + два фонона и т.д. Подчеркнем, что пересечение уровней в одной точке (если $n \geq 2$) имеет место только в случае эквидистантности энергетических уровней электронного спектра. Взаимодействие с LO -фононами снимает вырождение, в результате чего появляется $n + 1$ уровней электрон-фононной системы, не пересекающихся друг с другом (рис. 1). Расстояние между соседними уровнями определяется фреilihовской константой связи α_0 , оно пропорционально $\sqrt{\alpha_0}$ [3–7].

Снятие вырождения уровней электрон-фононной системы должно проявляться, в частности, в многофононном резонансном комбинационном рассеянии света, которое является эффективным методом исследования как массивных полупроводников, так и полупроводниковых квазидвумерных структур [8–10]. Эффект заключается в появлении

в рассеянном свете серии пиков (фононных повторений) на частоте $\omega_s = \omega_l - N\omega_{LO}$, где ω_s и ω_l — частоты рассеянного и возбуждающего света, N — номер фононного повторения, равный числу испущенных в процессе рассеяния фононов [11]. Если электронный спектр непрерывен, что имеет место в объемном (3D) случае и в двумерной (2D) системе в отсутствие магнитного поля, то пики фононных повторений наблюдаются в широком интервале частот ω_l , соответствующих фундаментальному поглощению: частота должна удовлетворять неравенству $\omega_l \geq \omega_g + (N - 1)\omega_{LO}$ ($\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны). Начиная с этой частоты, происходит реальное рождение электронно-дырочных пар и реальная генерация $N - 1$ фононов. Слабая зависимость интенсивности пиков фононных повторений от N позволила наблюдать фононные повторения с большими N [8, 9, 12–14]. В системе эквидистантных уровней, каковой является квантовая яма в магнитном поле, условия наблюдения пиков фононных повторений существенно отличаются от приведенных выше. Во-первых, частоты ω_l расположены в узких интервалах, соответствующих прямому рождению электронно-дырочных пар (входной резонанс), либо прямой аннигиляции (выходной резонанс). Во-вторых, магнитное поле должно удовлетворять условию (1), чтобы была возможна реальная генерация фононов. Если $m_e \neq m_h$ (m_h — эффективная масса дырки), то условие (1) выполняется только для электронов, либо только для дырок. Таким образом, квантовая яма в сильном магнитном поле обладает высокой степенью избирательности по отношению к многофононному резонансному комбинационному рассеянию света, — сильное рассеяние имеет место в узких интервалах частот возбуждающего света и магнитных полей. Если условие реального рождения (или аннигиляции) электронно-дырочных пар не выполнено, то эффект резко уменьшается. В результате профили многофононного резонансного комбинационного рассеяния света, т. е. кривые зависимостей величин сечений рассеяния от частот ω_l и магнитного поля, содержат серии острых пиков (см., например, [15]).

Взаимодействие рожденных светом электрона и дырки с LO -фононами приводит к возникновению пространственной корреляции между ними. Корреляция обусловлена тем, что в процессе генерации фононов электрон и дырка в 3D-системе блуждают в объеме, который определяется их длинами свободного пробега [16]. В квазидвумерной системе блуждание происходит в плоскости, что резко повышает интенсивность пиков фононных повторений по сравнению с 3D-случаем [17].

В 3D-системе в сильном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, пространственная корреляция электрона и дырки, рожденных светом и затем испустивших некоторое число LO -фононов, качественно отличается от корреляции в случае $H = 0$ [18]. В классическом пределе в этой плоскости электрон и дырка движутся по круговым орбитам. Свет рождает электрон и дырку в одной точке, затем они двигаются по одной и той же орбите в противоположных направлениях. Испуская фононы, электрон и дырка переходят на другие орбиты с другими центрами. Расстояние между старым и новым центром зависит только от величины магнитного поля и волнового вектора испущенного фонона [18, 19]. Таким образом, длина свободного пробега электрона (дырки), пропорциональная константе связи электронов с фононами, не фигурирует в описании движения электронов и дырок в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Сказанное выше относится и к движению в квантовой яме, если магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости ямы.

Функция распределения по относительному расстоянию между электроном и дыркой отражает пространственную корреляцию. Эта функция, как и в других случаях,

связана с тензором рассеяния света 4-го ранга, который определяет межзонное резонансное комбинационное рассеяние света.

Функция распределения в отсутствие магнитного поля исследована в [16] для 3D-случая и в [20, 21] для квазидвумерной системы. В работе [18] вычислена функция распределения для 3D-случая в сильном магнитном поле. Рассматриваемая ниже квазидвумерная система в сильном магнитном поле весьма существенно отличается как от 3D-системы, так и от квазидвумерной системы в отсутствие магнитного поля в силу особенностей энергетического спектра электрон-фононной системы. Поэтому представляется полезным развить последовательную теорию, позволяющую вычислить функцию распределения электрона и дырки для произвольного числа испущенных фононов и учитывающую расщепление термов электрон-фононной системы.

В разд. 2 формулируется модель квантовой ямы, которая рассматривается в качестве примера квазидвумерной системы, дается определение волновой функции электронно-дырочных пар после испускания N фононов и излагаются правила диаграммной техники для ее вычисления. В разд. 3 и 4 вычислена функция распределения электронно-дырочных пар до испускания фононов, а также приведена процедура перенормировки электронных линий, учитывающая снятие вырождения уровней электрон-фононной системы. В разд. 5 исследована функция распределения, соответствующая двухфононному резонансному комбинационному рассеянию света, установлена ее связь с тензором рассеяния света и проанализирована частотная зависимость. Раздел 6 посвящен обсуждению результатов работы.

2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПАРЫ ПОСЛЕ ИСПУСКАНИЯ N ЛО-ФОНОНОВ

Теория развивается для одиночной прямоугольной квантовой ямы с бесконечно высокими стенками в случае выполнения неравенства $d \ll \lambda_e, \lambda_h$ (d — ширина ямы, $\lambda_{e(h)}$ — длина свободного пробега электрона (дырки)), которое обеспечивает квантование движения электрона и дырки в направлении, перпендикулярном плоскости ямы. В этом же направлении приложено магнитное поле напряженности H . Если яма ограничена плоскостями $z = 0, z = d$, то волновая функция невзаимодействующих с фононами электрона и дырки в приближении эффективной массы имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(\mathbf{r}, z) &= \sqrt{\frac{2}{dL_x}} e^{ik_x x} \varphi_n(y) \sin \frac{\pi m z}{d}, \quad 0 \leq z \leq d, \\ \varphi_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} R_0}} \exp \left[-\frac{(y - y_0)^2}{2R_0^2} \right] H_n \left[\frac{y - y_0}{R_0} \right], \\ \Psi_\nu(\mathbf{r}, z) &= 0, \quad z < 0, \quad z > d, \end{aligned} \quad (2)$$

$H_n(x)$ — полином Эрмита. Комбинированный индекс $\nu = m, n, k_x$; индексы m (квантовое число размерного квантования), n относятся либо к электрону (m_e, n_e), либо к дырке (m_h, n_h), \mathbf{r} — двумерный вектор пространственной координаты в плоскости ямы (плоскость xy), $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$ для электрона и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_h$ для дырки, L_x — нормировочная длина. Расчет проводится в калибровке Ландау векторного потенциала $\mathbf{A} = A(-yH, 0, 0)$, $R_0^2 = \hbar/e|e|H$, $y_0 = -k_x \hbar/eH$, k_x — проекция волнового вектора на ось x , для электрона $e < 0$. Уровни энергии электрона и дырки не зависят от k_x и имеют вид

$$E_e = m_c^2 \hbar \omega_e + \left(n_c + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_e, \quad E_h = \hbar \omega_g + m_v^2 \hbar \omega_h + \left(n_v + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_h,$$

$$\omega_{e(h)} = \frac{\hbar \pi^2}{2m_{e(h)} d^2}. \quad (3)$$

При низких температурах взаимодействие с LO -фононами происходит за счет их испускания электроном или дыркой. Если выполняется условие (1), то реальный фотон испускается электроном, дырка испускает фотон в виртуальном переходе.

В стационарном режиме рассматривается система, состоящая из электронно-дырочной пары, возникшей в результате поглощения одного фотона частоты ω_l (имеется в виду прямой разрешенный переход), и испущенных электронно-дырочной парой LO -фононов. Волновая функция системы в состоянии, когда электронно-дырочной парой испущено N фононов, представляется в виде

$$\psi_N(\mathbf{r}_e, z_e, \mathbf{r}_h, z_h, Y_0) = \sum_{\{n_{ph}\}, g} \psi_{n_{ph}}^g(\mathbf{r}_e, z_e, \mathbf{r}_h, z_h) \psi_{n_{ph}}(Y_0), \quad (4)$$

где $\psi_{n_{ph}}(Y_0)$ — волновая функция системы N фононов, соответствующая состоянию, в котором числа заполнения фононов с волновыми векторами $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ равны единице, а остальные числа заполнения равны нулю. Под Y_0 понимается набор координат фотонной подсистемы. Индекс n_{ph} обозначает совокупность векторов $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$

$$\sum_{\{n_{ph}\}} \dots = \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N} \dots \quad (5)$$

В формуле (4) $\sum_g \psi_{n_{ph}}^g$ представляет собою волновую функцию электронно-дырочной пары после испускания N фононов с фиксированными значениями волновых векторов, величины $\psi_{n_{ph}}^g$ вычисляются с помощью диаграммной техники. Ее правила заключаются в следующем.

1. Фотонной линии (штриховой) соответствует волновой вектор κ_l . С этой линией ничего не сопоставляется, она определяет соотношение x -проекции волновых векторов соприкасающихся с ней электронной и дырочной линий. Предполагается, что $\kappa_l \simeq 0$.

2. Электронные — сплошные — линии расположены выше линии контура, дырочные — ниже. Им приписываются соответственно индексы $\nu_e = m_c, n_c, k_{xc}$; $\nu_h = m_v, n_v, k_{xv}$. Эти линии направлены слева направо.

3. Фононные линии — волнистые. Им приписываются волновые векторы \mathbf{q} . Фононные линии также направлены слева направо.

4. Во всех вершинах (светлые и черные точки) действует закон сохранения x -проекции волновых векторов.

5. Со светлой точкой сопоставляется множитель

$$M_l = - \left(\frac{2\pi\hbar}{V_0} \right)^{1/2} \frac{|e_l|}{m_0} (\mathbf{e}_l \mathbf{p}_{cv}) \left(\frac{u_l}{c n_l \omega_l} \right)^{1/2},$$

где V_0 — нормировочный объем, \mathbf{p}_{cv} — междузонный матричный элемент оператора импульса; \mathbf{e}_l, u_l, n_l — соответственно вектор поляризации возбуждающего света, групповая скорость и показатель преломления на частоте ω_l . Индексы электронной m и дырочной n линий, выходящих из светлой точки, совпадают. Проекция k_x противоположны по знаку.

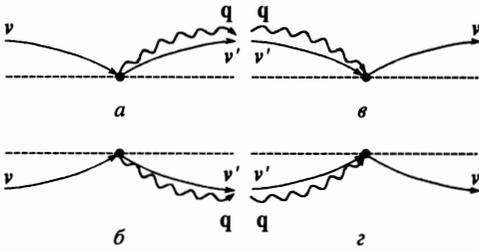


Рис. 2. Варианты расположения электронной, дырочной и фононной линий в вершине электрон-фононного взаимодействия

б. Черными точками обозначены вершины электрон-фононного и дырочно-фононного взаимодействия. Расположение линий в вершинах изображено на рис. 2. С вершинами *a* и *б* сопоставляются множители

$$\pm \mathcal{C}^* e^{\mp i\mathcal{U}} K_{n,n'}(\mp q_x, -q_y);$$

с вершинами *в* и *г* множители

$$\pm \mathcal{C} e^{\pm i\mathcal{U}} K_{n,n'}(\mp q_x, q_y);$$

(верхние знаки для *a* и *в*). Здесь

$$\mathcal{C} = \frac{i}{\hbar} C_q M_{m,m'}(q_z), \quad \mathcal{U} = \frac{R_0^2 q_y (2k_x - q_x)}{2}, \tag{6}$$

$$K_{n,n'}(v_x, v_y) = \left[\frac{\min(n!, n'!)}{\max(n!, n'!)} \right]^{1/2} e^{-v^2/4} i^{|n-n'|} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^{|n-n'|} \times \\ \times \exp \left[i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) (n - n') \right] L_{\min(n,n')}^{|n-n'|} \left(\frac{v^2}{2} \right), \\ \varphi = \arctg \frac{v_y}{v_x}, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = R_0^2 (q_x^2 + q_y^2), \tag{7}$$

$L_{\beta}^{\alpha}(x)$ — присоединенный полином Лагерра;

$$M_{m,m'}(q_z) = \frac{2}{d} \int_0^d dz e^{iq_z z} \sin \frac{\pi m z}{d} \sin \frac{\pi m' z}{d}, \tag{8}$$

$$C_q = -i\hbar\omega_{LO} \left[\frac{4\pi\alpha_0 l_{e(h)}^3}{V_0} \right]^{1/2} \frac{1}{q l_{e(h)}}, \\ l_{e(h)} = \left(\frac{\hbar}{2m_{e(h)}\omega_{LO}} \right)^{1/2}, \quad \alpha_0 = \alpha_{e(h)} = \frac{e^2(\kappa_{\infty}^{-1} - \kappa_0^{-1})}{2\hbar\omega_{LO} l_{e(h)}}, \tag{9}$$

$\kappa_{0(\infty)}$ — статическая (высоочастотная) диэлектрическая проницаемость кристалла, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ — волновой вектор фонона.

7. С каждым вертикальным сечением номера *j* правее светлой точки сопоставляется множитель $(\omega_g - E_j/\hbar + i\delta)^{-1}$, E_j — сумма энергий линий, пересекающих сечение.

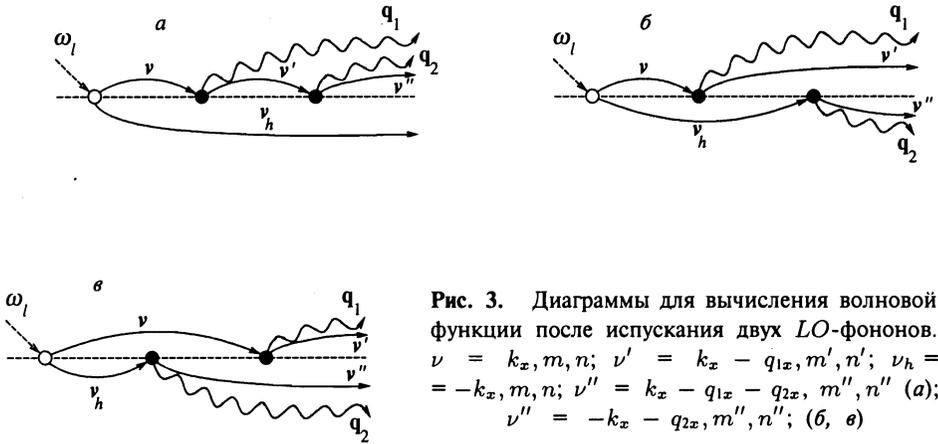


Рис. 3. Диаграммы для вычисления волновой функции после испускания двух LO -фононов. $\nu = k_x, m, n$; $\nu' = k_x - q_{1x}, m', n'$; $\nu_h = -k_x, m, n$; $\nu'' = k_x - q_{1x} - q_{2x}, m'', n''$ (а); $\nu'' = -k_x - q_{2x}, m'', n''$; (б, в)

8. Электронной и дырочной линии со свободным концом и индексом ν приписывается волновая функция (2).

9. Проводится суммирование по всем индексам электронных и дырочных линий.

При расчете тензора рассеяния света и функции распределения в квазидвумерной системе в отсутствие магнитного поля в теории фигурирует обратное время жизни γ , определяющее нестационарность электронных и дырочных состояний. Величина γ определяется взаимодействием электронов и дырок с LO -фононами и пропорциональна α_0 . Рассматриваемая система состоит из дискретных уровней и фононов с фиксированной частотой ω_{LO} , так как пространственная дисперсия и затухание LO -фононов не учитываются. В этом случае взаимодействие с фононами не приводит к нестационарности состояний, а только к снятию вырождения уровней электрон-фононной системы в точке $\Omega_e = \omega_{LO}$. Введенный в п. 7 правил параметр δ характеризует нестационарность состояний, связанную с другими процессами.

Примеры диаграмм для вычисления волновой функции после испускания двух фононов приведены на рис. 3. Индекс g обозначает вид диаграммы. Подчеркнем, что диаграмма вида g характеризуется определенной последовательностью волновых векторов q_i . Например, если в диаграмме a переставить местами q_1 и q_2 , получившаяся диаграмма будет соответствовать другому индексу g . Таким образом, каждая диаграмма с фиксированной расстановкой N фононных волновых векторов генерирует $N!$ диаграмм, отличающихся от исходной только их перестановкой. В диаграммах важна также очередность испускания фононов электроном и дыркой, поэтому диаграммы $б$ и $в$ соответствуют разным g .

3. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПАРЫ И ЕЕ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДО ИСПУСКАНИЯ ФОНОНОВ

Рассмотрим наиболее простой и наглядный пример, когда рожденная светом электронно-дырочная пара не испустила ни одного фонона. Такому процессу соответствует единственная диаграмма, изображенная на рис. 4а. В соответствии с правилами волновая функция электронно-дырочной пары представляется выражением

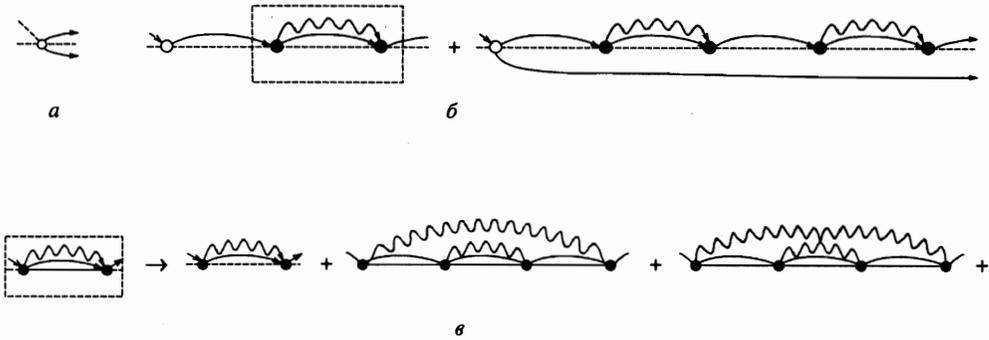


Рис. 4. Диаграммы, перенормирующие электронную линию: а — простейшая диаграмма, б — перенормировка для уровня Ландау $n = 1$, в — для уровня Ландау $n = 2$

$$\psi_{N=0} = \psi_0 = \frac{M_l}{\hbar} \sum_{k_x, m, n} \frac{1}{\Delta_{m,n}^{m,n} + i\delta} \psi_{\nu_e}(\mathbf{r}_e, z_e) \psi_{\nu_h}(\mathbf{r}_h, z_h). \tag{10}$$

В величине

$$\Delta_{m,n}^{m,n} = \omega_l - \omega_g - m^2(\omega_e + \omega_h) - (n + 1/2)(\Omega_e + \Omega_h) \tag{11}$$

нижние индексы относятся к дырке, а верхние — к электрону. В (10) учтены правила отбора в светлой точке: $k_{xh} = -k_{xe}$, $m_c = m_v = m$, $n_c = n_v = n$. Используя явный вид (2) волновых функций $\psi_{\nu_e}, \psi_{\nu_h}$, а также формулу

$$\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \sum_{k_x} \exp(ik_x x) \exp\left[-\frac{(y_e - y_0)^2}{2R_0^2}\right] \exp\left[-\frac{(y_h - y_0)^2}{2R_0^2}\right] \times \\ \times H_n\left(\frac{y_e - y_0}{R_0}\right) H_n\left(\frac{y_h - y_0}{R_0}\right) = \frac{L_x}{2\pi R_0} \exp\left(i\chi_0 - \frac{r^2}{4R_0^2}\right) L_n\left(\frac{r^2}{2R_0^2}\right), \tag{12}$$

получим, что

$$\psi_0(\mathbf{r}_e, z_e, \mathbf{r}_h, z_h) = \frac{M_l}{\pi \hbar d R_0^2} \exp\left(i\chi_0 - \frac{r^2}{4R_0^2}\right) \times \\ \times \sum_{m,n} \sin\left(\frac{\pi m z_e}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi m z_h}{d}\right) \frac{L_n(r^2/2R_0^2)}{\Delta_{m,n}^{m,n} + i\delta}, \tag{13}$$

$L_n(x)$ — полином Лагерра. Использованы также обозначения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h, \quad y_0 = R_0^2 k_x, \quad \chi_0 = \frac{xY}{R_0^2} - \frac{(m_e - m_h)xy}{2R_0^2 M}, \\ \mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{r}_e + m_h \mathbf{r}_h}{M}, \quad \mathbf{R} = (X, Y), \quad M = m_e + m_h.$$

Функция распределения электрона и дырки по относительному расстоянию между ними в плоскости квантовой ямы после испускания N фононов определяется как [21, 18]

$$F_N(\mathbf{r}) = \int_0^d dz_e \int_0^d dz_h \int d^2R \int dY_0 |\psi_N|^2. \quad (14)$$

Интегрирование по переменным z_e и z_h дает множитель $(d/2)^2 \delta_{m,m'}$ ($\delta_{m,m'}$ — символ Кронекера), а интегрирование по X и Y дает нормировочную площадь S_0 . В результате в случае $N = 0$ получаем

$$F_0(\mathbf{r}) = \frac{|M_l|^2 S_0}{(2\pi\hbar R_0^2)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \sum_m \left| \sum_n \frac{L_n(r^2/2R_0^2)}{\Delta_{m,n}^{m,n} + i\delta} \right|^2. \quad (15)$$

Физический смысл функции $F_0(\mathbf{r})$ состоит в следующем: $F_0(\mathbf{r})d^2r$ есть число пар, не испустивших ни одного фотона в интервале от \mathbf{r} до $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, нормированное на один фотон возбуждающего света. Из формул (13) и (15) видно, что на частоте, удовлетворяющей условию

$$\Delta_{m,n}^{m,n} = 0, \quad (16)$$

функции ψ_0 и F_0 обращаются в бесконечность, если $\delta \rightarrow 0$. Если частота ω_l достаточно велика, условие (16) может выполняться при фиксированных значениях m и n . Тогда в многократной сумме в (15) главным является одно слагаемое, и $F_0(\mathbf{r}) \equiv F_{0n}(\mathbf{r})$ принимает вид

$$F_{0n}(\mathbf{r}) = \frac{A_n(\mathbf{r})\omega_{LO}^2}{|\Delta_{m,n}^{m,n} + i\delta|^2}, \quad (17)$$

где функция

$$A_n(\mathbf{r}) = \frac{|M_l|^2 S_0}{(2\pi\hbar\omega_{LO} R_0^2)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \left[L_n\left(\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \right]^2 \quad (18)$$

определяет координатную зависимость функции распределения, $A_n(\mathbf{r})$ была введена в работе [18], в которой исследовалась функция распределения в сильном магнитном поле в 3D-случае. Функция $A_n(\mathbf{r})$ не зависит от квантового числа m . Вдали от условия (16) существенный вклад вносят многие члены суммы — это случай виртуального рождения электронно-дырочной пары, когда ω_l не соответствует частоте реального перехода. Из (17) видно, что F_0 как функция ω_l представляет собою один лоренцовский пик, который расходится в точке $\Delta_{m,n}^{m,n} = 0$ как δ^{-2} .

Для получения эффекта расщепления пика необходимо перенормировать электронную линию в диаграмме рис. 4а. Дырочная линия не перенормируется, так как в случае выполнения резонансного условия (1) только электрон может испустить фотоны в реальном переходе. Как будет показано ниже, перенормировка зависит от номера n уровня Ландау, на котором оказываются электрон и дырка после рождения электронно-дырочной пары. Поэтому будем рассматривать процедуру перенормировки для каждого n отдельно, начиная с $n = 1$. Если $n = 0$, то перенормировка приводит только к сдвигу пика на малую величину, пропорциональную α_0 .

Если $n = 1$ и частота ω_l выбрана таким образом, что $\Delta_{m,1}^{m,1}$ мало, то, оставляя в (10) резонансное слагаемое, для ψ_0 получим выражение

$$\psi_0 = \frac{M_l}{\hbar} \sum_{k_x} \frac{\psi_{\nu_h} \psi_{\nu_e}}{\Delta_{m,1}^{m,1} + i\delta} \quad (19)$$

($\nu_e = k_x, m, 1; \nu_h = -k_x, m, 1$), где m имеет значение, определяемое условием (16). Электронная линия и соответствующая ей функция ψ_{ν_e} перенормируется суммированием ряда диаграмм, изображенных на рис. 4б. Этот ряд состоит из диаграмм наибольшей расходимости по параметру α_e/δ^2 . Если учесть, что уровни энергии не зависят от k_x , а во всех вершинах выполняется закон сохранения x -проекций волновых векторов, то для вычисления перенормированных функций получается простое уравнение

$$\bar{\psi}_{\nu_e} = \psi_{\nu_e} + \sum_{m',n'} C_{1,n'}^{m,m'} (\Delta_{m,1}^{m',n'} - \omega_{LO} + i\delta)^{-1} (\Delta_{m,1}^{m,1} + i\delta)^{-1} \bar{\psi}_{\nu_e}, \quad (20)$$

где

$$C_{n,n'}^{m,m'} = \hbar^{-2} \sum_{q_x, q_z} |C_q|^2 |M_{m,m'}(q_z)|^2 |K_{n,n'}(-q_x, -q_y)|^2. \quad (21)$$

В сумме по m', n' в (20) главным является одно слагаемое, соответствующее малому значению величины $\Delta_{m,1}^{m',n'} - \omega_{LO}$. Условие (16) в случае $n = 1$ определяет частоту оптического перехода для заданного m :

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{3}{2}(\Omega_e + \Omega_h). \quad (22)$$

Чтобы на этой частоте обращалась в нуль величина $\Delta_{m,1}^{m',n'} - \omega_{LO}$, должно быть выполнено условие

$$(m^2 - m'^2)\omega_e + (n - n')\Omega_e - \omega_{LO} = 0. \quad (23)$$

Так как $\Omega_e = \omega_{LO}$, m, n — целые числа, а отношение ω_e/Ω_e произвольно, то (22) выполняется, если $m' = m, n' = n - 1 = 0$, иными словами суммирование по квантовым числам m', n' в (20) исчезает. Подставляя $\bar{\psi}_{\nu_e}$ в (19) и суммируя по k_x с использованием формулы (12), получим для перенормированной волновой функции электронно-дырочной пары выражение

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0 &= \frac{M_l}{\pi \hbar d R_0^2} \exp\left(i\chi_0 - \frac{r^2}{4R_0^2}\right) \sin\left(\frac{\pi m z_e}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi m z_h}{d}\right) \times \\ &\times L_1\left(\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \left[\Delta_{m,1}^{m,1} - \frac{\eta \omega_{LO}^2 F(1,0)}{\Delta_{m,1}^{m,1} + \Omega_e - \omega_{LO} + i\delta} + i\delta \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Коэффициенты $F(n, n-1)$ ($n = 1, 2, \dots$) определяются как

$$\begin{aligned} F(n, n-1) &= \eta^{-1} \omega_{LO}^{-2} C_{n,n-1}^{m,m}, \quad \eta = \frac{\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{\Omega_e}{\omega_{LO}}}, \\ F(n, n-1) &= n^{-1} \int_0^\infty du \sqrt{u} \mathcal{F}_m(\beta \sqrt{u}) e^{-u} [L_{n-1}^1(u)]^2, \quad \beta = \frac{d}{l_H}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathcal{F}_m(x) = \frac{8}{x^2 + 4\pi^2 m^2} \left[\frac{3x}{8} + \frac{\pi^2 m^2}{x} - \frac{4\pi^4 m^4 (1 - e^{-x})}{x^2(x^2 + 4\pi^2 m^2)} \right], \quad l_H = \frac{R_0}{\sqrt{2}}. \quad (26)$$

Сравнивая (24) с перенормированной функцией ψ_0 , видим, что перенормировка заключается в изменении резонансного знаменателя в (13). В резонансе, когда $\Delta_{m,1}^{m,1} = 0$ и $\Omega_e = \omega_{LO}$, эта добавка $\sim \eta/\delta$, она существенна, если $\eta/\delta \gg 1$.

Функция распределения, соответствующая $\tilde{\psi}_0$ и относящаяся к уровню Ландау $n = 1$, согласно (14) имеет вид (в дальнейшем индекс m , если это не приводит к недоумению, опускается):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{01}(\Gamma) &= A_1(\Gamma)[(\Gamma + \lambda)^2 + \delta^2]\Phi_1(\Gamma), \\ \Phi_1(\Gamma) &= \left[\left(\Gamma + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \eta F(1,0) + \delta^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \left(\Gamma + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \eta F(1,0) + \delta^2} \right)^2 + (2\Gamma + \lambda)^2 \delta^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

В (27) введены обозначения:

$$\Gamma_n = \Delta_{m,n}^{m,n}/\omega_{LO} \quad (28)$$

(безразмерная частота ω_l , отсчитанная от величины $\omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + (n+1/2)(\Omega_e + \Omega_h)$) и

$$\lambda = \frac{\Omega_e - \omega_{LO}}{\omega_{LO}} \quad (29)$$

(безразмерное отклонение циклотронной частоты электрона от резонансного значения).

Функции \tilde{F}_{01} соответствует индекс $n = 1$, поэтому в ней

$$\Gamma_{n=1} = \Gamma = \frac{1}{\omega_{LO}} \left[\omega_l - \omega_g - m^2(\omega_e + \omega_h) - \frac{3}{2}(\Omega_e + \Omega_h) \right].$$

Из (27) следует, что \tilde{F}_{01} в случае $\delta = 0$ содержит два сингулярных пика, которые обращаются в бесконечность в точках $\Gamma = (1/2)(\pm\sqrt{\lambda^2 + 4\eta F(1,0)} - \lambda)$, расстояние между этими точками равно $\sqrt{\lambda^2 + 4\eta F(1,0)}$. В резонансе $\lambda = 0$, и это расстояние (расщепление пика) равно $2\sqrt{\eta F(1,0)}$. При $\lambda = 0$ в предельном случае $\eta F(1,0) \gg \delta^2$ имеются два пика, их значения в максимумах $\sim (2\delta)^{-2}$. В другом предельном случае, $\eta F(1,0) \ll \delta^2$, имеется один пик, максимум которого расположен в точке $\Gamma = 0$. Частотная зависимость функции \tilde{F}_{01} представлена на рис. 5 (кривые 1 и 3).

4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПАРЫ ДЛЯ ЧИСЕЛ ЛАНДАУ $n \geq 2$

Если электрон и дырка после поглощения фотона оказываются на уровнях Ландау $n_c = n_v = 2$, то проделанная в разд. 3 перенормировка электронной линии недостаточна, так как в ней не учтены все диаграммы наибольшей расходимости. Действительно,

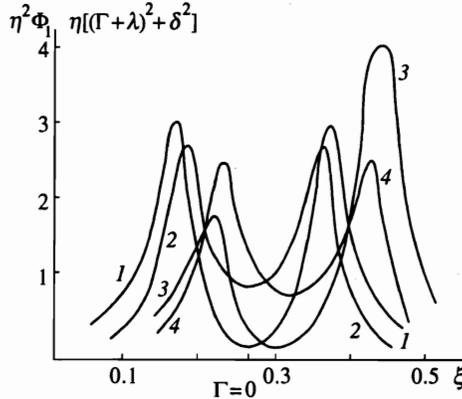


Рис. 5. Зависимость функций $\eta[(\Gamma + \lambda)^2 + \delta^2]\Phi_1(\Gamma)$ (кривые 1, 3) и $\eta^2\Phi_1(\Gamma)$ (формула (49), кривые 2, 4) от безразмерной частоты

$$\xi = \frac{1}{\omega_{LO}} \left[\omega_l - m^2(\omega_e + \omega_h) - \frac{3\omega_{LO}}{2} \right] = \Gamma + \frac{3}{2} \left[\lambda + \frac{(1 + \lambda)m_e}{m_h} \right],$$

$m_e/m_h = 0.176; \delta = 0.03; \eta F(1, 0) = 0.01$. Кривые 1, 2 — $\lambda = 0$, кривые 3, 4 — $\lambda = 0.05$. Кривые, соответствующие $\lambda = -0.05$, получаются из кривых 3, 4 зеркальным отражением относительно точки $\Gamma = 0$ ($\xi = 0.265$)

находясь на уровне $n = 2$, электрон может в резонансных условиях испустить два фотона, переходя последовательно на уровни $n = 1$ и $n = 0$, в то время как в ряде диаграмм рис. 4а учтен один резонансный переход $n = 1 \rightarrow n = 0$. Поэтому перенормировка линии $n = 2$ заключается в замене каждого фрагмента диаграммы рис. 4б (один из таких фрагментов заключен в штриховой прямоугольник) на ряд диаграмм, приведенный на рис. 4в. Правило отбора существенных диаграмм заключается в следующем: если электрон в результате рождения пары оказался на уровне Ландау n , то существенными являются диаграммы, в которых любое вертикальное сечение пересекает не более n фоновых линий. Как видно из рис. 4в, начиная с $n = 2$, перенормируются как электронные линии, так и вершинные части (диаграммы с пересечением фоновых линий). Ниже излагается приближенная теория, которая не учитывает перенормировку вершинных частей. Можно показать, что пренебрежение диаграммами с пересечением фоновых линий не меняет качественно картину расщепления пика. Изменяются лишь численные множители, которые входят в выражения, определяющие расстояния между пиками [22].

После пренебрежения перенормировкой вершин суммирование существенных диаграмм упрощается, так как ряды сводятся к геометрической прогрессии. В результате вблизи резонанса для функции распределения получаем выражение

$$\tilde{F}_{02}(\mathbf{r}) = A_2(\mathbf{r}) \left| \Gamma + i\delta - \frac{\eta F(2, 1)}{\Gamma + \lambda + i\delta - \eta F(1, 0)/(\Gamma + 2\lambda + i\delta)} \right|^{-2}, \quad \Gamma = \Gamma_2, \quad (30)$$

которое представляет собою конечную непрерывную дробь с двумя звеньями. На частотной зависимости \tilde{F}_{02} имеются три пика, их интенсивности зависят от параметра λ .

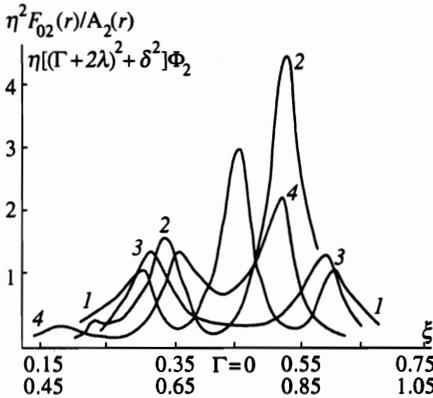


Рис. 6. Зависимость функции $\eta \bar{F}_{02}(\mathbf{r})/A_2(\mathbf{r})$ (кривые 1, 2) и $\eta^2[(\Gamma+2\lambda)^2+\delta^2]\Phi_2$ (кривые 3, 4) от безразмерной частоты $\xi = \Gamma + 5[\lambda + (1+\lambda)m_e/m_h]/2$, $\eta = 0.01$, $\delta = 0.03$, $m_e/m_h = 0.176$; 1, 3 — $\lambda = 0$; 2, 4 — $\lambda = 0.1$. Верхняя шкала ξ для кривых 1, 3, нижняя — для кривых 2, 4. $F(1, 0) = 0.886$, $F(2, 1) = 0.775$

В резонансе $\lambda = 0$, и \bar{F}_{02} принимает вид

$$\bar{F}_{02}(\mathbf{r}) = \frac{A_2(\mathbf{r})|(\Gamma + i\delta)^2 - \eta F(1, 0)|^2}{|\Gamma + i\delta|^2|(\Gamma + i\delta)^2 - \eta [F(2, 1) + F(1, 0)]|^2}, \quad (31)$$

откуда следует, что пики в резонансе расположены на частотах $\Gamma = 0$, $\Gamma = \pm \sqrt{\eta(F(2, 1) + F(1, 0))}$. Учет перенормировки вершин изменит только число $\sqrt{F(2, 1) + F(1, 0)}$, пропорциональность параметру $\sqrt{\eta}$ сохраняется, положение центрального пика не изменяется. Частотная зависимость функции (30) приведена на рис. 6. Из сравнения формул (30) и (24) видно, что перенормировка для уровня $n = 2$ приводит к появлению в знаменателе дополнительного звена непрерывной дроби. Обобщение на произвольное n в излагаемой приближенной теории очевидно: $\bar{F}_{0n}(\mathbf{r})$ представляет собою конечную непрерывную дробь с n звеньями

$$\bar{F}_{0n}(\mathbf{r}) = A_n(\mathbf{r})/D_n, \quad (32)$$

$$D_n = \left| \Gamma + i\delta - \frac{\eta F(n, n-1)}{\Gamma + \lambda + i\delta - \eta F(n-1, n-2) / \left\{ \Gamma + 2\lambda + i\delta - \dots - (\eta F(1, 0) / (\Gamma + n\lambda + i\delta)) \right\}} \right|^2, \quad (33)$$

$$\Gamma = \Gamma_n.$$

\bar{F}_{0n} как функция частоты имеет $n + 1$ пиков, расстояние между которыми в резонансе $\sim \sqrt{\eta}$.

Поскольку электронно-дырочная пара не испускала фононов, волновую функцию (24) можно рассматривать как наложение двух двумерных облаков — электронного и дырочного — с общим центром. С увеличением n расстояние от центра облака, на котором можно обнаружить электрон и дырку с наибольшей вероятностью, увеличивается. С увеличением размера облаков растет вероятность появления электронно-дырочных пар с большими относительными расстояниями, так как электрон и дырка в большом облаке могут расходиться на дальние расстояния. Увеличение расстояния между электроном и дыркой с ростом n видно из формулы (32) — область, примыкающая к центральному максимуму дает все меньший вклад в полное число пар (см. ниже). Координатная зависимость функции распределения показана на рис. 7. В пределе больших n можно ввести вместо облаков круговые орбиты. Заметим, что функция

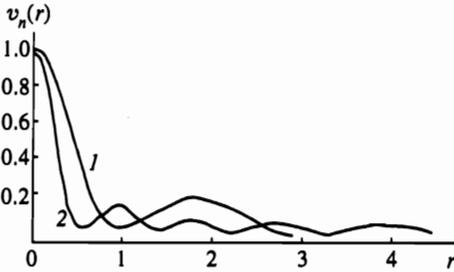


Рис. 7. Зависимость функции $v_n(r) = (2\pi R_0^2 \hbar \omega_{LO})^2 A_n(r) / |M_i|^2 S_0$ от координаты r для различных значений квантовых чисел n . Кривая 1 — $n = 1$, кривая 2 — $n = 4$

$A_n(r)$ пропорциональна квадрату радиальной волновой функции частицы в однородном магнитном поле в цилиндрических координатах [23].

В заключение раздела вычислим полное число пар \mathcal{N}_{0n} , не испустивших ни одного фонона, которое определяется формулой

$$\mathcal{N}_{0n} = \int dr \bar{F}_{0n}(r), \quad (34)$$

\mathcal{N}_{0n} есть полное число пар, возникших на уровнях с квантовыми числами m, n в результате поглощения возбуждающего света и не испустивших ни одного фонона при стационарном освещении, рассчитанное на один фотон плотности падающего потока фотонов. Подставляя функцию распределения (32) в (34), получим

$$\mathcal{N}_{0n} = \frac{|M_i|^2 S_0}{2\pi R_0^2 \hbar^2 \omega_{LO}^2} D_n^{-1}. \quad (35)$$

Частотная зависимость \mathcal{N}_{0n} совпадает с таковой для \bar{F}_{0n} . Полезно также ввести нормированную на единицу функцию распределения f_{0n} . Она имеет вид

$$f_{0n}(r) = \frac{1}{2\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \left[L_n\left(\frac{r^2}{2R_0^2}\right) \right]^2. \quad (36)$$

5. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ДВУХФОНОННОМУ РАССЕЯНИЮ

Функция распределения электронно-дырочных пар после испускания двух фононов определяется волновой функцией (4) с $N = 2$. Диаграммы для вычисления функций $\psi_{n_{ph}}^g$ изображены на рис. 3. Здесь индекс $g = 1, 2, 3$, а набор $n_{ph} = \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. В многофононном резонансном комбинационном рассеянии света один переход с испусканием фонона является виртуальным, поэтому учитываются диаграммы, в которых дырка виртуально испускает фонон. Следует иметь в виду, что с каждой диаграммой сопоставляются два выражения, различающиеся перестановкой фононных векторов \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , т. е. фактически индекс g пробегает 6 значений. В соответствии с правилами $\psi_{n_{ph}}^g$ можно представить в виде

$$\psi_{n_{ph}}^g = e^{ix} \sum_{m, m''} \sum_{n, n''} \sigma^{(g)} K_{\alpha, \beta}(\pm v_x, -v_y) \sin\left(\frac{\pi m'' z_e}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi m z_h}{d}\right). \quad (37)$$

Функция $K_{\alpha,\beta}(\pm v_x, v_y)$ определена формулами (7),

$$v_x = \frac{y}{R_0} - R_0 Q_x, \quad v_y = -\frac{x}{R_0} + R_0 Q_y. \quad (38)$$

В $K_{\alpha,\beta}(\pm v_x, -v_y)$ для $g = 1$ выбирается знак + и $\alpha = n'', \beta = n$, для $g = 2, 3$ — знак минус и $\alpha = n, \beta = n''$. Фаза χ является общей для трех диаграмм, изображенных на рис. 2, она равна

$$\chi = -Q_x X - Q_y Y + \frac{xY}{R_0^2} + \Phi(\mathbf{r}),$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{m_e - m_h}{2M} \left(Q_x x + Q_y y - \frac{xy}{R_0^2} \right), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q}_{1\perp} + \mathbf{q}_{2\perp}, \quad \mathbf{q}_{i\perp} = (q_{ix}, q_{iy}). \quad (39)$$

Эта фаза зависит от числа испущенных фононов N только через проекцию суммы волновых векторов испущенных фононов на плоскость квантовой ямы $\mathbf{Q} = \sum_i^N \mathbf{q}_{i\perp}$ и присутствует в каждой диаграмме с N внешними фононными линиями. Функции

$$\sigma^{(g)} \equiv \sigma_{m'',m,n'',n}^{(g)} = \sigma_{m'',m,n'',n}^{(g)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \sigma_{m'',m,n'',n}^{(g)}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1), \quad (40)$$

где

$$\sigma_{m'',m,n'',n}^{(1)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -\frac{M_1 C_{q_1}^* C_{q_2}^*}{\pi \hbar^3 R_0^2 d} \exp \left[\frac{i R_0^2}{2} (q_{1x} q_{2y} - q_{2x} q_{1y}) \right] \times$$

$$\times \sum_{m',n'} \frac{M_{m,m'}(-q_{1z}) M_{m',m''}(-q_{2z}) K_{n,n'}(-q_{1x}, -q_{1y}) K_{n'',n''}(-q_{2x}, -q_{2y})}{(\Delta_{m,n}^{m',n'} + i\delta)(\Delta_{m,n}^{m',n'} - \omega_{LO} + i\delta)(\Delta_{m,n}^{m'',n''} - 2\omega_{LO} + i\delta)}, \quad (41)$$

$$\sigma_{m'',m,n'',n}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{M_1 C_{q_1}^* C_{q_2}^*}{\pi \hbar^3 R_0^2 d} \exp \left[-\frac{i R_0^2}{2} (q_{1x} q_{2y} - q_{2x} q_{1y}) \right] \times$$

$$\times \sum_{m',n'} \frac{M_{m',m''}(-q_{1z}) M_{m',m}(-q_{2z}) K_{n',n}(q_{2x}, -q_{2y}) K_{n'',n''}(-q_{1x}, -q_{1y})}{(\Delta_{m',n'}^{m',n'} + i\delta)(\Delta_{m',n'}^{m',n'} - \omega_{LO} + i\delta)(\Delta_{m',n}^{m'',n''} - 2\omega_{LO} + i\delta)}. \quad (42)$$

Функция $\sigma_{m'',m,n'',n}^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ отличается от (42) заменой $\Delta_{m',n'}^{m',n'} - \omega_{LO}$ на $\Delta_{m',n}^{m',n'} - \omega_{LO}$. При выводе формул (41) и (42) использовано соотношение

$$\sum_{k_x} \exp [i(x - R_0^2 q_y) k_x] \varphi_n(y_h - R_0^2 k_x) \varphi_{n'} [y_e - R_0^2 (k_x - q_x)] =$$

$$= \frac{L_x}{2\pi R_0^2} \exp \left[i \frac{(x - R_0^2 q_y)(y_e + y_h + R_0^2 q_x)}{2R_0^2} \right] K_{n',n}(v_x, -v_y).$$

Установим соответствие между функцией распределения и тензором рассеяния света. Как известно (см., например, [16]), тензор рассеяния света $S_{\alpha\gamma\beta\lambda}$ связан с вероятностью $\overline{W}_{S,N}$ излучения кванта рассеянного света в единицу времени, нормированной на один фотон возбуждающего света, формулой

$$\overline{W}_{S,N} = \frac{(2\pi)^3 u_l u_s}{V_0 c^2 n_l n_s} \omega_l \omega_s e_{s\alpha}^* e_{l\gamma} e_{s\beta} e_{l\lambda}^* S_{\alpha\gamma\beta\lambda},$$

где индекс l относится к возбуждающему свету, индекс s — к рассеянному свету, $e_{s(l)\alpha}$ — α -проекция вектора поляризации света. С другой стороны,

$$\overline{W}_{S,N} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | M_s | i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_l - \hbar\omega_s - N\hbar\omega_{LO}), \quad (43)$$

где M_s определяется формулой в п. 5 графической техники, если в ней заменить индекс l на s . Начальное состояние i определяется функцией (4), конечное — функцией

$$\psi_f = \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \delta(z_e - z_h) \psi_{n_{ph}}(Y_0),$$

оно характеризуется наличием N фононов с фиксированным набором n_{ph} и квантом света с энергией $\hbar\omega_s$. Суммирование по f в (43) означает $\sum_{\{n_{ph}\}}$. В случае $N = 2$, используя выражения (37) и (40), получим

$$\overline{W}_{S,2} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_s|^2 S_0 \sum_{m,m_1} \sum_{n,n_1} F_{2,m,m_1,m_1,m_1}^{n,n_1,n_1,n_1} \delta(\hbar\omega_l - \hbar\omega_s - N\hbar\omega_{LO}), \quad (44)$$

$$F_{2,m,m_1,m_1,m_1}^{n,n_1,n_1,n_1} = \frac{S_0 d^2}{2^3} \sum_{q_{1z}, q_{2z}} \sum_{q_{\perp}} \sum_{g, g'} \sigma_{m,m_1,n,n_1}^{(g)} \sigma_{m_1,m_1,n_1,n_1}^{(g')*}. \quad (45)$$

Введем по аналогии с [16] функцию распределения

$$F_N(\mathbf{r}, z) = \int d^2 R \int dZ \int dY_0 |\psi_N|^2, \quad z = z_e - z_h, \quad Z = \frac{m_e z_e + m_h z_h}{M},$$

которая переходит в функцию (14), если ее проинтегрировать по z . После интегрирования по \mathbf{R}, Z, Y_0 функция $F_N(\mathbf{r}, z)$ приводится к виду

$$F_N(\mathbf{r}, z) = \sum_{m,m',m_1,m_1'} \sum_{n,n',n_1,n_1'} F_{N,m,m',m_1,m_1'}^{n,n',n_1,n_1'}(\mathbf{r}) \xi_{m,m',m_1,m_1'}(z),$$

где

$$\xi_{m,m',m_1,m_1'}(z) = \frac{4}{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} dZ \rho_m \left(Z + \frac{m_h}{M} z \right) \rho_{m'} \left(Z - \frac{m_e}{M} z \right) \times \\ \times \rho_{m_1} \left(Z + \frac{m_h}{M} z \right) \rho_{m_1'} \left(Z - \frac{m_e}{M} z \right), \quad \rho_{\alpha}(x) = \sin \frac{\pi \alpha x}{d}.$$

В свою очередь $F_{N,m,m',m_1,m_1'}^{n,n',n_1,n_1'}(\mathbf{r})$ представляется в виде суммы

$$F_{N,m,m',m_1,m_1'}^{n,n',n_1,n_1'}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} F_{N,m,m',m_1,m_1'}^{n,n',n_1,n_1'}(\mathbf{r}, \mathbf{K}).$$

Вектор \mathbf{K} имеет смысл суммы волновых векторов электрона и дырки после испускания N фононов. Вектору \mathbf{K} соответствует оператор волнового вектора в магнитном поле $\hat{K}_x = -id/dX$, $\hat{K}_y = -id/dY - R_0^2 x$, собственные значения которого равны $-Q_x, -Q_y$, т. е. $\mathbf{K} = -\mathbf{Q}$ [20]. В случае $N = 2$

$$F_{2,m,m',m_1,m'_1}^{n,n',n_1,n'_1}(\mathbf{r}, \mathbf{K}) = \frac{S_0 d^2}{2^3} \sum_{q_{1z}, q_{2z}} \sum_{q_{\perp}} \sum_{g, g'} \sigma_{m', m, n', n}^{(g)} \sigma_{m'_1, m_1, n'_1, n_1}^{(g')*} \times \\ \times K_{n', n}(\pm v_x, -v_y) K_{n'_1, n_1}^*(\pm v_x, -v_y). \quad (46)$$

Выражение (46) переходит в (45), если, во-первых, $\mathbf{r} \rightarrow 0, \mathbf{K} \rightarrow 0$, т. е. $v_x \rightarrow 0, v_y \rightarrow 0$. Это приводит к условию $n' = n, n'_1 = n_1$. Во-вторых, следует потребовать совпадения индексов $m' = m, m'_1 = m_1$. Таким образом, функции $F_{2,m,m,m_1,m_1}^{n,n,n,n_1}(\mathbf{r}, \mathbf{K})$, которые входят в выражение для функции распределения $F_2(\mathbf{r}, z)$, определяют вероятность $\overline{W}_{S,2}$ (44) и тем самым тензор рассеяния. Формальное обобщение формул (45) и (46) на случай произвольных N просто. Изменится число и вид функций $\sigma^{(g)}$, и вместо множителя $S_0/2$ появится множитель $S_0/N!$. Величины $\sigma^{(g)}$ будут состоять из суммы $N!$ слагаемых, что соответствует числу перестановок в n_{ph} .

Рассмотрим представляющий наибольший интерес случай, когда частота ω_l соответствует либо входному резонансу (т. е. когда выполнено условие (16)), либо выходному резонансу (т. е. когда $\Delta_{m,n}^{m,n-2} - 2\omega_{LO} = 0$) и выполнено условие (1). Пусть $|\Delta_{m,n}^{m,n}|$ (либо $|\Delta_{m,n}^{m,n-2} - 2\omega_{LO}|$) и $|\Omega_e - \omega_{LO}| \leq \sqrt{\eta}\omega_{LO}$, что соответствует частотам и магнитным полям в области расщепления пиков. В этих условиях, как это следует из вида функций (41) и (42), наибольший вклад дает диагональная по числам Ландау парциальная функция (46). Эту функцию с попарно совпадающими индексами m в пределе $\mathbf{r} = 0, \mathbf{K} = 0$ представим в виде суммы диагональной по m (F_n^m) и недиагональной (F_n^{m,m_1}) частей. Используя явный вид величин $\sigma^{(g)}$ (41) и (42), для F_n^m получим выражение

$$F_n^m = B\eta^2 \left[\frac{Pd(n, n-1)}{|\Gamma + i\delta|^2 |\Gamma + \lambda + i\delta|^2} + \frac{P^{-1}d(n-1, n-2)(1 - \delta_{n,1})}{|\Gamma' + \lambda + i\delta|^2 |\Gamma' + 2\lambda + i\delta|^2} \right], \quad (47)$$

$$B = \frac{|M_l|^2}{(2R_0\hbar\omega_{LO})^2}, \quad P = \left(\frac{\Omega_e + \Omega_h}{\omega_{LO}} \right)^2,$$

$$d(n, n-1) = \frac{1}{n^2} \int_0^\infty du u e^{-2u} [L_{n-1}^1(u)]^4 \mathcal{F}_m^2(\beta\sqrt{u}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\Gamma = \frac{\Delta_{m,n}^{m,n}}{\omega_{LO}}, \quad \Gamma' = \Gamma + 2 \frac{\Omega_h}{\omega_{LO}}. \quad (48)$$

Можно показать, что F_n^{m,m_1} по сравнению с F_n^m содержит множитель

$$\left[\frac{\omega_{LO}}{(m^2 - m_1^2)\omega_e} \right]^2 + \left[\frac{\omega_{LO}}{(m^2 - m_1^2)\omega_h} \right]^2,$$

который $\ll 1$, если глубина квантовой ямы велика по сравнению с $\hbar\omega_{LO}$, так как выполняется неравенство $\omega_{LO} \ll \omega_{e(h)}$. Тогда достаточно учесть один уровень размерного квантования.

В формуле (47) первое слагаемое соответствует каналу прямого рождения электронно-дырочных пар (входной резонанс), оно имеет смысл, начиная с уровня Ландау $n = 1$. Второе слагаемое (канал прямой аннигиляции или выходной резонанс) дает вклад, начиная с $n = 2$, так как для $n = 1$ прямая аннигиляция электронно-дырочных пар запрещена законом сохранения квантовых чисел n . Напомним, что формула (47) справедлива в области значений $\Gamma, \Gamma' \sim \sqrt{\eta}$.

Перенормировка электронных линий проводится так же, как и в разд. 3 и 4. Если $n = 1$, то достаточно $\Gamma + i\delta$ заменить на $\Gamma + i\delta - \eta F(1, 0)(\Gamma + \lambda + i\delta)^{-1}$. В результате для \tilde{F}_1^m вместо формулы (47) получим

$$\tilde{F}_1^m = \eta^2 B P d(1, 0) \Phi_1(\Gamma). \quad (49)$$

Из (49) видно, что \tilde{F}_1^m при $\lambda = 0$ имеет два максимума, расположенных в точках $\Gamma \pm \sqrt{\eta F(1, 0)}$, так же, как и \tilde{F}_{01} в разд. 3. По мере отклонения магнитного поля от резонансного значения изменяется отношение интенсивностей пиков и их положение, что связано с изменением вклада в рассеяние расщепившихся термов. Максимумам пиков соответствуют две частоты входного резонанса

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{3}{2}(\Omega_e + \Omega_h) \pm \sqrt{\eta F(1, 0)}. \quad (50)$$

Графики функции \tilde{F}_1^m представлены на рис. 5 (кривые 2 и 4).

В случае $n = 2$ вклад в функцию \tilde{F}_2^m дают как входной, так и выходной резонансы. В первом слагаемом формулы (47) перенормируются как $\Gamma + i\delta$ (учитываются два звена непрерывной дроби), так и $\Gamma + \lambda + i\delta$ (одно звено). Во втором слагаемом перенормируется только $\Gamma + \lambda + i\delta$, которое заменяется на $\Gamma + \lambda + i\delta - \eta F(1, 0)(\Gamma + 2\lambda + i\delta)^{-1}$. Представляя \tilde{F}_2^m в виде $\tilde{F}_2^m = F_{in} + F_{out}$, получим для вкладов входного и выходного резонансов соответственно

$$F_{in} = B\eta^2 P d(2, 1) [(\Gamma + 2\lambda)^2 + \delta^2] \Phi_2(\Gamma), \quad (51)$$

$$F_{out} = B\eta^2 P^{-1} d(1, 0) \Phi_1(\Gamma + \lambda), \quad (52)$$

$$\Phi_2(\Gamma) = \{[(\Gamma - \Gamma^+)^2 + \delta^2][(\Gamma - \Gamma^0)^2 + \delta^2][(\Gamma - \Gamma^-)^2 + \delta^2]\}^{-1}, \quad (53)$$

где Γ^\pm и Γ_0 — корни уравнения третьей степени

$$\Gamma^3 + 3\lambda\Gamma^2 + [2\lambda^2 - \eta(F(1, 0) + F(2, 1))] \Gamma - 2\eta\lambda F(1, 0) = 0.$$

В F_{out} имеются, как и в случае $n = 1$, два пика, расстояние между которыми равно $(\lambda^2 + 4\eta F(1, 0))^{1/2}$. Если $\lambda \neq 0$, то F_{in} состоит из трех пиков, однако в точном резонансе центральный пик исчезает и остаются два пика, разделенные промежутком, равным $2\sqrt{\eta(F(1, 0) + F(2, 1))}$. Входному резонансу соответствуют пики на частотах ($\lambda = 0$)

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{5}{2}(\Omega_e + \Omega_h) \pm \sqrt{\eta(F(1, 0) + F(2, 1))}, \quad (54)$$

выходному — на частотах

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{5}{2}(\Omega_e + \Omega_h) - 2\Omega_h \pm \sqrt{\eta F(1, 0)}, \quad (55)$$

т. е. центры двух дублетов смещены на $2\Omega_h$. В приближении тяжелой дырки ($\Omega_h \rightarrow 0$) центры этих дублетов совпадают, и мы получаем 4 пика, центрированных относительно точки $\Gamma = 0$ [24]. Так как коэффициенты $F(n, n - 1) > 0$, то внутренние пики в этом приближении соответствуют выходному резонансу, внешние — входному. Частотная зависимость функции F_{in} представлена на рис. 6 (кривые 3, 4).

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Развитая выше теория позволяет вычислить волновую функцию электронно-дырочной пары, испустившей N LO -фононов в сильном магнитном поле и функции распределения электронно-дырочной пары по относительному расстоянию между электроном и дыркой. В сильном магнитном поле уровни энергии электрона и дырки дискретны. Это обстоятельство определяет реакцию системы на взаимодействие со светом: спектр возбуждения (зависимость интегральной интенсивности N -фононного рассеяния от частоты возбуждающего света ω_l) состоит из набора узких пиков, как в однофононном рассеянии [25]. Каждый пик соответствует переходу системы хотя бы через одно реальное промежуточное состояние, т. е. такое, энергия которого равна $\hbar\omega_l$. Это видно, например, из формул (41) и (42), в которых реальные части выражений в каждой из круглых скобок в знаменателе могут обращаться в нуль при определенных значениях ω_l . Так, если $n = 1$, то $\Delta_{m,1}^{m,1} = 0$ на частоте

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{3}{2}(\Omega_e + \Omega_h). \quad (56)$$

Другой пик расположен на частоте

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{\Omega_e}{2} + \frac{3\Omega_h}{2} - \omega_{LO}. \quad (57)$$

Если $\Omega_e \neq \omega_{LO}$, то эти два пика разнесены на $\Omega_e - \omega_{LO}$. В резонансе $\Omega_e = \omega_{LO}$, и они сливаются, однако проведенное суммирование существенных диаграмм приводит к их расщеплению на величину $\sim \sqrt{\alpha_0}$ и к резкому усилению пиков, так как в максимуме они $\sim \alpha_0/\delta^2$, а вне резонанса максимум пика $\sim \alpha_0^2/\delta^2$. Увеличение интенсивности рассеяния происходит из-за того, что в резонансе из трех промежуточных состояний системы два, а не одно, являются реальными, и только третье состояние — виртуально. В результате получается, что вероятность рассеяния $\sim \alpha_0$, а не $\sim \alpha_0^2$, как это имеет место в нерезонансном случае. Для входного резонанса два первых промежуточных состояния реальны, последнее — виртуально. В случае выходного резонанса (на частоте (55)) первое промежуточное состояние виртуально, а второе и третье — реальны. В резонансе наименьшая частота, вблизи которой происходит резкое усиление двухфононного рассеяния, определяется формулой (56). Для трехфононного рассеяния аналогичная частота равна

$$\omega_l = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{5}{2}(\Omega_e + \Omega_h). \quad (58)$$

В трехфононном рассеянии три из четырех промежуточных состояний в резонансе реальны, в результате чего интенсивность пиков по степени α_0 остается такой же, как и в двухфононном рассеянии. Это утверждение справедливо и для N -фононного рассеяния, — в условиях резонанса интенсивность пиков спектра возбуждения $\sim \alpha_0$.

В настоящем сообщении рассмотрен спектр возбуждения двухфононного рассеяния в интервале частот от минимальной (56) до частоты (58). При дальнейшем увеличении ω_l в двухфононном рассеянии участвуют уровни Ландау $n > 2$. По мере роста n увеличивается число расщепившихся компонент исходного пика. Например, если $n = 3$ (пересекаются 4 уровня электрон-фононной системы), то во входном резонансе вблизи частоты

$$\omega_l^{(3)} = \omega_g + m^2(\omega_e + \omega_h) + \frac{7}{2}(\Omega_e + \Omega_h) \quad (59)$$

в спектре возбуждения будут 4 пика. Выходной резонанс на частоте $\omega_l^{(3)} - 2\Omega_h$ связан с уровнем $n = 2$, т.е. здесь появятся два пика, так как центральный пик в резонансе отсутствует. В теории учтена конечная масса дырки. Как следствие этого, группа пиков, относящаяся к выходному резонансу, смещена на $2\Omega_h$ в сторону меньших частот относительно группы пиков входного резонанса. Интенсивность пиков, как это видно из рис. 5, 6, зависит от величины магнитного поля. Это означает, что картина расщепления будет чувствительной к непараболичности электронной зоны. При достаточно сильной непараболичности любой пик фононного повторения должен расщепиться на два пика, а для каждого уровня Ландау будет иметь место свое условие (1).

В теории предполагалось, что нестационарность уровня (однородное уширение) определяется константой, механизм образования которой не конкретизировался. Наряду с однородным уширением имеется неоднородное, которое связано как с шероховатостью границ квантовой ямы, так и с пространственной дисперсией оптических фононов. При современных методах выращивания гетероструктур шероховатостью, по-видимому, можно пренебречь. Учет же пространственной дисперсии фонона, как показано в [3], уширяет только часть расщепившихся пиков, и при слабой дисперсии ее влияние невелико. Среди механизмов однородного уширения следует отбросить упругое рассеяние, так как при нем меняется только квантовое число, от которого энергия не зависит. Остается неупругое рассеяние, которое приводит к изменению квантовых чисел m и n . В уширение пика может дать вклад и фононный ангармонизм (распад фонона).

В заключение обсудим кратко роль экситонных состояний в рассмотренных выше эффектах. Известно, что при учете кулоновского взаимодействия электрона и дырки в сильном магнитном поле возникают серии экситонных уровней, расположенных ниже каждой зоны Ландау и сбегающих к ней. В трехмерном случае [26–28] только серия, расположенная ниже зоны $n = 0$, соответствует дискретному спектру, остальные серии расположены на фоне сплошного спектра. В квазидвумерной системе [29] сплошной спектр отсутствует, и все уровни дискретны. С ростом магнитного поля H расстояние между уровнями Ландау растет линейно с H , в то время как энергия ионизации экситона $E^{cul}(H)$ растет логарифмически. Поэтому при достаточно сильных магнитных полях экситонными эффектами можно пренебречь. В рассмотренном случае кулоновской энергией можно пренебречь, если

$$\hbar\Omega_e = \hbar\omega_{LO} \gg E^{cul}(H). \quad (60)$$

Приближенно $E^{cul}(H)$ может быть представлена в виде [28]

$$E^{cul}(H) = \frac{\mu e^4}{2\kappa_0^2 \hbar^2} f(H), \quad \mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}, \quad (61)$$

где $f(H)$ слабо зависит от H . Выполнению неравенства (60) способствуют малые и большие κ_0 . Оно неплохо выполняется для материалов A_3B_5 . Учет экситонных состояний нарушает эквидистантность уровней, что выражается в появлении трех точек попарного пересечения уровней электрон-фононной системы, вместо одной точки в эквидистантном случае. Если область, в которой расположены три точки пересечения,

мала по сравнению с $\sqrt{\eta}\hbar\omega_{LO}$ (энергией расщепления уровней), то неэквидистантность мало существенна. Это условие выражается неравенством

$$\sqrt{\eta}\hbar\omega_{LO} \gg |\hbar\omega_{LO} - |E_2 - E_1||, \quad (62)$$

где E_i — энергия низшего уровня экситонной серии, относящегося к уровню Ландау i . В (62) предполагается, что $\hbar\omega_{LO} = |E_1 - E_0|$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 96-02-17115-а, № 95-02-04184-а) и Программы МНТК «Физика твердотельных наноструктур» (1-009).

Литература

1. E. J. Johnson and D. M. Larsen, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 655 (1966).
2. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, *ЖЭТФ* **53**, 1708 (1967); Письма *ЖЭТФ* **6**, 525 (1967).
3. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, Б. Э. Эшпулатов, *ФТТ* **20**, 3594 (1978).
4. Das Sarma and O. Madhukar, *Phys. Rev. B* **22**, 2823 (1980).
5. A. O. Govorov, in *Proceedings of the XIII International Conference on Raman Spectroscopy*, ed. by W. Kiefer, M. Cardona, G. Schaack, F. W. Schneider, and H. W. Schrötter, Wiley, New York (1992), p. 834; *J. Raman Spectr.* **24**, 591 (1993).
6. A. O. Govorov, *Solid State Commun.* **92**, 977 (1994).
7. G. O. Hai, F. M. Peeters, and J. T. Devreese, in *Phonons in Semiconductor Nanostructures*, ed. by I. P. Leburston, I. Pascual, and C. Sotomayor Torres, NATO ASI Series, Serie E: Applied Sciences, Vol. 236, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1993), p. 509.
8. M. Cardona, in *Light Scattering in Solids 2*, ed. by M. Cardona, G. Guntherod, Springer, Heidelberg (1982), p. 19.
9. R. M. Martin and L. M. Falicov, in *Light Scattering in Solids 1*, ed. by M. Cardona, G. Guntherod, Springer, Heidelberg (1983), p. 79.
10. T. Ruf and M. Cardona, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2289 (1989).
11. R. Merlin, G. Guntherod, and R. Humpéry, in *Physics of Semiconductors, IOP Conf. Proc.*, № 43 (1978), ed. by B. L. Wilson, Inst. of Physics and Phys. Society, London (1979), p. 852.
12. M. Yoshida, N. Ohno, M. Mitsutake et. al., *J. Phys. Soc. Jap.* **54**, 569 (1985).
13. V. T. Hou, Y. Jin, M. I. Shen et. al., *Superlattices and Microstructures* **12**, 69 (1982).
14. D. I. Mowbray, M. Cardona, and K. Ploog, *Phys. Rev. B* **43**, 11815 (1991).
15. A. Cros, A. Cantarero, and V. I. Belitsky, *Phys. Stat. Sol. (b)* **198**, 653 (1996).
16. A. V. Goltsev, Lang, S. T. Pavlov et al., *J. Phys. C* **63**, 4221 (1983).
17. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, Б. Э. Эшпулатов, Письма в *ЖЭТФ* **51**, 516 (1990); *ЖЭТФ* **99**, 1619 (1991).
18. V. I. Belitsky, M. Cardona, I. G. Lang, and S. T. Pavlov, *Phys. Rev. B* **40**, 15767 (1992).
19. И. Г. Ланг, С. Т. Павлов, А. В. Прохоров, *ЖЭТФ* **106**, 1 (1994).
20. V. I. Belitsky, A. Cantarero, S. T. Pavlov, M. Cardona, L. I. Korovin, and I. G. Lang, *Phys. Stat. Sol. (b)* **188**, 863 (1995).
21. Л. И. Коровин, И. Г. Ланг, С. Т. Павлов, *ЖЭТФ* **108**, 940 (1995).
22. Л. И. Коровин, *ФТТ* **13**, 842 (1971).
23. Л. Д. Ландау, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1963).
24. Л. И. Коровин, С. Т. Павлов, Б. Э. Эшпулатов, *ФТТ* **35**, 1562 (1993).
25. A. Cros, A. Cantarero, C. Trallero-Giner, and M. Cardona, *Phys. Rev. B* **46**, 12627 (1992).
26. R. J. Elliot and R. J. Loudon, *J. Phys. Chem. Solids* **15**, 196 (1960); **8**, 385 (1959).
27. H. Hasegawa and R. E. Howard, *J. Phys. Chem. Solids* **21**, 179 (1962).
28. А. Г. Жилич, Б. С. Монозон, *ФТТ* **8**, 3559 (1982).
29. M. Altarelli, in *Excitons in Confined Systems, Springer Proc. in Physics* **25**, 170 (1988).