

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

А. И. Агафонов, Э. А. Манькин

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 октября 1996 г.

Предложен метод получения релятивистского волнового уравнения для связанных состояний системы взаимодействующих заряженных частиц без учета спина. В этом уравнении используется разложение волновой функции системы по полному базису ортонормированных волновых функций вакуумных состояний для каждого типа частиц, входящих в систему. Показано, что это уравнение содержит два типа решений для системы протон + электрон. Первый тип соответствует боровским связанным состояниям. Получены точные выражения для энергии основного состояния и его боровского радиуса с учетом конечного отношения масс частиц. Предсказано влияние энергии поступательного движения системы как целого на структуру атомных уровней в лабораторной системе координат. Этот эффект обусловлен конечностью отношения m/M и приводит к снятию вырождения уровней по орбитальному моменту l и частично по его проекции. Второй тип решения представляет состояние системы с энергией связи $E_b = M + m - \sqrt{M^2 - m^2}$ и радиусом экспоненциального затухания волновой функции равным комптоновской длине волны электрона. Для полного описания этого состояния необходимо учитывать поляризацию электронного вакуума.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что последовательное описание свойств релятивистских квантовых частиц возможно только в рамках квантовой теории поля. Релятивистские эффекты велики при энергиях частиц сравнимых с их энергиями покоя. При таких энергиях может происходить рождение частиц (реальных или виртуальных), поэтому рассмотрение только заданной исходной системы частиц в общем случае неправомерно [1, 2].

Однако в некоторых задачах образование частиц можно не учитывать и использовать известные волновые уравнения для одной частицы (одночастичное приближение) или для нескольких заданных частиц [1]. Основой расчетов служат релятивистские обобщения уравнения Шредингера для свободных частиц. Для частиц со спином $1/2$ это уравнение Дирака; для частиц со спином 0 это уравнение Клейна-Гордона.

В эти уравнения входит оператор импульса частиц. Общий подход для описания частиц во внешнем электромагнитном поле состоит в замене этого оператора на обобщенный импульс, включающий потенциалы поля A , A_0 [1]. Таким образом, например, находят релятивистские поправки к атомным уровням энергий, определяющие их тонкую структуру.

Отметим, что такой подход к решению задач подобного типа (например, атомные спектры) является логически незамкнутым и его нельзя рассматривать как некоторую последовательную теорию.

В настоящей работе предлагается метод получения релятивистского волнового уравнения для системы частиц для задач, в которых можно пренебречь рождением реальных или виртуальных частиц. Этот метод основан на результатах квантовой теории рассеяния и тех идеях, которые использовались для описания глубоких примесных уровней в легированных диэлектриках [3]. При этом важными являются лишь свободные волновые функции всех типов входящих в систему частиц, потенциалы взаимодействия между частицами и их статистика.

Здесь нас не будут интересовать спиновые эффекты. В конечном счете для атома водорода они приводят к релятивистским поправкам порядка α^4 , α — постоянная тонкой структуры. Цель нашей работы состоит в том, чтобы получить релятивистское уравнение для связанных состояний системы взаимодействующих частиц, в котором учитывается полный базис ортонормированных волновых функций вакуума для каждого типа частиц, входящих в систему. При парном взаимодействии это уравнение должно обладать определенной перестановочной симметрией по отношению к параметрам любой частицы.

Ниже мы получим и исследуем уравнение для связанных состояний двух взаимодействующих заряженных частиц (протона и электрона). Мы не учитываем поляризацию электронного вакуума, которая, как известно, искажает кулоновское поле в области порядка комптоновской длины волны электрона. Потенциал взаимодействия $V(\mathbf{r})$ между двумя частицами можно представить в виде

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r}, & r > \rho_p \\ V_1(\mathbf{r}), & r \leq \rho_p \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ_p — величина порядка размера протона $\simeq 0.8\text{--}0.9$ фм [4]. Вид $V_1(\mathbf{r})$ неизвестен, но физически понятно, что на волновую функцию электрона в области пространства $r \leq \rho_p$ должны влиять корпускулярные свойства протона. Если рассматривать протон как твердую жесткую частицу, то для любого связанного состояния электронная волновая функция должна была бы обращаться в нуль при $r \leq \rho_p$, поскольку эта область пространства занята протоном с его конечными размерами.

Конечно, размер этой области очень мал по сравнению с характерными масштабами длин, которые возникают в задаче, а именно, с боровским радиусом и комптоновской длиной волны электрона. Мы не будем учитывать возмущение волновых функций, обусловленное потенциалом V_1 в области $r \leq \rho_p$. В дифференциальных уравнениях для конкретных систем, обсуждаемых ниже, мы будем искать решение вне этой малой области, а затем в этом уравнении после действия всех операторов на волновую функцию будем переходить к пределу $r \rightarrow 0$. Тогда действие оператора $\varepsilon(\hat{\mathbf{p}})$ на волновую функцию полностью определено и однозначно.

Мы покажем, что это уравнение содержит два типа решений. Первый тип соответствует боровским связанным состояниям. Предсказано влияние энергии поступательного движения системы как целого на структуру атомных уровней в лабораторной системе координат. Этот эффект обусловлен конечностью отношения масс частиц m/M и приводит к снятию вырождения уровней по орбитальному моменту l и частично по его проекции. Проведены расчеты для сдвигов атомных уровней $ns, 2p$ при низких энергиях поступательного движения центра инерции системы $E^{(2)}(g) \ll mc^2m/2M$.

То, что в предлагаемом подходе к проблеме кроме боровских уровней возникает связанное состояние с радиусом экспоненциального затухания волновой функции равным

комптоновской длине волны электрона и энергией связи $E_b = M + m - \sqrt{M^2 - m^2}$, является неожиданным результатом. Уравнение состояния имеет существенно негамильтонову форму, так что не имеет смысла вводить разделение вкладов от потенциальной и кинетической энергий в энергию связи частицы. Для этого состояния системы поляризация вакуума будет существенно искажать энергию взаимодействия и полученные результаты следует рассматривать только как предсказание возможности такого состояния. Полное его описание должно включать состояние возмущенного электронного вакуума.

Ниже используется система единиц $c = \hbar = 1$.

2. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Для получения релятивистского волнового уравнения для связанных состояний системы частиц мы используем разложение полной волновой функции дискретного спектра по полному базису ортонормированных волновых функций свободных состояний для каждого типа входящих в систему частиц. Этот базис для частицы с массой m состоит из свободных состояний с энергиями частицы $\varepsilon = \pm\varepsilon(\mathbf{p})$, где $\varepsilon(\mathbf{p}) = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$. Что касается волновых функций свободных частиц, то их вид обусловлен однородностью пространства и времени, т. е. симметрией по отношению к любому параллельному смещению 4-системы координат. Тогда свободное состояние частицы с определенным 4-импульсом $p^\nu = (\varepsilon, \mathbf{p})$ должно представляться плоской волной $\exp(-ipx)$. При использовании уравнения непрерывности ($\partial_\mu j^\mu = 0$, где j^μ — 4-вектор плотности тока) нормированные волновые функции для состояний свободной частицы имеют вид:

$$\psi_{p,\sigma}^\pm = \sqrt{\frac{m}{\varepsilon(\mathbf{p})}} \exp(i(\mathbf{p}\mathbf{r} \pm \varepsilon(\mathbf{p})t)) u_{p,\sigma}, \quad (2)$$

где $u_{p,\sigma}$ — ортонормированная спиновая функция.

В дальнейшем мы будем пренебрегать спиновым взаимодействием. Тогда спиновую часть в (2) можно опустить.

Пусть $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ есть волновая функция связанного состояния системы частиц с массами покоя m_i и их радиус-векторами \mathbf{r}_i . Тогда согласно квантовой теории рассеяния эта волновая функция должна удовлетворять уравнению Липпмана–Швингера [5, 6]:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; E) = & \int \dots \int \prod_{i=1}^n d\mathbf{r}'_i G^0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n; E) \times \\ & \times \sum_{i>j} V(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \psi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n; E), \end{aligned} \quad (3)$$

где $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ — взаимодействие между частицами i и j ; E — полная энергия системы; G^0 — причинная функция Грина невзаимодействующей системы. Для ее определения введем полевой оператор системы невзаимодействующих частиц:

$$\Psi_s = \prod_{i=1}^n \psi^{(i)}, \quad (4)$$

где

$$\psi^{(i)} = \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{(+),i} \psi_{\mathbf{p}}^+(\mathbf{r}_i, t) + a_{\mathbf{p}}^{(-),i} \psi_{\mathbf{p}}^-(\mathbf{r}_i, t)), \tag{5}$$

где $a_{\mathbf{p}}^{(-),i}$ и $a_{\mathbf{p}}^{(+),i}$ — операторы уничтожения i -частицы в зонах свободных состояний соответственно с энергией $\varepsilon = -\varepsilon(\mathbf{p})$ и $\varepsilon = +\varepsilon(\mathbf{p})$. Нижняя зона полагается заполненной. Правила коммутации для этих операторов полагаются такими же, как для фермионов.

Функция Грина определяется как

$$G^0(\{\mathbf{r}_i\}, t; \{\mathbf{r}'_i\}, t') = \langle T(\Psi_s(\{\mathbf{r}_i\}, t) \Psi_s^+(\{\mathbf{r}'_i\}, t')) \rangle, \tag{6}$$

где $\langle \dots \rangle$ — усреднение по основному состоянию вакуума. Выражение (6) представляет собой n -частичную двухвременную функцию Грина, которые используются в квантовой теории рассеяния [6].

Подставляя (2), (4) и (5) в (6) и вычисляя фурье-компоненту по времени, мы получим:

$$G^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n; E) = \sum_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n} \prod_{i=1}^n \frac{m_i}{\varepsilon_i(\mathbf{p}_i)} \times \\ \times \left(\sum_{\substack{\{j_i=1,2\}, \\ l=1, \dots, n}} (E + (-1)^{j_1} \varepsilon_1(\mathbf{p}_1) + (-1)^{j_2} \varepsilon_2(\mathbf{p}_2) + \dots + (-1)^{j_n} \varepsilon_n(\mathbf{p}_n))^{-1} \right) \times \\ \times \exp\left(i \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_k)\right). \tag{7}$$

В уравнении (3) с учетом (7) удобно перейти к координатам, в которых выделен радиус-вектор \mathbf{R} центра инерции системы:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i \varepsilon_i(\mathbf{p}_i)}{\sum_i \varepsilon_i(\mathbf{p}_i)}. \tag{8}$$

Выбор оставшихся координат \mathbf{x}_j ($j = 1, \dots, n - 1, n \geq 2$) диктуется удобством или симметрией задачи. При этом волновая функция системы запишется в виде

$$\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}; \mathbf{g}) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{R}),$$

где \mathbf{g} — импульс системы как целого в лабораторной системе координат. Им определяется связь между \mathbf{p}_k в (7): $\mathbf{g} = \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k$. В результате в уравнении Липпмана–Швингера для системы с $n \geq 2$ остается по $n - 1$ интегрированию по импульсам \mathbf{p} и координатам \mathbf{x} системы.

Уравнение (3) можно также получить прямо из интегрального уравнения квантовой теории рассеяния, которое запишем в виде

$$\psi(\{\mathbf{r}_i\}; E) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \sum_{i>j} V(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \psi(\{\mathbf{r}'_i\}; E),$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан системы, который, как это принято [6], равен сумме невозмущенных гамильтонианов для каждой частицы, входящей в систему; как и в (3), опущено частное решение однородного уравнения, поскольку ψ относится к связанным состояниям системы [5, 6].

Используя разложение $\psi(\{\mathbf{r}_i\}; E)$ по полному базису функций системы $\Phi_{\mathbf{p}}$, составленному из волновых функций (2) для каждой частицы,

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{p}}(\Phi_{\mathbf{p}}, \psi),$$

$\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_i\}$, и переходя к пределу $\epsilon \rightarrow +0$, получим (3), (7). При этом нам, вообще говоря, не важен вид невозмущенного гамильтониана H_0 для i -той частицы, а важно лишь то, что $H_0\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{\pm} = \pm\epsilon(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{\pm}$.

3. ОДНА ЧАСТИЦА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Из (7) для функции Грина мы получаем:

$$G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; E) = \sum_{\mathbf{p}} G^0(\mathbf{p}; E) \exp(i\mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')),$$

где

$$G^0(\mathbf{p}; E) = \frac{m}{\epsilon(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{E - \epsilon(\mathbf{p})} + \frac{1}{E + \epsilon(\mathbf{p})} \right) = \frac{2mE}{\epsilon(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{E^2 - \epsilon^2(\mathbf{p})} \right). \quad (9)$$

Учитывая (9), легко получить, что интегральному уравнению для связанных состояний

$$\psi(\mathbf{r}; E) = \int d\mathbf{r}_1 G^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1; E) V(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1; E)$$

соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\epsilon(\hat{\mathbf{p}}) (E^2 - \epsilon^2(\hat{\mathbf{p}})) \psi(\mathbf{r}; E) = 2mEV(r)\psi(\mathbf{r}; E), \quad (10)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$.

Прежде всего обсудим отличие функции Грина (9) и уравнения (10) от известных выражений. Если бы в выражении (9) мы изменили знак между двумя полюсными функциями (строго говоря он определяется коммутационными соотношениями операторов рождения и уничтожения частиц), то получили бы точный вид функции Грина для уравнения Клейна-Гордона:

$$G^0(\mathbf{p}; E) = \frac{m}{\epsilon(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{E - \epsilon(\mathbf{p})} - \frac{1}{E + \epsilon(\mathbf{p})} \right) = \frac{2m}{E^2 - \epsilon^2(\mathbf{p})}.$$

Соответствующему интегральному уравнению для связанных состояний отвечало бы уравнение Клейна-Гордона во внешнем скалярном потенциале:

$$(-\Delta_{\mathbf{r}} + 2mV(r)) \psi(\mathbf{r}; E) = (E^2 - m^2)\psi(\mathbf{r}; E).$$

Когда речь идет о мелких связанных состояниях $\sqrt{|E^2 - m^2|} \ll m$, то такой выбор знака не приводит, естественно, к принципиально неправильным результатам: получаются боровские состояния с определенными релятивистскими поправками. Но если бы существовали глубокие связанные состояния с энергиями связи порядка m , то такой выбор знака приводил бы к полной потере информации о них.

Принципиально, такая же ситуация реализуется и в уравнении Дирака. В импульсном пространстве функция Грина для уравнения Дирака имеет вид [1]

$$G^0(\mathbf{p}; E) = \frac{\gamma p + m}{2\varepsilon(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{E - \varepsilon(\mathbf{p}) + i0} - \frac{1}{E + \varepsilon(\mathbf{p}) - i0} \right) = \frac{\gamma p + m}{E^2 - \varepsilon^2(\mathbf{p}) + i0}.$$

Здесь γ — матрицы Дирака в стандартном представлении и 4-вектор $p = (E, \mathbf{p})$.

Следует обратить внимание, что в отличие от выражения (9) здесь амплитуды простых полюсов для двух разрешенных областей спектров для свободных частиц $E = \pm\varepsilon(\mathbf{p})$ имеют различные знаки. В этом смысле структура функции Грина для уравнения Дирака аналогична бозонным пропагаторам и, в частности, функции Грина для уравнения Клейна — Гордона. Эту аналогию можно проследить и в выражении для гриновской функции фононов в твердом теле, которая имеет вид

$$D^0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_0(\mathbf{k})}{2} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0(\mathbf{k}) + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_0(\mathbf{k}) - i0} \right).$$

Здесь $\omega_0(\mathbf{k})$ — закон дисперсии для фононов. Видно, что структура гриновских функций для уравнений Дирака, Клейна — Гордона и для фононов сходна за исключением значений амплитуд простых полюсов. Однако в нерелятивистском пределе, когда $\mathbf{p} \rightarrow 0$, $\varepsilon(\mathbf{p}) \rightarrow m$, имеем

$$\gamma p + m = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и фермионная функция Грина для уравнения Дирака переходит в бозонную функцию Грина для уравнения Клейна — Гордона, т. е. и здесь речь может идти только о боровских состояниях.

Отметим, что полученное нами выражение (9) полностью соответствует известному спектральному представлению Лемана для гриновской функции фермионов [7] с действительными и положительно определенными амплитудами полюсов. Конечно, боровские состояния реализуются и в представленном нами уравнении (10), которое, как легко показать, сводится при $r \neq 0$ к уравнению Шредингера в случае, когда энергия связи мала по сравнению с массой частицы. Ниже мы получим решение этого уравнения с s -симметрией волновых функций.

Ищем решение уравнения (10) в виде $\psi = \exp(-r/\xi)$. Вводя обозначение комптоновской длины волны частицы $\lambda = 1/m$, мы получаем

$$\begin{aligned} (E^2 - \lambda^{-2} + \xi^{-2}) \left((1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{1/2} + \frac{\lambda^2}{r\xi} (1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{-1/2} \right) - \\ - \frac{2}{r\xi} (1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{1/2} = 2E \left(-\frac{e^2}{r} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Группируя члены при различных степенях r^j ($j = 0, 1$), из (11) находим два алгебраических уравнения относительно неизвестных E и ξ :

$$(E^2 - \lambda^{-2} + \xi^{-2})(1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{1/2} = 0, \quad (12)$$

$$(E^2 - \lambda^{-2} + \xi^{-2})(1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{-1/2} - 2\lambda^{-2}(1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{1/2} + 2e^2 E \xi \lambda^{-2} = 0. \quad (13)$$

Решение (12) дает два значения для радиуса экспоненциального затухания волновой функции:

$$\xi_1 = (\lambda^{-2} - E_1^2)^{-1/2}, \quad \xi_2 = \lambda.$$

Подставляя ξ_1 в (13), получаем энергию основного борковского уровня $1s_{1/2}$ для фермиона:

$$E_1 = m\sqrt{1 - \alpha^2},$$

где α — постоянная тонкой структуры. При этом ξ_1 равен борковскому радиусу.

Решая (13) относительно E , легко получить, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{E^2(\xi)}{(1 - \lambda^2 \xi^{-2})^{1/2}} = 0,$$

а энергия связи частицы при $\xi_2 = \lambda$ есть

$$E_2 = 0.$$

Таким образом, этот глубокий уровень находится в середине энергетической щели $2m$ в спектре свободных состояний частицы.

Здесь отметим следующее. Уравнение (10) имеет существенно негамильтонову форму. Мы показали, что это уравнение имеет два решения с s -симметрией волновых функций. Одно из решений, E_1 , соответствует основному борковскому уровню $1s_{1/2}$ для электрона. Для решений такого типа, когда энергия связи мала по сравнению с массой частицы, уравнение (10) может быть сведено к гамильтоновой форме (уравнению Шредингера). И тогда можно провести разделение вкладов от потенциальной и кинетической энергий в энергию связи частицы. В случае же решения E_2 такое разделение не имеет смысла.

В некотором смысле аналогичная проблема о связанных состояниях ферми-частиц в системах многих тел имеет место и для нерелятивистской области энергий. Здесь можно упомянуть проблему глубоких уровней в полупроводниках, решению которой была посвящена работа Келдыша [3], а также описание водородоподобных атомов в низкотемпературной плазме, приведенное, например, в работах Килиманна и др. (см. [8] и библиографию в ней). В отличие от настоящей работы «вакуумом» там является соответствующая среда. Полученное в [3] волновое уравнение для глубокого примесного уровня в диэлектрике также не имеет гамильтоновой формы. Только путем ряда упрощений его можно свести к виду, похожему на релятивистское уравнение Дирака, которое содержит ряд дополнительных членов, таких как «притягивающий» центр, независимо от знака носителя тока.

4. КОНЕЧНАЯ МАССА ЯДРА

4.1. Уравнение для связанных состояний

Согласно (7), функцию Грина системы двух частиц представим в виде

$$G^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2; E) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \frac{mM}{\varepsilon(\mathbf{p})\Sigma(\mathbf{q})} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{E - \Sigma(\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{p})} + \frac{1}{E - \Sigma(\mathbf{q}) + \varepsilon(\mathbf{p})} + \frac{1}{E + \Sigma(\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{p})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{E + \Sigma(\mathbf{q}) + \varepsilon(\mathbf{p})} \right) \exp(i(\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) + \mathbf{q}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2))), \quad (14)$$

где M — масса ядра, а $\Sigma(\mathbf{q}) = (M^2 + \mathbf{q}^2)^{1/2}$.

Здесь удобно выделить координаты центра инерции системы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 \varepsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{r}_2 \Sigma(\mathbf{q})}{\varepsilon(\mathbf{p}) + \Sigma(\mathbf{q})}.$$

Мы ищем волновую функцию системы в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{g}) = \chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{R}).$$

Здесь \mathbf{g} — импульс системы как целого в лабораторной системе координат.

Тогда для волновой функции $\chi(\mathbf{r}; \mathbf{g})$ получаем

$$\chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}) = \int d\mathbf{r}_1 \sum_{\mathbf{q}} \frac{Mm}{\Sigma(\mathbf{q})\varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g})} \left(\sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E \pm \Sigma(\mathbf{q}) \pm \varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g})} \right) \times$$

$$\times \exp\left(i\left(\mathbf{q} - \mathbf{g} \frac{\Sigma(\mathbf{q})}{\Sigma(\mathbf{q}) + \varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g})}\right) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\right) V(\mathbf{r}_1) \chi(\mathbf{r}_1; \mathbf{g}). \quad (15)$$

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение для связанных состояний системы, соответствующее интегральному уравнению (15), необходимо найти решение $\mathbf{q}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ следующего уравнения:

$$\mathbf{f} = \mathbf{q} - \mathbf{g} \frac{\Sigma(\mathbf{q})}{\Sigma(\mathbf{q}) + \varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g})}. \quad (16)$$

Если найдено решение (16) в виде $\mathbf{q}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, то из (15) легко получить это дифференциальное уравнение для связанных состояний системы:

$$\left(\frac{d\mathbf{q}(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{g})}{d\mathbf{f}} \right)^{-1} \Sigma(\mathbf{q})\varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g}) \left(\sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E \pm \Sigma(\mathbf{q}) \pm \varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g})} \right)^{-1} \chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}) = MmV(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}). \quad (17)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{g})$ и $\hat{\mathbf{f}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$.

4.2. Два типа состояний в системе центра инерции

Радиус-вектор \mathbf{R} описывает движение системы как целого. Используя эту степень свободы, можно получить эффективную массу системы двух частиц в каком-либо связанном состоянии. Это будет сделано ниже, но сначала выясним влияние массы ядра на спектр связанных состояний. Для этого рассмотрим покоящуюся систему двух связанных частиц. Тогда $\mathbf{g} = 0$ и $\mathbf{q} = \mathbf{f}$. Учитывая (16) и (17), мы получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{\mathbf{r}})\Sigma(\hat{\mathbf{r}}) \left(E^4 - 2E^2 \left(\varepsilon^2(\hat{\mathbf{r}}) + \Sigma^2(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \left(\varepsilon^2(\hat{\mathbf{r}}) - \Sigma^2(\hat{\mathbf{r}}) \right)^2 \right) \chi(\mathbf{r}; E) = \\ = 4mME \left(E^2 - \varepsilon^2(\hat{\mathbf{r}}) - \Sigma^2(\hat{\mathbf{r}}) \right) V(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r}; E). \end{aligned} \quad (18)$$

Найдем решения (18), отвечающие s -симметрии волновой функции: $\psi = \exp(-r/\xi)$. Подставляя эту функцию в (18) и группируя члены при различных степенях r^j ($j = 0, 1$), после простых, но громоздких вычислений находим два алгебраических уравнения для E и ξ :

$$Z = E^4 - 2E^2 (\lambda_M^{-2} + \lambda_m^{-2} - 2\xi^{-2}) + (\lambda_M^{-2} - \lambda_m^{-2})^2 = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Z\xi^{-1} (1 - \lambda_m^2 \xi^{-2})^{1/2} (1 - \lambda_M^2 \xi^{-2})^{1/2} \left(\frac{\lambda_m^2}{1 - \lambda_m^2 \xi^{-2}} + \frac{\lambda_M^2}{1 - \lambda_M^2 \xi^{-2}} \right) - \\ - 2^3 E^2 \xi^{-1} (1 - \lambda_m^2 \xi^{-2})^{1/2} (1 - \lambda_M^2 \xi^{-2})^{1/2} = -4e^2 E (E^2 - \lambda_M^{-2} - \lambda_m^{-2} + 2\xi^{-2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\lambda_m = 1/m$ и $\lambda_M = 1/M$ — комптоновские длины волн частиц.

Уравнения (19) и (20) имеют два решения. Первое соответствует основному боровскому s -состоянию, которое характеризуется радиусом

$$\xi_1 = a_B \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma^{-1} + 2\sqrt{1 - \alpha^2})} \quad (21)$$

и энергией

$$E_1 = M \sqrt{1 - \frac{\gamma \alpha^2}{\gamma + \gamma^{-1} + 2\sqrt{1 - \alpha^2}}} + m \sqrt{1 - \frac{\gamma^{-1} \alpha^2}{\gamma + \gamma^{-1} + 2\sqrt{1 - \alpha^2}}}, \quad (22)$$

где a_B — боровский радиус; $\gamma = m/M$.

Для второго решения (19) и (20) получим

$$\xi_2 = \max(\lambda_m, \lambda_M) \quad (23)$$

и

$$E_2 = \sqrt{|M^2 - m^2|}. \quad (24)$$

Из последнего уравнения можно определить энергию связи системы в глубоком связанном состоянии:

$$E_b = M + m - \sqrt{|M^2 - m^2|}. \quad (25)$$

При $M \gg m$ из (25) имеем

$$E_b = m \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right), \quad (26)$$

что в пределе $M \rightarrow \infty$ согласуется с результатом разд. 3.

4.3. Влияние импульса системы как целого на боровские уровни энергии в нерелятивистском случае

Пусть система как целое движется с некоторой скоростью $\ll c$. Пусть $E^{(2)}(g) = g^2/2(M+m)$ — энергия поступательного движения системы.

При $g = 0$ для боровских состояний интеграл по \mathbf{q} набирается на характерных значениях импульсов $\simeq \alpha m$. Поэтому в (15) $\Sigma(\hat{\mathbf{q}})$ и $\varepsilon(\hat{\mathbf{q}})$ можно разложить в ряды по \mathbf{q} . То же можно проделать и по $g \neq 0$, если

$$E^{(2)}(g) \ll m \frac{m}{2M} \simeq 140 \text{ эВ.}$$

Таким образом, для электронной подсистемы нерелятивистский случай отвечает довольно низким энергиям поступательного движения системы как целого.

Здесь мы ограничимся учетом вкладов в энергию вплоть до α^4 . Поэтому решение (16) можно записать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{f} + \frac{M}{M+m} \mathbf{g} + \frac{\hbar^2 \mathbf{g}}{m(M+m)c^2} \left(-\frac{M-m}{M} f^2 + \frac{m}{M+m} \mathbf{g}\mathbf{f} \right). \quad (27)$$

Используя это решение, (17) можно свести к уравнению типа уравнения Шредингера. С этой целью в сумме, стоящей в круглых скобках в (17), «резонансное» слагаемое $(E_g - \Sigma(\mathbf{q}) - \varepsilon(\mathbf{q} - \mathbf{g}))^{-1}$ раскладывалось вплоть до членов четвертого порядка по \mathbf{f} и \mathbf{g} . Легко видеть, что в трех оставшихся членах суммы следует ограничиться только нулевым порядком разложения. Это приводит к вкладу $1/2\mu_2$, где $\mu_2 = mM(M+m)/((M+m)^2 + Mm)$. В первых трех сомножителях в левой части (17) требуется ограничить разложение только до второго порядка \mathbf{f} и \mathbf{g} . В результате мы получаем

$$\begin{aligned} & \left(E(g) - E^{(3)}(g) - \frac{\hat{\mathbf{f}}^2}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{f}}^4}{8\mu_1^3} - \hat{W}(\mathbf{g}, \mathbf{f}) \right) \chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}) = \\ & = \left(1 - \frac{3\hat{\mathbf{f}}^2}{4\mu_2^2} + \frac{E(g) - E^{(3)}(g)}{2\mu_2} \right) V(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}; \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $E^{(3)}(g)$ — сумма первых трех членов в разложении $\sqrt{(M+m)^2 + g^2}$ по g^2 ; использованы обозначения $\mu = mM/(M+m)$; $\mu_1^3 = M^3 m^3 / (M^3 + m^3)$; $\mu_2^2 = m^2 M^2 / (M^2 + Mm + m^2)$ и важный для последующего оператор возмущения, возникающий при разложении «резонансного» члена в (17):

$$\hat{W}(\mathbf{g}, \mathbf{f}) = \frac{g^2}{2(M+m)} \frac{\Delta_r - 2(\mathbf{n}_g \nabla_r)^2}{2Mm}, \quad (29)$$

где $\mathbf{n}_g = \mathbf{g}/g$.

Из (28) видно, что его решения отвечают боровским состояниям с учетом релятивистских поправок $\simeq \alpha^4$. Как отмечалось выше, для этих поправок соответствующие матричные элементы должны вычисляться как $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta} dr$. При $M \rightarrow \infty$ и $g = 0$ из (28) для основного боровского состояния мы получаем три первых члена в разложении $m\sqrt{1 - \alpha^2}$ по α^2 .

Оператор (29) представляет влияние поступательного движения системы как целого на структуру атомных уровней в лабораторной системе координат. Это весьма необычный результат, и он обусловлен конечностью отношения m/M .

Легко получить, что для ns -состояний (29) приводит к сдвигам уровней:

$$\Delta E_{ns} = -\frac{\alpha^2}{6n^2} \frac{m}{M} E^{(2)}(g). \quad (30)$$

Для $2p$ -состояний имеем

$$\Delta E_{2p} = +\frac{\alpha^2}{40} \frac{m}{M} E^{(2)}(g) \quad (31)$$

для состояния с проекцией момента $m = 0$ и

$$\Delta E_{2p} = -\frac{3\alpha^2}{40} \frac{m}{M} E^{(2)}(g) \quad (32)$$

для состояний с проекцией момента $m = \pm 1$.

Таким образом, при движении частицы как целого предсказывается снятие вырождения по орбитальному моменту l и частично по его проекции m в меру $|m|$. Оценим величину сдвига в нерелятивистском случае. При $E^{(2)}(g) = 50$ эВ для $1s$ -состояния получаем

$$\Delta E_{1s} \simeq 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1},$$

что приблизительно в 17 раз меньше лэмбовского сдвига для $1s$ -состояния.

Следует отметить, что влияние поступательного движения системы как целого на боровские уровни приводит к поправке к массе системы, которая зависит от ее состояния. Для ns -состояний из (30) получим

$$\Delta M_{ns} = \frac{\alpha^2}{6n^2} m.$$

Нам не удалось решить (17) для глубокого связанного состояния E_2 при $g \neq 0$. Поскольку электрон в этом состоянии следует рассматривать как релятивистский, его вклад в эффективную массу системы должен значительно превышать массу покоя электрона.

В конце этого раздела укажем на следующее обстоятельство. В этой статье мы дали вывод уравнений для связанных состояний (10) и (17) исходя из уравнения Липпмана — Швингера в виде (3). Аналогичный результат можно получить, если начинать вывод из уравнения Дайсона для двухчастичной функции Грина с соответствующей собственно-энергетической частью. Для диспергирующих сред такая процедура получения релятивистского волнового уравнения типа Бете — Солпитера [9] использовалась в [8, 10]. В [10] волновое уравнение для связанных состояний двух заряженных нерелятивистских частиц в среде с диэлектрической проницаемостью, включающей частотную и пространственную дисперсии, получалось простой заменой в уравнении Бете — Солпитера фотонного пропагатора в вакууме на соответствующий в диспергирующей среде (см., например, [7]). Легко показать, что это уравнение также содержит влияние поступательного движения системы как целого на спектр связанных состояний в лабораторной системе координат. Это качественно соответствует результатам представленного здесь рассмотрения для, по существу, двухзонной модели вакуума.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение, отвечающее связанному состоянию в системе протон + электрон с радиусом экспоненциального затухания волновой функции равным комптоновской длине волны электрона, является неожиданным результатом. Мы провели рассмотрение, в котором пренебрегалось рождением реальных или виртуальных частиц и учитывалась только заданная исходная система частиц. Однако для этого состояния системы поляризация вакуума будет существенно искажать энергию взаимодействия и полученные результаты следует рассматривать только как предсказание возможности такого состояния. Полное его описание должно включать состояние возмущенного электронного вакуума.

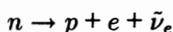
Однако мы считаем, что учет поляризации вакуума качественно не изменит полученного результата. Это, в частности, подтверждается упомянутой выше теорией связанных состояний заряженных частиц в диспергирующих средах. Хотя первоначально учитывалась только экранировка кулоновского потенциала за счет временной и пространственной дисперсии [10], последующее более последовательное рассмотрение связанных состояний ферми-частиц в системах многих тел [8] показывает, что перенормировка собственно-энергетической части не оказывает заметного влияния на характер спектра связанных состояний не только качественно, но в ряде случаев и количественно.

Мы полагаем, что именно поляризацией вакуума должна обеспечиваться стабильность атомных систем и, в частности, атома водорода H при наличии незаполненного глубокого уровня E_2 . Тогда матричный элемент радиационного перехода $E_{1s} \rightarrow E_2$ с испусканием фотона имеет вид

$$\langle vac^* | \langle E_2 | \hat{O}(\mathbf{r}) | E_{1s} \rangle | vac^0 \rangle,$$

где $\hat{O}(\mathbf{r})$ — оператор перехода, действующий на электронную волновую функцию, $|vac^*\rangle$ и $|vac^0\rangle$ — состояния вакуума соответственно для E_2 - и E_{1s} -состояний системы. Этот матричный элемент перехода обращается в нуль, если вакуумные состояния ортогональны $\langle vac^* | vac^0 \rangle = 0$. Именно с этой ситуацией мы связываем стабильность атомных систем.

Теперь мы обсудим состояние E_2 , в которое мы включим и поляризацию вакуума. Единственной существующей реальностью, которая могла бы соответствовать этому состоянию, является нейтрон. Известно, что нейтрон — нестабильная частица. В свободном состоянии он распадается согласно реакции:



с временем жизни $\simeq 15$ мин.

В рамках данного подхода этот распад можно объяснить ионизацией E_2 -состояния энергетическими частицами во внутреннем радиационном поясе Земли с их энергией больше энергии связи системы. Тогда распад системы должен сопровождаться появлением рассеянной частицы, свободного протона, выбитого свободного электрона и процессом релаксации возбужденного электронного вакуумного состояния $|vac^*\rangle$. Поскольку из нашего рассмотрения следует, что процесс распада нейтрона регламентирован потоком исходных околоземных энергетических частиц, то проверкой теории могло

бы служить изменению времени жизни нейтрона при изменении энергетического распределения и потока частиц с энергией больше энергии связи системы.

Отметим, что если бы имелась возможность приготовления возмущенного состояния вакуума $|vac^e\rangle$ в пространственно-временной точке нахождения ядра атома водорода, для которого $\langle vac^*|vac^e\rangle \neq 0$, то принципиально должна идти реакция с выделением энергии:

$$H + |vac^e\rangle \rightarrow |E_2\rangle + h\nu + |vac^s\rangle,$$

где H — атом водорода, $h\nu$ — гамма-квант с энергией порядка m , $|vac^s\rangle$ представляет избыточное возбуждение электронного вакуума.

Литература

1. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1984).
3. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **54**, 364 (1963).
4. Г. Фраунфельдер, Э. Хенли, *Субатомная физика*, Мир, Москва (1979).
5. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971).
6. Т. Ю. Ву, Е. Омура, *Квантовая теория рассеяния*, Наука, Москва (1969).
7. А. А. Абрикосов, А. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
8. К. Килиманн, Д. Кремп, Г. Ренке, *ТМФ* **55**, 448 (1983).
9. Е. Е. Salpeter and Н. А. Bete, *Phys. Rev.* **84**, 1232 (1951).
10. Э. А. Манькин, М. И. Ожован, П. П. Полуэктов, *ТМФ* **49**, 289 (1981).