РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА *ТОМ 112, ВЫПУСК 2(8)*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД *АВГУСТ, 1997*
МОСКВА «НАУКА»

РАВНОВЕСИЕ КАНАЛА СИЛЬНОГО ТОКА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Б. Э. Мейерович

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117973, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 июля 1996 г.

Из уравнений Эйнштейна общей теории относительности выводится условие равновесия канала сильного тока с учетом как электромагнитного, так и гравитационного взаимодействий зарядов при произвольном отношении скорости дрейфа к скорости света. Связанное с протеканием тока относительное движение подсистем электронов и ионов приводит к дополнительному гравитационному притяжению этих подсистем. Это — релятивистский эффект, который не может быть получен в рамках ньютоновского приближения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В плазменной астрофизике [1] фундаментальную роль играют сильные межгалактические токи, влияющие на структуру и эволюцию материи во Вселенной. В этой связи представляет интерес обобщить известное условие равновесия Беннета [2] на случай, когда гравитационные силы притяжения между зарядами сравнимы с электромагнитными силами.

Реальное искажение метрики межгалактическими токами является слабым, и для учета гравитационных сил в уравнениях, описывающих равновесную структуру каналов сильного тока, в большинстве случаев достаточно ньютоновского приближения. В этом приближении условие равновесия каналов сильного тока с учетом гравитационных сил получено в [3]. Однако условие равновесия, выведенное в ньютоновском приближении, применимо только для нерелятивистской скорости дрейфа, ибо для применимости самого ньютоновского приближения необходимо, не только чтобы гравитационное поле было слабым, но и чтобы движение материи было нерелятивистским ([4], §§ 87, 99). Поэтому, чтобы обобщить условие равновесия сильного тока на случай релятивистской скорости дрейфа даже в случае слабого гравитационного поля, необходимо использовать уравнения Эйнштейна вне рамок ньютоновского приближения. Этой задаче посвящена настоящая работа.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Канал сильного тока мы рассматриваем как цилиндрически-симметричную систему, состоящую из двух подсистем (ионов и электронов), движущихся друг относительно друга со скоростью дрейфа V и не взаимодействующих друг с другом столкновительно (а только через поля, создаваемые самими зарядами). Это справедливо, если дрейфовая скорость велика по сравнению со средними скоростями зарядов в сопутствующих системах отсчета. Эффективность кулоновских столкновений резко убывает с ростом относительной скорости сталкивающихся зарядов. По этой причине равновесие внутри каждой из подсистем устанавливается значительно быстрее, чем могло бы установиться равновесие всей плазмы в целом. За времена, большие по сравнению со временем релаксации внутри подсистем, но малые по сравнению со временем затухания тока из-за трения электронов об ионы, можно пренебречь взаимным трением подсистем. Тогда каждую подсистему можно считать находящейся в собственном состоянии теплового равновесия.

Протекание тока можно рассматривать как стационарное в случае, если на длине токового канала скорость дрейфа практически не уменьшается из-за трения электронов об ионы. Сохранение дрейфовой скорости вдоль канала тока может поддерживаться внешним продольным электрическим полем. В каналах сильного тока продольное электрическое поле, как правило, мало по сравнению с собственным магнитным полем тока, и им можно пренебречь при анализе равновесия системы.

Условие малости скоростей зарядов в сопутствующих подсистемам системах отсчета по сравнению со скоростью дрейфа означает, что относительные скорости при столкновениях электронов друг с другом, как правило, нерелятивистские. При этом вопрос о несохранении числа электронов из-за образования электрон-позитронных пар не возникает.

В целом наша постановка задачи о равновесии канала сильного тока не отличается от традиционной постановки задачи в приближении магнитной гидродинамики идеальной (вообще говоря, заряженной) плазмы независимо от того, учитывается или не учитывается гравитационное взаимодействие зарядов. Малость длины пробега по сравнению с радиусом канала позволяет рассматривать и электронную, и ионную подсистемы как идеальные жидкости (или газы). Взаимное же трение электронов об ионы относится к диссипативным эффектам, возникающим в более далеких членах разложения по малым градиентам, и поэтому здесь не учитывается.

3. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

Для последовательного учета гравитационных сил при $V/c \sim 1$ необходимо решать уравнения Эйнштейна, описывающие искажение метрики g_{ik} пространства материей (в нашем случае зарядами и электромагнитным полем) и частично содержащие в себе уравнения движения самой материи. На расстояниях, больших по сравнению с размерами системы, метрика пространства должна быть галилеевской. Ниже мы будем использовать координаты $x_0 = ct$, $x^1 = \ln r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. В этих координатах галилеевская метрика имеет вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \exp(2x^1)(dx^1)^2 - \exp(2x^1)(dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\exp(2x^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\exp(2x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

Направление тока является выделенным направлением, и в простейшей геометрии при анализе физической природы равновесия канал тока можно рассматривать как цилиндрически-симметричную, стационарную и однородную вдоль направления тока систему, все параметры которой зависят только от одной пространственной координаты — расстояния до оси. В метрическом тензоре g_{ik} отличными от нуля помимо диагональных членов являются также компоненты $g_{0\alpha}$. Это связано с тем, что при наличии постоянного тока происходит движение материи и перенос импульса как зарядами, так и электромагнитным полем (вектор Пойнтинга в общем случае отличен от нуля). Из дальнейшего анализа будет видно, что при $V/c \sim 1$ вклад $g_{0\alpha}$ в равновесный баланс энергий того же порядка, что и g_{00} (и g_{33}). Постоянное гравитационное поле канала сильного тока является, таким образом, стационарным, но не статическим ([4], § 88).

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями [4]. Латинские индексы нумеруют 4-векторы и 4-тензоры. Греческие индексы применяются для трехмерных векторов и тензоров; $h = g_{00}$ — трехмерный скаляр, $g_\alpha = -h^{-1}g_{0\alpha}$ — трехмерный вектор, $\gamma_{\alpha\beta}$ — трехмерный метрический тензор,

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}. \tag{3.2}$$

4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция распределения зарядов по импульсам и координатам в состоянии теплового равновесия является интегралом движения и релятивистским инвариантом, и потому в произвольной системе отсчета должна зависеть только от ковариантных комбинаций аддитивных интегралов движения (проекций обобщенного 4-импульса P_i на направления циклических координат) и 4-скорости U^i движения подсистемы как целого. Для нашей цилиндрически-симметричной системы, однородной вдоль направления тока, такой комбинацией является P_iU^i,

$$U^0 = \frac{dx^0}{\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}} = \left[g_{00} + 2g_{0\alpha}\frac{W^\alpha}{c} + g_{\alpha\beta}\frac{W^\alpha W^\beta}{c^2}\right]^{-1/2},$$

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}} = \frac{W^\alpha}{c}\left[g_{00} + 2g_{0\alpha}\frac{W^\alpha}{c} + g_{\alpha\beta}\frac{W^\alpha W^\beta}{c^2}\right]^{-1/2},$$

U^i — 4-скорость движения подсистемы относительно лабораторной системы координат, $W^\alpha = cdx^\alpha/dx^0$. Скорость дрейфа V равна разности скоростей движения подсистем: $V^\alpha = W_e^\alpha - W_i^\alpha$. Обобщенный 4-импульс P_i при наличии электромагнитного поля связан с кинематическим 4-импульсом частицы p_i соотношением $p_i = P_i - (e/c)A_i$, A_i — 4-потенциал электромагнитного поля.

Зависимость равновесной функции распределения от P_iU^i определяется статистикой частиц. Для фермионов (таковыми являются как электроны, так и протоны) эта зависимость имеет вид

$$F(X) = \left\{1 + \exp\left[B + X/T\right]\right\}^{-1}, \quad X = cP_iU^i, \tag{4.1}$$

B и T — скаляры. Поскольку функция распределения является интегралом движения, ее аргумент $B + X/T$ не зависит от координат; B является просто константой. Но проекции обобщенного 4-импульса P_i на направление тока и на ось времени — интегралы движения. Следовательно, отношения U^i/T, $i = 0, 3$, не должны зависеть от координат. Иначе говоря, 4-вектор $\xi^i = U^i/T$ является вектором Киллинга [5], который в произвольной системе координат удовлетворяет уравнению Киллинга:

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение Киллинга является следствием симметрии, связанной с наличием в системе циклических координат. Оно определяет координатную зависимость скорости, химического потенциала и температуры.

Из уравнения Киллинга следует, что 3-скорость $W^\alpha = cdx^\alpha/dx^0$, измеренная в мировом времени x^0, не зависит от координаты x^1. В нашем случае x^0 и x^3 — циклические координаты, и отличными от нуля являются те же компоненты U^0 и U^3. Из уравнений (4.2) независимыми являются только два:

$$g_{00}\frac{d(U^0/T)}{dx^1} + g_{03}\frac{d(U^3/T)}{dx^1} = 0,$$
$$g_{30}\frac{d(U^0/T)}{dx^1} + g_{33}\frac{d(U^3/T)}{dx^1} = 0.$$

Детерминант этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{03} \\ g_{30} & g_{33} \end{vmatrix} = g_{00}g_{33} - g_{03}g_{30} = -g_{00}\gamma_{33} \neq 0.$$

Поэтому из уравнений Киллинга имеем

$$\frac{d(U^0/T)}{dx^1} = 0, \quad \frac{d(U^3/T)}{dx^1} = 0.$$

Отсюда видно, что $W^3/c = U^3/U^0 = \text{const}$, т. е. W^3 действительно не зависит от координаты x^1. Координатная зависимость температуры дается формулой

$$\frac{T}{U^0} = T\sqrt{g_{00} + 2g_{0\alpha}\frac{W^\alpha}{c} + g_{\alpha\beta}\frac{W^\alpha W^\beta}{c^2}} = \text{const}. \tag{4.3}$$

5. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Для вычисления тензора энергии-импульса T^{ik} и других величин с помощью функции распределения необходимо знать, как преобразуется в криволинейных координатах элемент 4-объема импульсного пространства $d\Omega_p = dp^0dp^1dp^2dp^3$. Поскольку dp^i является контрвариантным вектором, при преобразовании координат его компоненты преобразуются как дифференциалы координат. Но в криволинейных координатах произведение $\sqrt{-g}\,d\Omega$ является инвариантом, g — определитель метрического тензора g_{ik}, $d\Omega = dx^0dx^1dx^2dx^3$. Отсюда можно заключить, что при интегрировании по 4-объему импульсного пространства инвариантным остается произведение $\sqrt{-g}\,d\Omega_p$.

Таким образом, мы имеем следующее инвариантное выражение для T^{ik} как интеграл от функции распределения:

$$T^{ik} = \frac{2cg}{(2\pi\hbar)^3}\int p^ip^kF(X)\delta(p_sp^s - m^2c^2)\sqrt{-g}\,dp^0dp^1dp^2dp^3. \qquad (5.1)$$

Подстановка (4.1) в (5.1) дает стандартное выражение для тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = (\mathscr{E} + \mathscr{P})U^iU^k - \mathscr{P}g^{ik}, \qquad (5.2)$$

в котором энергия $\mathscr{E}$ и давление $\mathscr{P}$ в сопутствующей системе отсчета выражены через потенциалы поля A_i:

$$\mathscr{E} = \frac{4\pi g}{(2\pi ch)^3}\int\limits_{mc^2}^{\infty} dE\,E^2\sqrt{E^2 - m^2c^4}\left\{1 + \exp\left[\frac{E-\mu}{T}\right]\right\}^{-1}, \qquad (5.3)$$

$$\mathscr{P} = \frac{4\pi g}{3}\frac{1}{(2\pi ch)^3}\int\limits_{mc^2}^{\infty} dE(E^2 - m^2c^4)^{3/2}\left\{1 + \exp\left[\frac{E-\mu}{T}\right]\right\}^{-1}, \qquad (5.4)$$

$$-\mu = BT + eA_iU^i. \qquad (5.5)$$

Здесь g — g-фактор, μ — химический потенциал.

Формулы (4.3), (5.3), (5.4) и (5.5) уже содержат в себе уравнение состояния вещества. Этими формулами компоненты тензора энергии-импульса выражаются через потенциалы электромагнитного поля и 4-скорость движения подсистемы как целого.

4-вектор тока n^i есть интеграл от функции распределения:

$$n^i = \frac{2}{c}\frac{g}{(2\pi h)^3}\int p^iF(X)\delta(p_sp^s - m^2c^2)\sqrt{-g}\,dp^0dp^1dp^2dp^3 = nU^i. \qquad (5.6)$$

Здесь

$$n = \frac{4\pi g}{(2\pi ch)^3}\int\limits_{mc^2}^{\infty} dE\,E\sqrt{E^2 - m^2c^4}\left\{1 + \exp\left[\frac{E-\mu}{T}\right]\right\}^{-1}, \qquad (5.7)$$

n — плотность зарядов в сопутствующей системе координат.

Полный тензор энергии-импульса частиц получается из (5.2) суммированием по сортам зарядов:

$$T^k_{P\,i} = \sum_a \left[(\mathscr{E}_a + \mathscr{P}_a) U_{ai} U^k_a - \mathscr{P}_a \delta^k_i \right]. \tag{5.8}$$

Индекс суммирования $a = i, e$ соответственно для ионов и электронов. 4-вектор плотности электрического тока равен

$$j^i = c \sum_a e_a n^i_a = c \sum_a e_a n_a U^i_a. \tag{5.9}$$

Полный ток I и заряд Q на единицу длины канала получаются из (5.9) инвариантным интегрированием по поперечному сечению:

$$\frac{I}{c} = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx^1 \sqrt{-g} \sum_a e_a n_a U^3_a, \quad Q = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx^1 \sqrt{-g} \sum_a e_a n_a U^0_a. \tag{5.10}$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля равен

$$T^k_{F\,i} = (-F_{il} F^{kl} + \delta^k_i F_{lm} F^{lm}/4)/4\pi.$$

В случае стационарной, однородной вдоль направления тока и по азимуту системы отличными от нуля являются компоненты 4-вектора потенциала поля A_0 и A_3. Соответственно, в тензоре электромагнитного поля

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{5.11}$$

отличны от нуля только компоненты $F_{10} = -F_{01} = \partial A_0/\partial x^1$ электрического поля и компоненты $F_{13} = -F_{31} = \partial A_3/\partial x^1$ магнитного поля. Удобно выразить тензор энергии-импульса электромагнитного поля через смешанную компоненту электрического поля $F^1_0 = g_{00} F^{01} + g_{03} F^{31}$ и контрвариантную компоненту магнитного поля F^{31}:

$$T_{00} = \gamma_{11} \left[\gamma_{33} h (F^{13})^2 + (F^1_0)^2 \right] / 8\pi, \tag{5.12}$$

$$T^3_0 = \gamma_{11} F^1_0 F^{31} / 4\pi, \tag{5.13}$$

$$T^{11} = h^{-1} \left[\gamma_{33} h (F^{13})^2 - (F^1_0)^2 \right] / 8\pi, \tag{5.14}$$

$$T^{22} = \gamma^{22} \gamma_{11} h^{-1} \left[-\gamma_{33} h (F^{13})^2 + (F^1_0)^2 \right] / 8\pi, \tag{5.15}$$

$$T^{33} = \gamma^{33} \gamma_{11} h^{-1} \left[\gamma_{33} h (F^{13})^2 + (F^1_0)^2 \right] / 8\pi. \tag{5.16}$$

Полный тензор энергии-импульса материи, входящий в уравнения Эйнштейна, есть сумма соответствующих выражений для частиц и электромагнитного поля: $T^k_i = T^k_{P\,i} + T^k_{F\,i}$.

6. ТЕНЗОР РИЧЧИ

Несмотря на компактную тензорную запись уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right), \tag{6.1}$$

их практическое использование не просто. Мы выпишем полную систему уравнений, описывающих стационарное протекание тока по цилиндрически-симметричному каналу, не предполагая гравитационное поле слабым. Воспользуемся известными выражениями для компонент тензора Риччи R_{ik} в случае постоянного гравитационного поля ([4], задача к § 95):

$$R_{00} = \sqrt{h}\left(\sqrt{h}\right)^{;\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{h^2}{4} f_{\lambda\mu} f^{\lambda\mu},$$

$$R_0^\alpha = -\frac{1}{2} h f^{\alpha\lambda}{}_{;\lambda} - \frac{3}{4} f^{\alpha\lambda} h_{;\lambda},$$

$$R^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\lambda} f^{\beta}{}_{\lambda} - \frac{\left(\sqrt{h}\right)^{;\alpha;\beta}}{\sqrt{h}}.$$

Мы используем стандартные обозначения [4]:

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}$$

— антисимметричный трехмерный тензор; $P^{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как 4-тензор R^{ik} строится из g_{ik}. Все операции поднятия и опускания греческих индексов и ковариантного дифференцирования в трехмерном пространстве проводятся с помощью трехмерного метрического тензора (3.2).

В нашей задаче тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ диагонален, и можно воспользоваться готовыми выражениями ([4], задача 2 к § 92) для тензора $P^{\alpha\beta}$. Если обозначить $g_{00} = h = \exp(F_0)$ и представить отличные от нуля диагональные компоненты трехмерного метрического тензора в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \exp(2F_1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2F_2) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2F_3) \end{vmatrix},$$

то для тензора $P_{\alpha\beta}$ получим следующие выражения:

$$P_{\alpha\alpha} = \sum_{\lambda\neq\alpha} \left\{ F_{\alpha,\alpha}F_{\lambda,\alpha} - F_{\lambda,\alpha}^2 - F_{\lambda,\alpha,\alpha} + \exp(2F_\alpha - 2F_\lambda) \times \right.$$
$$\left. \times \left(F_{\lambda,\lambda}F_{\alpha,\lambda} - F_{\alpha,\lambda,\lambda} - F_{\alpha,\lambda}^2 - \sum_{\mu\neq\alpha\neq\lambda} F_{\alpha,\lambda}F_{\mu,\lambda} \right) \right\}, \tag{6.2}$$

$$P_{\alpha,\beta} = \sum_{\mu\neq\alpha\neq\beta} \left(F_{\alpha,\beta}F_{\mu,\alpha} + F_{\beta,\alpha}F_{\mu,\beta} - F_{\mu,\beta}F_{\mu,\alpha} - F_{\mu,\alpha,\beta} \right), \quad \alpha \neq \beta. \tag{6.3}$$

В (6.2) по дважды повторяющемуся индексу α суммирования нет. В случае зависимости всех величин только от одной координаты тензор $P_{\alpha\beta}$ диагонален, так как при $\alpha \neq \beta$ в каждом члене суммы (6.3) дифференцирование проводится по двум разным координатам. Индекс $,\alpha$ означает обычное дифференцирование по координате x^α.

Пользуясь произволом в выборе координаты x^1, наложим на функции F_i дополнительное условие [6]:

$$F_1 = F_0 + F_2 + F_3. \tag{6.4}$$

Тогда формулы значительно упрощаются, и мы приходим к следующим выражениям для отличных от нуля компонент тензора Риччи:

$$R_{00} = \exp\left[2(F_0 - F_1)\right] F_0'' + (1/2)\exp(4F_0 - 2F_1 - 2F_3) g_3'^2, \tag{6.5}$$

$$R_0^3 = -(1/2)\exp(-2F_1)\left[\exp\left\{2(F_0 - F_3)\right\} g_3'\right]', \tag{6.6}$$

$$R^{11} = \exp(-4F_1)\left\{\left[2(F_2'F_3' + F_3'F_0' + F_0'F_2') - F_1''\right] + (1/2)\exp(2F_0 - 2F_3) g_3'^2\right\}, \tag{6.7}$$

$$R^{22} = -\exp(-2F_2 - 2F_1) F_2'', \tag{6.8}$$

$$R^{33} = \exp(-2F_3 - 2F_1) F_3'' + (1/2)\exp(2F_0 - 2F_1 - 4F_3) g_3'^2. \tag{6.9}$$

Штрих означает дифференцирование по x^1.

7. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Из уравнений Эйнштейна следует, что дивергенция тензора энергии-импульса

$$T_i^k = \sum_a \left(\mathscr{W}_a U_{ai} U_a^k - \mathscr{P}_a \delta_i^k\right) + \left(-F_{il}F^{kl} + \delta_i^k F_{lm}F^{lm}/4\right)/4\pi$$

равна нулю: $T_{i\ ;k}^{k} = 0$. Проведем непосредственное вычисление $T_{i\ ;k}^{k}$ с $\mathscr{W}_a = \mathscr{E}_a + \mathscr{P}_a$, $\mathscr{E}_a$ и $\mathscr{P}_a$ из (5.3) и (5.4). Отличными от нуля компонентами U_a^k являются U_a^0 и U_a^3, а соответствующие координаты x^0 и x^3 — циклические. Поэтому $U_a^k d/dx^k = 0$, $U_{a\ ;k}^{k} = 0$. После ряда стандартных преобразований имеем

$$T_{i\ ;k}^{k} = \sum_a \mathscr{W}_a (U_{ai}U_a^k)_{;k} - \mathscr{P}_{a;i} - F_{il}(F^{kl})_{;k}/4\pi.$$

Теперь преобразуем $\mathscr{P}_{a;i} = d\mathscr{P}_a/dx^i = \mathscr{P}_{a,i}$:

$$\frac{d\mathscr{P}}{dx^i} = \sum_a \frac{4\pi}{3}\frac{g_a}{(2\pi ch)^3}\int\limits_{mc^2}^{\infty} dE(E^2 - m_a^2c^4)^{3/2}\frac{d}{dx^i}\left\{1 + \exp\left[\frac{E-\mu_a}{T_a}\right]\right\}^{-1}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{d}{dx^i}\left\{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\right\}^{-1} = \left[E\left(\frac{1}{T}\right)_{,i} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,i}\right]\frac{d}{dE}\left\{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right)\right\}^{-1},$$

после интегрирования по частям находим

$$\mathscr{P}_{a,i} = \frac{4\pi}{3}\sum_a \frac{g_a T_a}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{mc^2}^{\infty}\frac{dE}{1 + \exp\left[(E-\mu_a)/T_a\right]} \times$$

$$\times \frac{d}{dE}\left\{(E^2 - m_a^2c^4)^{3/2}\left[E\left(\frac{1}{T_a}\right)_{,i} - \left(\frac{\mu_a}{T_a}\right)_{,i}\right]\right\}.$$

Дифференцируя по E и используя формулы (5.3), (5.4), (5.6), получаем

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx^i} = -\sum_a T_a \left\{ \mathcal{W}_a \left(\frac{1}{T_a}\right)_{,i} - \left(\frac{\dot{\mu}_a}{T_a}\right)_{,i} n_a \right\}.$$

Используем теперь (5.5) и тот факт, что $B_{,i} = 0$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx^i} = -\sum_a T_a \left\{ \mathcal{W}_a \left(\frac{1}{T_a}\right)_{,i} + e_a n_a \left[\left(\frac{U_a^k}{T_a}\right) A_{k,i} + A_k \left(\frac{U_a^k}{T_a}\right)_{,i} \right] \right\}.$$

Член $A_k(U_a^k/T_a)_{,i}$ обращается в нуль вследствие уравнений Киллинга: $(U_a^k/T_a)_{,i} = 0$. Поскольку $U^k d/dx^k = 0$, можем написать $A_{k,i}U^k = (A_{k,i} - A_{i,k})U^k = F_{ik}U^k$. В силу (5.9) имеем

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx^i} = -\sum_a T_a \mathcal{W}_a \left(\frac{1}{T_a}\right)_{,i} - F_{ik}\frac{j^k}{c},$$

$$T_{i\ ;k}^{k} = \sum_a \mathcal{W}_a T_a \left\{ \frac{U_{ai,k}U_a^k}{T_a} + \left(\frac{1}{T_a}\right)_{,i} \right\} + F_{il} \left\{ (F^{lk})_{;k} + \frac{4\pi j^l}{c} \right\} \frac{1}{4\pi}.$$

Сумму по сортам зарядов с помощью соотношений $U_{ak;i}U_a^k = 0$, $U_a^k U_{ak} = 1$, $U_a^k(1/T_a)_{;k} = 0$, $U_{a\ ;k}^{k} = 0$ можно привести к виду

$$\sum_a \mathcal{W}_a T_a U_a^k \left\{ \left(\frac{U_{ai}}{T_a}\right)_{;k} + \left(\frac{U_{ak}}{T_a}\right)_{;i} \right\},$$

откуда в силу уравнений Киллинга (4.2) следует, что эта сумма равна нулю. В результате получаем

$$T_{i\ ;k}^{k} = \frac{1}{4\pi} F_{im} \left\{ F^{mk}{}_{;k} + \frac{4\pi j^m}{c} \right\}.$$

Таким образом, из уравнений Эйнштейна следует, что

$$F_{im} \left\{ F^{mk}{}_{;k} + 4\pi j^m/c \right\} = 0. \tag{7.1}$$

Сделать отсюда вывод, что уравнения Максвелла

$$F^{mk}{}_{;k} + 4\pi j^m/c = 0 \tag{7.2}$$

целиком содержатся в уравнениях Эйнштейна, можно только в том случае, если определитель матрицы электромагнитного поля отличен от нуля: $\det F_{im} \neq 0$. В нашем случае электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, так что один из двух инвариантов поля равен нулю. Это именно тот особый случай, когда уравнения Максвелла не являются следствием уравнений Эйнштейна [7]. Поскольку в нашем случае $\det F_{ik} = 0$, существует нетривиальное решение уравнения (7.1), и, значит, выражения $F^{km}{}_{;m} + 4\pi j^k/c$, вообще говоря, нулю не равны. Из четырех уравнений (7.1) в нашем случае ($F_{2k}=0$, $j^1=0$, $F^{1m}{}_{;m}=0$, ранг матрицы F_{ik} равен единице) фактически остается только одно уравнение

$$F_{10}\left(F^{0m}{}_{;m}+4\pi j^0/c\right)+F_{13}\left(F^{3m}{}_{;m}+4\pi j^3/c\right)=0. \tag{7.3}$$

При наличии относительного движения подсистем электронов и ионов $F_{13}\neq 0$ в любой системе отсчета. Тогда из (7.3) следует, что уравнения Эйнштейна выполняются при произвольной функции $F^{0m}{}_{;m}+4\pi j^0/c$, если при этом

$$F^{3m}{}_{;m}+\frac{4\pi j^3}{c}=-\left(F^{0m}{}_{;m}+\frac{4\pi j^0}{c}\right)\frac{F_{10}}{F_{13}}.$$

С другой стороны, тот факт, что электромагнитное поле, потенциалы A_i которого входят явно в функцию распределения, создается самими зарядами нашей системы, математически выражается именно уравнениями Максвелла (7.2), связывающими потенциалы поля с плотностью заряда и тока.

Таким образом, из двух уравнений Максвелла $F^{ik}{}_{;k}=-4\pi j^i/c$, $i=0,3$, одно является независимым, а второе — следствием первого и уравнений Эйнштейна.

8. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Подставляя в (6.1) выражения (5.8) для тензора энергии-импульса частиц, (5.12)–(5.16) для тензора энергии-импульса электромагнитного поля и (6.10)–(6.14) для тензора Риччи, приходим к следующим уравнениям гравитационного поля:

$$\begin{aligned}\exp(2F_1-2F_0)R_{00}=F_0''+\frac{1}{2}\exp\left[2(F_0-F_3)\right]g_3'^2=\frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\times\\ \times\left\{\exp(2F_1)\left[\exp(2F_3)(F^{13})^2+\exp(-2F_0)(F_0^1)^2\right]\frac{1}{8\pi}+\right.\\ \left.+\sum_a\left[\frac{(1-g_3W_a/c)^2(\mathscr{E}_a+\mathscr{P}_a)}{(1-g_3W_a/c)^2-\exp(2F_3-2F_0)W_a^2/c^2}-\frac{\mathscr{E}_a-\mathscr{P}_a}{2}\right]\right\},\end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}&\exp(2F_1)R_0^3=-\frac{1}{2}\left[\exp\left\{2(F_0-F_3)\right\}g_3'\right]'=\\ &=\frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\left\{\sum_a\frac{(W_a/c)(1-g_3W_a/c)(\mathscr{E}_a+\mathscr{P}_a)}{(1-g_3W_a/c)^2-\exp(2F_3-2F_0)W_a^2/c^2}+\exp(2F_1)\frac{F_0^1F^{31}}{4\pi}\right\},\end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}&\exp(4F_1)R^{11}=\left[2(F_2'F_3'+F_3'F_0'+F_0'F_2')-F_1''\right]+\frac{1}{2}\exp(2F_0-2F_3)g_3'^2=\\ &=\frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\left\{\sum_a\frac{\mathscr{E}_a-\mathscr{P}_a}{2}+\exp(2F_1)\left[\exp(2F_3)(F^{13})^2-\exp(-2F_0)(F_0^1)^2\right]\frac{1}{8\pi}\right\},\end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}&\exp(2F_1+2F_2)R^{22}=-F_2''=\\ &=\frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\left\{\sum_a\frac{\mathscr{E}_a-\mathscr{P}_a}{2}+\exp(2F_1)\left[-\exp(2F_3)(F^{13})^2+\exp(-2F_0)(F_0^1)^2\right]\frac{1}{8\pi}\right\},\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\exp(2F_1 + 2F_3)R^{33} = -F_3'' + \frac{1}{2}\exp\left[2(F_0 - F_3)\right] g_3'^2 =$$
$$= \frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\left\{\exp(2F_1)\left[\exp(2F_3)(F^{13})^2 + \exp(-2F_0)(F_0^1)^2\right]\frac{1}{8\pi} + \right.$$
$$\left. + \sum_a \left[\frac{\exp(2F_3 - 2F_0)(W_a/c)^2(\mathscr{E}_a + \mathscr{P}_a)}{(1 - g_3 W_a/c)^2 - \exp(2F_3 - 2F_0)W_a^2/c^2} + \frac{\mathscr{E}_a - \mathscr{P}_a}{2}\right]\right\}. \tag{8.5}$$

Пять уравнений (8.1)–(8.5) содержат пять функций, описывающих гравитационное поле (F_0, F_1, F_2, F_3, g_3), и две функции, описывающие электромагнитное поле (A_0 и A_3), которые входят в уравнения через выражения (5.3), (5.4) и (5.11). Итого семь функций. Система замыкается соотношением (6.4) и одним из уравнений Максвелла

$$\exp(-2F_1)\left[\exp(2F_1)F^{01}\right]' = -4\pi\sum_a e_a n_a \frac{\exp(-F_0)}{\sqrt{(1-g_3W_a/c)^2 - \exp(2F_3 - 2F_0)W_a^2/c^2}}. \tag{8.6}$$

Второе уравнение Максвелла

$$\exp(-2F_1)\left[\exp(2F_1)F^{31}\right]' = -4\pi\sum_a e_a n_a \frac{\exp(-F_0)W_a/c}{\sqrt{(1-g_3W_a/c)^2 - \exp(2F_3 - 2F_0)W_a^2/c^2}} \tag{8.7}$$

является, как показано выше, следствием этой системы уравнений. Плотности зарядов n_a и их температуры выражаются через те же искомые функции формулами (5.7) и (4.3).

Из уравнений (8.1)–(8.5) следуют соотношения

$$F_0'' + F_3'' = F_1'' - F_2'' = \frac{16\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\sum_a \mathscr{P}_a, \tag{8.8}$$

$$F_2'(F_3' + F_0') + F_3'F_0' + \frac{1}{4}\exp(2F_0 - 2F_3)g_3'^2 =$$
$$= \frac{8\pi G}{c^4}\exp(2F_1)\left\{\sum_a \mathscr{P}_a + \exp(2F_1)\left[\exp(2F_3)(F^{13})^2 - \exp(-2F_0)(F_0^1)^2\right]\frac{1}{8\pi}\right\}. \tag{8.9}$$

Соотношение (8.9) не содержит вторых производных и по существу является первым интегралом системы уравнений.

Чтобы связать координату x^1 с расстоянием от оси цилиндра, «выключим» электромагнитное поле ($F_0^1 = F^{13} = 0$) и «остановим» заряды ($W_a = 0$). Тогда из уравнений (8.4) и (8.5) следует

$$F_3'' = F_2'' \quad (F_0^1 = F^{13} = 0, \quad W_a = 0).$$

Если константу интегрирования положить равной единице, $F_2' = F_3' + 1$, то вдали от материи криволинейные циклические координаты x^2 и x^3 будут соответствовать цилиндрическим координатам φ и z при условии, что координата x^1 связана с радиусом соотношением $x^1 = \ln r$. Это соответствует галилеевской метрике (3.1). Направление $x^1 \to \infty$ — это удаление по радиусу от канала тока, а $x^1 = -\infty$ отвечает оси цилиндра.

Для бесконечно длинной системы на больших расстояниях по сравнению с поперечными размерами метрика не становится галилеевской. При $x^1 \to \infty$ функции F_i, удовлетворяющие уравнениям (8.1)–(8.5), не стремятся к нулю. Дело в том, что цилиндрическая симметрия системы с зависимостью только от одной координаты x^1 — это промежуточная асимптотика для расстояний от оси, малых по сравнению с длиной токового канала L. На расстояниях x^1, больших по сравнению с L, метрика будет галилеевской, но на таких расстояниях уравнения (8.1)–(8.5) уже неприменимы, ибо x^3 перестает быть циклической координатой, и система становится зависящей как минимум от двух переменных (x^1 и x^3).

Конечность величины тока и заряда на единицу длины подразумевает, что интегралы (5.10) сходятся. Тогда $\mathscr{E}_a$, $\mathscr{P}_a$, n_a как функции x^1 быстро стремятся к нулю при удалении от оси:

$$\mathscr{E}_a = 0, \quad \mathscr{P}_a = 0, \quad n_a = 0, \quad x^1 \to \infty. \tag{8.10}$$

Из уравнений Максвелла (8.6) и (8.7) находим

$$\exp(2F_1)F^{01} = -2Q, \quad \exp(2F_1)F^{31} = -2I/c, \quad x^1 \to \infty. \tag{8.11}$$

9. БАЛАНС ЭНЕРГИЙ

Равновесие токового канала возможно, если энергии магнитного и гравитационного сжатий уравновешены электростатическим отталкиванием объемного заряда и энергией теплового разлета частиц:

$$\frac{I^2}{2c^2} + \frac{G}{2}\left(\sum_a N_a m_a\right)^2 = \frac{Q^2}{2} + \sum_a N_a T_a. \tag{9.1}$$

Эта формула выведена ранее [3] в предположении, что электроны и ионы представляют собой больцмановские идеальные газы, а гравитационное взаимодействие зарядов описывается уравнениями Ньютона. Это означает, что формула (9.1) применима, если только скорость относительного движения подсистем электронов и ионов мала по сравнению со скоростью света. Чтобы обобщить этот баланс на случай $W_a \sim c$, пришлось выйти за рамки ньютоновского приближения и обратиться к уравнениям Эйнштейна.

Условие баланса в общей теории относительности можно получить из первого интеграла (8.9), просто устремляя в нем $x^1 \to \infty$. Учитывая, что $F_0^1 = \exp(2F_0)(F^{01} - g_3F^{31})$, а также (8.10) и (8.11), имеем

$$\frac{1}{4}\exp(2F_0 - 2F_3){g_3'}^2 + F_0'F_3' + F_2'(F_3' + F_0') = 4\frac{GI^2}{c^6}\left[\exp(2F_3) - \exp(2F_0)\left(\frac{cQ}{I} - g_3\right)^2\right]. \tag{9.2}$$

Интегрируя соотношение (8.8), находим

$$F_0' + F_3' = \frac{8G}{c^4}\sum_a \mathcal{P}_a, \tag{9.3}$$

$$\mathcal{P}_a = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \exp(2F_1)\mathscr{P}_a, \tag{9.4}$$

$\mathcal{P}_a$ — давление зарядов сорта a, проинтегрированное по поперечному сечению канала тока.

Первые два члена в левой части (9.2) пропорциональны G^2. Если гравитацией вообще пренебречь, т. е. сократить (9.2) на общий пропорциональный G множитель, а затем положить $G = 0$ и подставить вместо F_i их галилеевские значения, то получаем условие равновесия токового канала, справедливое, как это следует из нашего вывода, для ферми-газов электронов и ионов при произвольной степени их вырождения (а не только в приближении больцмановских идеальных газов):

$$\sum_a \mathcal{P}_a = \frac{I^2}{2c^2} - \frac{Q^2}{2}.$$

Учет гравитации в общем балансе сил необходим тогда, когда электромагнитный вклад мал, а общее число частиц огромно, так что

$$\frac{I^2}{c^2} - Q^2 \quad \text{и} \quad G\left(\sum_a N_a m_a\right)^2$$

— величины одного порядка. Такая ситуация может реализоваться в межгалактических токах либо когда и ток, и заряд оба не очень велики, либо если сжатие магнитным полем тока с большой точностью скомпенсировано электростатическим расталкиванием объемного заряда. В последнем случае дрейфовая скорость может быть релятивистской, и тогда ньютоновского приближения недостаточно.

Будем для простоты считать, что

$$\mathscr{P}_a \ll \mathscr{E}_i. \tag{9.5}$$

В силу неравенства $m_e \ll m_i$ электроны могут при этом быть релятивистскими и даже ультрарелятивистскими. Гравитационное поле системы является слабым, если $GN_a m_a/c^2 \ll 1$ и $GI^2/c^6 \ll 1$. Первый параметр количественно характеризует искажение метрики зарядами, а второй — искажение метрики создаваемым этими зарядами электромагнитным полем. В слабом гравитационном поле при $(I/c)^2 - Q^2 \sim G(m_a N_a)^2$ искажение метрики электромагнитным полем мало по сравнению с искажением зарядами:

$$\frac{G}{c^4}\left(\frac{I^2}{c^2} - Q^2\right) \sim \frac{(G m_a N_a)^2}{c^4} \ll \frac{G N_a m_a}{c^2}.$$

В этом случае в разложении по параметру $1/c^2$ искажение метрики зарядами — эффект порядка $1/c^2$, а электромагнитным полем — порядка $1/c^4$.

На достаточно большом расстоянии от оси токового канала в качестве функций F_0, F_3 и g_3 (но не их производных!) в (9.2) можно подставить их галилеевские значения — нули. В силу условия (9.5) для F_2' также следует подставить галилеевское значение $F_2' = 1$. Имеем

$$\frac{1}{4} g_3'^2 + F_0' F_3' + \frac{8G}{c^4} \sum_a \mathcal{P}_a = 4\frac{GI^2}{c^6}\left[1 - \left(\frac{cQ}{I}\right)^2\right]. \tag{9.6}$$

В члене $F_0'F_3'$ оба множителя, равно как и g_3', достаточно найти в первом порядке по $1/c^2$. С этой точностью из (8.1), (8.2) и (8.5) находим

$$F_0' = -F_3' = \frac{2G}{c^4} \sum_a \mathcal{E}_a \frac{1 + W_a^2/c^2}{1 - W_a^2/c^2}, \tag{9.7}$$

$$g_3' = \frac{8G}{c^4} \sum_a \mathcal{E}_a \frac{W_a/c}{1 - W_a^2/c^2}, \tag{9.8}$$

$$\mathcal{E}_a = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \exp(2F_1) \mathscr{E}_a,$$

$\mathcal{E}_a$ — энергия подсистемы сорта a в расчете на единицу длина канала. После подстановки (9.7) и (9.8) в (9.6), получаем

$$\frac{G}{2} \sum_a \frac{\mathcal{E}_a}{c^2} \frac{1 + W_a/c}{1 - W_a/c} \sum_b \frac{\mathcal{E}_b}{c^2} \frac{1 - W_b/c}{1 + W_b/c} + \frac{I^2}{2c^2} = \frac{Q^2}{2} + \sum_a \mathcal{P}_a,$$

откуда

$$\frac{G}{2} \left(\sum_a \frac{\mathcal{E}_a}{c^2} \right)^2 + \frac{2G\mathcal{E}_e\mathcal{E}_i}{c^6} \frac{(W_e - W_i)^2}{(1 - W_e^2/c^2)(1 - W_i^2/c^2)} + \frac{I^2}{2c^2} = \frac{Q^2}{2} + \sum_a \mathcal{P}_a. \tag{9.9}$$

Первые два члена в (9.9), пропорциональные G, представляют собой энергию гравитационного сжатия. Первый член — обычное ньютоновское выражение для энергии гравитационного сжатия на единицу длины (ср. с (9.1)). Второй член в левой части (9.9) описывает дополнительное гравитационное притяжение подсистем, вызванное их относительным движением. Этот эффект не содержится в ньютоновском приближении. При $V/c \ll 1$ он пренебрежимо мал, однако в случае ультрарелятивистской скорости дрейфа может стать преобладающим. Формула (9.9) справедлива независимо от степени вырождения ферми-газа электронов и/или ионов. Использовано неравенство (9.5).

Гравитационное притяжение подсистем, связанное с их относительным движением, в каналах сильного тока содержит дополнительную малость в силу неравенства $m_e \ll m_i$. Этот эффект должен значительно ярче проявляться в сверхтекучих звездах, поскольку там массы нормальной и сверхтекучей компонент могут быть одного порядка, взаимное трение этих подсистем отсутствует и скорость их относительного движения не мала.

Для нерелятивистских больцмановских газов ($\mathcal{P}_a = N_aT_a$, $\mathcal{E}_a = N_am_ac^2$, N_a — число зарядов сорта a на единицу длины канала тока) формула (9.9) дает

$$\frac{I^2}{2c^2} + \frac{G}{2} \left(\sum_a N_a m_a \right)^2 + \frac{2GN_eN_im_em_i}{c^2} \frac{(W_e - W_i)^2}{(1 - W_e^2/c^2)(1 - W_i^2/c^2)} = \frac{Q^2}{2} + \sum_a N_aT_a. \tag{9.10}$$

В пределе нерелятивистской скорости дрейфа (9.10) переходит в (9.1).

Благодарю Д. А. Киржница за обсуждение.

Литература

1. A. L. Peratt, *Physics of Plasma Universe*, Springer-Verlag, New York, Berlin (1992).
2. W. H. Bennet, Phys. Rev. **5**, 890 (1934).
3. B. E. Meierovich and A. L. Peratt, IEEE Trans. Plasma Sci. **20**, 891 (1992).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
5. J. Ehlers, in *Relativity and gravitation*, Gordon and Breach Sci. Publ., London (1971), p. 150.
6. K. A. Bronnikov, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 201 (1979).
7. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco (1973), § 20.