ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 2(8), стр. 483–498

ТЕОРИЯ ОДНОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО КВАНТОВОГО КАСКАДНОГО ЛАЗЕРА

В. Ф. Елесин

Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 февраля 1997 г.

Развита теория стационарной одномодовой генерации когерентного каскадного лазера на квантовых ямах. Рассмотренная модель генерации лазера является примером строго квантовомеханической задачи, в которой не используются приближенные кинетические подходы учета диссипативных процессов рассеяния. Найдены точные волновые функции системы в слабом и сильном электромагнитном полях, позволяющие найти мощность и частоту генерации в зависимости от тока когерентной накачки и параметров системы. Показано, что при накачке моноэнергетическими электронами зависимость мощности имеет нелинейный (корневой) характер и тенденцию к насыщению, когда поле становится сильным. Предсказана возможность повышения эффективности когерентной накачки с помощью подстройки энергии электронов накачки, приводящей к линейной зависимости мощности, высокому кпд и низким пороговым токам. Показано, что инверсная населенность не является необходимым условием генерации в когерентном лазере. В частности, в режиме сильного поля населенность нижнего уровня превосходит населенность верхнего, а в режиме оптимальной подстройки они совпадают.

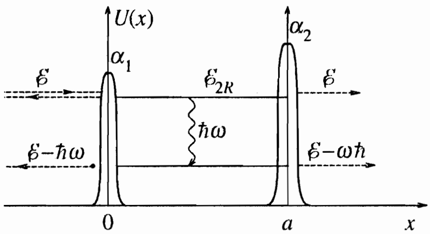
1. ВВЕДЕНИЕ

В 1971 г. Казаринов и Сурис [1] предложили новый тип полупроводникового лазера, в котором излучательные переходы происходят между уровнями (подзонами) размерного квантования. Спустя почти четверть века это предложение было реализовано в наноструктурах, где основными элементами являются две квантовые ямы с рабочими уровнями (подзонами) в каждой из них [2] («косые переходы») или одна квантовая яма с двумя рабочими уровнями («вертикальные переходы») [3]. Накачка на верхний рабочий уровень осуществляется за счет резонансного туннелирования.

Эти лазеры, названные квантовыми каскадными лазерами, обладают важными преимуществами: возможностью перестройки длины волны от инфракрасного до субмиллиметрового диапазона, слабой зависимостью порогового тока от температуры и др.

Квантовым каскадным лазерам присущ ряд важных особенностей, таких как один тип заряда (униполярность), одинаковые знаки массы подзон, снятие запрета на межподзонные безызлучательные переходы и др. Еще одной принципиальной особенностью этих лазеров является, вообще говоря, когерентный характер резонансного туннелирования, обеспечивающего накачку.

Как известно, резонансное туннелирование может быть когерентным или некогерентным в зависимости от параметров структуры и температуры. Если времена диссипативной релаксации электронов τ_{ph}, разрушающие когерентность, меньше, чем обратные ширины уровней размерного квантования Γ_j^{-1}, то реализуется некогерентное туннелирование [4]. В этом случае туннелирование моделируется внешним источником, поставляющим электроны с некоторой фиксированной мощностью.



Именно такой подход для квантовых каскадных лазеров использовался в работах [1, 5–7]. Он позволяет описать некоторые из отмеченных особенностей. Так, например, в работах [6] была развита кинетическая теория квантового каскадного лазера, описывающая процессы взаимодействия электронов с оптическими фононами, которые приводят, в частности, к большому пороговому току. Было показано, что можно выбрать режим локальной энергетической перенаселенности, в котором пороговый ток может быть снижен на 1-2 порядка за счет использования эффекта перепоглощения оптических фононов.

В то же время при выполнении обратного неравенства $\tau_{ph} > \Gamma_j^{-1}$, которое может реализоваться в квантовых ямах и проволоках, а особенно в квантовых точках, необходимо учитывать когерентность резонансного туннелирования. В качестве первого шага естественно рассмотреть теорию квантовых каскадных лазеров вообще без учета процессов рассеяния, т. е. в приближении, называемом когерентным. Такой лазер (для конкретности, когерентный лазер) представляет значительный интерес. Действительно, во-первых, когерентное резонансное туннелирование может обеспечить более эффективную накачку, так как происходит накопление электронов в яме за счет эффектов интерференции. Во-вторых, когерентный лазер является интересным физическим объектом, в котором, как будет показано ниже, генерация может идти без участия диссипативных процессов. Последние необходимы для осуществления акта излучения в лазерной теории для объектов больших размеров (см., например, [8, 9]). Поэтому можно ожидать появления новых эффектов и особенностей при генерации когерентного лазера. Необходимо также отметить, что подобный лазер относится к открытым системам, сильно зависящим от граничных условий и находящимся в токовом состоянии.

Цель настоящей работы — развитие теории стационарной генерации когерентного лазера, вычисление мощности и частоты электромагнитного поля в зависимости от тока когерентной накачки и параметров системы. Нами рассмотрена простая модель, допускающая аналитическое решение и позволяющая представить результаты в аналитической форме для широкого интервала полей от слабого до сильного. Генерация происходит в одной квантовой яме (точке) (см. рисунок), имеющей два рабочих уровня (подзоны) с энергиями $\mathscr{E}_{2R}$ и $\mathscr{E}_{1R}$, разница которых определяет частоту электромагнитного поля $\hbar\omega$. (Далее для краткости будем говорить о яме и уровнях.) Электроны с энергией $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}_{2R}$ поступают в яму слева с постоянной скоростью, совершают излучательный переход на уровень с энергией $\mathscr{E}_{1R}$ и покидают яму за счет туннелирования (или снова переходят на уровень 2).

Следует отметить, что нельзя находить волновые функции открытой системы в электромагнитном поле с помощью обычно используемого в теории лазеров разложения по собственным функциям гамильтониана без поля (см., например, [9]) из-за их неортогональности. Мы применили другой подход, состоящей в отыскании установившихся во времени решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям. Такой метод использовался ранее для задач резонансного туннелирования в переменном поле, для резонансно-туннельных диодов (см., например, [10–12]), но, как правило, в первом приближении теории возмущений по полю. В применении к лазерам это позволяет найти только коэффициент усиления на пороге генерации. В настоящей работе найдены волновые функции без использования теории возмущений и построена теория когерентного лазера слабого и сильного полей.

Наша модель существенно отличается от модели, используемой в недавно опубликованной работе [13], по-видимому, первой из посвященных теории когерентного лазера. В ней рассматривалась специфическая нестационарная модель (автор называет ее моделью микролазера), в которой электронный волновой пакет попадает в квантовую яму и излучает квант поля. Найденные численные решения позволяют проследить процесс излучения и представляют интерес. Однако они не дают возможности (как признает и сам автор) найти мощность, частоту, пороговый ток, т. е. все то, что необходимо для описания реального эксперимента.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 дано описание модели и сформулированы основные уравнения. Волновые функции и токи поляризации найдены в разд. 3 в общем виде, а в разд. 4 для важного предельного случая высоких барьеров. Разд. 5 посвящен анализу генерации когерентного лазера с моноэнергетической накачкой, а разд. 6 — генерации когерентного лазера с ферми-распределенной накачкой.

Далее мы будем рассматривать одномерный случай: в отсутствие процессов рассеяния нетрудно провести обобщение для учета латерального движения. Сдвиги уровней энергий, вызванные накоплением заряда в яме, предполагаются малыми по сравнению с Γ_j, и температура считается равной нулю.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для установления основных закономерностей изучим следующую модель когерентного квантового каскадного лазера. На рисунке изображена одномерная квантовая яма с барьерами в точках $x = 0$ и $x = a$. Параметры ямы подобраны таким образом, что два нижних уровня с энергиями $\mathscr{E}_{1R}$ и $\mathscr{E}_{2R}$ имеют разность, примерно равную частоте электромагнитного поля: $\hbar\omega \simeq \mathscr{E}_{2R} - \mathscr{E}_{1R} = \hbar\omega_{21}$. Слева на систему падает стационарный поток электронов с плотностью пропорциональной q^2 и энергией $\mathscr{E}$ приблизительно равной $\mathscr{E}_{2R}$.

Электромагнитное поле, которое с хорошей точностью можно считать классическим,

$$E_x(z,t) = E(t)\sin(kz)\cos(\omega t + \varphi(t)), \tag{1}$$

излучается при переходе электронов с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1.

При этом в соответствии с экспериментом [2, 3] принимается, что поле поляризовано перпендикулярно плоскости ямы (т. е. по оси x), а волновой вектор направлен вдоль плоскости (по оси z). Оптический резонатор длиной L выделяет эти моды. Мы ограничимся рассмотрением одномодового режима. Как известно, уравнения для медленно меняющихся амплитуды поля $E(t)$ и фазы $\varphi(t)$ имеют вид (см., например, [8,9])

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{E}{2\tau_0} - \frac{2\pi}{\kappa} J_c(k), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} E + (\omega - \Omega) E = -\frac{2\pi}{\kappa} J_s(k), \tag{3}$$

$$J_{c,s}(k) = \int_0^a dx\, e^{ikx} J_{c,s}(x), \tag{4}$$

где $J_c(k)$ и $J_s(k)$ — фурье-компоненты токов поляризации, совпадающие по фазе с полем (J_c) и сдвинутые на $\pi/2$ (J_s), описывающие межуровневые переходы; τ_0 — время жизни фотона в резонаторе, $\Omega = kc$ — собственные частоты резонатора, κ — диэлектрическая постоянная, c — скорость света. Токи $J_c(x)$ и $J_s(x)$ выражаются через волновую функцию системы $\Psi(x,t)$, которая подчиняется следующему уравнению Шредингера:

$$i\frac{2m^*}{\hbar}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi + \hat{V}(x,t)\Psi, \tag{5}$$

где m^* — эффективная масса электрона,

$$U(x) = \alpha_1 \delta(x) + \alpha_2 \delta(x-a), \quad \alpha_i = \frac{2m^* \tilde{\alpha}_i}{\hbar^2}$$

— потенциальная энергия барьеров. Последнее слагаемое в (5)

$$\hat{V}(x,t)\Psi = \frac{2ei}{\hbar} A_x(t) \frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем, $A_x(t)$ — вектор-потенциал в кулоновской калибровке, отличный от нуля в яме. Как известно, такая форма взаимодействия более предпочтительна для нелокализованных волновых функций по сравнению с Ex (см., например, [13]). Выражая $A_x(t)$ через амплитуду поля $E(t)$, перепишем последнее слагаемое в виде

$$\hat{V}\Psi = V(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\frac{\partial}{\partial x}\Psi, \quad V = -\frac{eE}{\omega}. \tag{6}$$

К системе (2), (3) и (5) следует добавить общее выражение для тока

$$J(x,t) = -\frac{ie}{2m^*}\left[\Psi^* \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} - \text{c.c.}\right]$$

и граничные условия для $\Psi(x,t)$:

$$\begin{gathered} \Psi(-0,t) = \Psi(+0,t), \quad \Psi(-a,t) = \Psi(+a,t), \\ \Psi'(+0,t) - \Psi'(-0,t) = \alpha_1 \Psi(0,t), \quad \Psi' = \partial\Psi/\partial x, \\ \Psi'(+a,t) - \Psi'(-a,t) = \alpha_2 \Psi(a,t). \end{gathered} \tag{7}$$

Учет потока падающих слева и отраженных электронов будет проведен ниже (см. (12)) после конкретизации вида функции $\Psi(x,t)$.

Следует отметить, что в (5) опущены квадратичные по $A(t)$ слагаемые. Это обычно используемое в теории лазеров приближение (см., например, [9]) справедливо и здесь по параметру $V/p = eE/\omega p \ll 1$, где p — импульс электрона (см. (21)).

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ТОКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ЛАЗЕРА

Установившееся решение уравнения (5) ищем в виде ряда:

$$\Psi(x,t) = \sum_n \exp\left[-it\left(\frac{\mathscr{E}}{\hbar} + n\omega\right)\right]\psi_n(x), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \tag{8}$$

где функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$(\mathscr{E} + n\omega)\psi_n(x) + \psi_n''(x) = V\left[\psi_{n-1}'(x) - \psi_{n+1}'(x)\right]. \tag{9}$$

Здесь $\psi_n(x)$ описывает состояние с энергией $\mathscr{E} + n\omega$, ($\mathscr{E}$ и ω есть энергия и частота, умноженные на $2m^*$, далее $\hbar = c = 1$).

Хорошо известно, что в процессе генерации основной резонансный вклад вносят два уровня [14]. В нашем случае — это верхний уровень с энергиями $\mathscr{E}_{2R}$ и нижний с $\mathscr{E}_{1R}$, которым соответствуют функции $\psi_0(x)$ и $\psi_{-1}(x)$. Поэтому волновая функция (8) сводится к двум слагаемым

$$\Psi(x,t) \simeq \psi_0(x)e^{-i\mathscr{E}t} + \psi_{-1}(x)e^{-it(\mathscr{E}-\omega)}, \tag{10}$$

причем $\psi_0(x)$ и $\psi_{-1}(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}\psi_0(x) + \psi_0''(x) = V\psi_{-1}', \\ &(\mathscr{E} - \omega)\psi_{-1}(x) + \psi_{-1}''(x) = -V\psi_0' \end{aligned} \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\psi_n(0)\left(1 - \frac{\alpha_1}{ip_n}\right) + \frac{\psi_n'(0)}{ip_n} = 2q\delta_{n0}, \\ &\psi_n(a)\left(1 - \frac{\alpha_2}{ip_n}\right) - \frac{\psi_n'(a)}{ip_n} = 0, \quad p_n = \sqrt{\mathscr{E} + n\omega}. \end{aligned} \tag{12}$$

Последние получаются из (7), если подставить (10) и учесть падающий слева с энергией $\mathscr{E}$ постоянный поток электронов, пропорциональный q, а также уход электронов из ямы с энергиями $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E} - \omega$. Установившееся решение (10) справедливо, когда в системе при постоянном потоке электронов поле достигает стационарного значения.

С помощью (10) выражения для токов $J_c(x)$ и $J_s(x)$ можно представить с помощью функций $\psi_0(x)$, $\psi_{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} &J_c(x) = -\frac{ie}{2m^*}\left[(\psi_0^*\psi_{-1}' + \psi_{-1}^*\psi_0') - \text{c.c.}\right], \\ &J_s(x) = \frac{e}{2m^*}\left[(\psi_{-1}^*\psi_0' - \psi_0^*\psi_{-1}') + \text{c.c.}\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что фурье-компоненты $J_c(x)$ и $J_s(k)$ можно заменить просто интегралами, так как $ka \ll 1$, т. е.

$$J_{c,s}(k) \simeq \frac{1}{a}\int_0^a dx\, J_{c,s}(x). \tag{14}$$

Обычно (см., например, [10, 11] и ссылки там) ищут решение по теории возмущении по V в форме (10), подставляя его в исходное уравнение (5) и ограничиваясь первым приближением. Однако благодаря полученной системе уравнений (11), а также выбранной форме взаимодействия (7) мы можем найти точное решение (11), не прибегая к теории возмущений.

Решение системы (11) можно искать в виде

$$\psi_n(x) = A_n e^{\gamma x}, \quad n = 0, -1, \tag{15}$$

причем собственные значения γ удовлетворяют уравнению

$$\gamma^4 + 2\gamma^2 \left(\mathscr{E} + \frac{V^2 - \omega}{2}\right) + \mathscr{E}^2 - \mathscr{E}\omega = 0 \tag{16}$$

и равны

$$\begin{gathered}
\gamma_{1,2} = \pm\gamma_-, \quad \gamma_{3,4} = \pm\gamma_0, \\
\gamma_- = i\sqrt{\mathscr{E} + \frac{V^2 - \omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{V^2 - \omega}{2}\right)^2 + \mathscr{E}V^2}}, \\
\gamma_0 = i\sqrt{\mathscr{E} + \frac{V^2 - \omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2 - \omega}{2}\right)^2 + \mathscr{E}V^2}}.
\end{gathered} \tag{17}$$

Общее решение (11) представим в форме

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{4} A_{nj} \exp(\gamma_j x). \tag{18}$$

Коэффициенты A_{0j} и A_{-1j} связаны соотношением, получаемым из (12):

$$A_{-1j} = \varepsilon_j A_{0j}, \quad \varepsilon_j = \frac{\gamma_j \overline{V}}{\mathscr{E} - \omega + \gamma_j^2}, \quad \overline{V} = \frac{eE}{\omega}. \tag{19}$$

Подставляя (18), (19) в граничные условия (12), приходим к системе алгебраических уравнений для A_{nj}:

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{4} A_{0j}(1 - \beta_j) = 2q, \quad \sum_j A_{0j} \exp(\gamma_j a) \left(1 - \tilde{\beta}_j\right) = 0, \\
\sum_j A_{0j}(1 - \beta_{-j})\varepsilon_j = 0, \quad \sum_j A_{0j} \exp(\gamma_j a) \left(1 - \tilde{\beta}_{-j}\right) \varepsilon_j = 0,
\end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}
\beta_j = \frac{\alpha_1 - \gamma_j}{ip}, \quad \beta_{-j} = \frac{\alpha_1 - \gamma_j}{ip_-}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\alpha_2 + \gamma_j}{ip}, \\
\tilde{\beta}_{-j} = \frac{\alpha_2 + \gamma_j}{ip_-}, \quad p = \sqrt{\mathscr{E}}, \quad p_- = \sqrt{\mathscr{E} - \omega}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Решение системы (20) можно записать в следующем виде:

$$A_{0j} = \frac{2q(-1)^{j+1}}{\Delta} \sum_{l\neq j} \sum_{\substack{m\neq j,l \\ s\neq j,l}} \exp(\gamma_l a) \left(1 - \tilde{\beta}_l\right) \Lambda_{lj} \Delta_{ms}(p_-) \varepsilon_m \varepsilon_s, \tag{22}$$

где

$$\Lambda_{lj} = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad l = 3, \quad j = 1, 2, \\ -1 & \text{при} \quad l = 2, \quad j = 3, 4, \\ +1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь Δ — определитель системы (20):

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \varepsilon_1\varepsilon_2\Delta_{12}(p_-)\Delta_{34}(p) + \varepsilon_1\varepsilon_4\Delta_{14}(p_-)\Delta_{23}(p) + \varepsilon_2\varepsilon_3\Delta_{23}(p_-)\Delta_{14}(p) - \\ & - \varepsilon_1\varepsilon_3\Delta_{13}(p_-)\Delta_{24}(p) - \varepsilon_2\varepsilon_4\Delta_{24}(p_-)\Delta_{13}(p) + \varepsilon_3\varepsilon_4\Delta_{34}(p_-)\Delta_{12}(p), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{ml}(p) &= (1 - \beta_m)\left(1 - \tilde{\beta}_l\right)\exp(\gamma_l a) - \left(1 - \tilde{\beta}_m\right)(1 - \beta_l)\exp(\gamma_m a), \\ \Delta_{ml}(p_-) &= (1 - \beta_{-m})\left(1 - \tilde{\beta}_{-l}\right)\exp(\gamma_l a) - \left(1 - \tilde{\beta}_{-m}\right)(1 - \beta_{-l})\exp(\gamma_m a). \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, выражения (17), (18), (22), (23) дают общее решение системы (11), (12), справедливое вплоть до сильных полей. Подставляя (18) в (13), (14), нетрудно найти токи $J_s(k)$, $J_c(k)$ и получить совместно с (2) и (3) замкнутые уравнения для определения поля и фазы (частоты генерации ω). Эти уравнения позволяют провести анализ зависимости порогового тока, мощности и частоты генерации от параметров структуры. Нетрудно обобщить полученные результаты для других типов структур.

4. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ТОКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ПРЕДЕЛЕ ВЫСОКИХ БАРЬЕРОВ

Резонансное туннелирование наиболее ярко проявляется, если проницаемость барьеров невелика, так что ширины уровней Γ_1 и Γ_2 малы по сравнению с энергией $\mathscr{E}_{1R}$ и $\mathscr{E}_{2R}$. Это реализуется, если справедливы неравенства

$$\alpha_1/p \gg 1, \quad \alpha_2/p \gg 1, \tag{25}$$

которые мы и будем считать далее выполненными.

Кроме того, в полученных общих выражениях необходимо учесть ограничения, накладываемые на амплитуду поля: $V/p \ll 1$ (см., разд. 2). С учетом малости параметра V/p для γ_0, γ_- и ε_j имеем

$$\gamma_0 \simeq ip\sqrt{1 + \frac{V^2}{\omega}}, \quad \gamma_- \simeq ip_-\sqrt{1 - \frac{V^2}{\omega}}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &\simeq \pm\frac{i\omega}{\bar{V}p_-}, \quad \varepsilon_{3,4} \approx \mp\frac{ip\overline{V}}{\omega}, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 &\simeq \frac{2}{\bar{V}^2}, \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \simeq \frac{p}{p_-}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\tilde{V}^2 = \frac{2V^2 p_-^2}{\omega^2} \ll 1. \tag{28}$$

Комбинации $\varepsilon_m \varepsilon_l$ входят в определитель (23) таким образом, что при первом слагаемом стоит множитель $\sim 1/\tilde{V}^2$, при следующих четырех — ~ 1, а при последнем — $\sim \tilde{V}^2$. С принятой нами точностью последнее слагаемое может быть опущено. Первое слагаемое в определителе представляет собой произведение частных определителей $\Delta_{12}(p_-)\Delta_{34}(p)$, которые имеют резонансный характер. При $\tilde{V} = 0$ и $\alpha_j/p \gg 1$, $\alpha_j/p_- \gg 1$ выражение для $\Delta_{34}(p)$ вблизи резонанса представим в виде

$$\Delta_{34}(p_R + \delta p) = \left(2 - \frac{\alpha}{ip}\right)\left(2 - \frac{\alpha\delta}{ip}\right)\exp(-ipa) + \frac{\alpha^2\delta}{p^2}\exp(ipa) \simeq$$
$$\simeq \exp(-ip_0 a)\left[-\frac{2(1+\delta^2)}{\delta} + \frac{2i\alpha^2\delta a}{p_0^2}\,\delta p\right], \tag{29}$$

где

$$\delta p = p - p_R, \quad p_R = \frac{\alpha p_0}{\alpha + (1+\delta)/a\delta}, \quad p_0 = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha\delta. \tag{30}$$

Аналогичное выражение для $\Delta_{12}(p_-)$ получается при замене $p \to p_-$.

Удобно для дальнейшего $\Delta_{34}(p)$ и $\Delta_{12}(p_-)$ записать в следующей форме:

$$\Delta_{34}(p) \simeq \frac{ia\alpha^2\delta}{p^3}\exp(-ip_0 a)\tilde{\Delta}_{34}, \quad \tilde{\Delta}_{34} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{2R} + i\Gamma_2,$$
$$\Delta_{12}(p_-) \simeq \frac{ia\alpha^2\delta}{p_-^3}\exp(-ip_- a)\tilde{\Delta}_{12}, \quad \tilde{\Delta}_{12} = \mathscr{E} - \omega - \mathscr{E}_{1R} + i\Gamma_1, \tag{31}$$

где

$$\Gamma_j = \frac{2p_j^3(1+\delta^2)}{a\alpha^2\delta^2}, \quad p_2 \equiv p, \quad p_1 \equiv p_-, \quad \mathscr{E}_{jR} = p_{jR}^2, \tag{32}$$

Γ_j — ширина электронных уровней. Очевидно, что в определителях Δ_{ml}, стоящих при $\tilde{V}^2$, следует положить $\tilde{V} = 0$. В главном по α/p приближении они равны

$$\Delta_{ml}(p_{1R}) \simeq -\frac{2\alpha^2\delta}{p_-^2}, \quad \Delta_{ml}(p_{2R}) \simeq -\frac{2\alpha^2\delta}{p^2} \tag{33}$$

и в α^2/p^2 раз превышают резонансные значения Δ_{12} и Δ_{34}. Поэтому поправки $\propto \tilde{V}^2$ от $\Delta_{12}\Delta_{34}$ вносят малый по p^2/α^2 вклад в слагаемое, пропорциональное $\tilde{V}^2$. Так что в результате приходим к следующему выражению для определителя:

$$\Delta = -\frac{2a^2\alpha^4\delta^2}{\tilde{V}^2 p_1^2 p_2^3}\tilde{\Delta}(\lambda), \quad \lambda^2 = \frac{16 p_1 p_2 \tilde{V}^2}{a^2},$$
$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \left\{\left[(\mathscr{E} - \omega - \mathscr{E}_{1R}) + i\Gamma_1\right]\left[\mathscr{E}_{2R} - \mathscr{E} - i\Gamma_2\right] + \lambda^2\right\}. \tag{34}$$

Из выражения (34) нетрудно видеть, что электромагнитное поле может существенно влиять на резонансное туннелирование, если

$$\lambda^2 > \Gamma_1\Gamma_2, \quad \tilde{V} > \frac{p_1p_2(1+\delta^2)}{2\alpha^2\delta^2}. \tag{35}$$

Поскольку $\alpha/p \gg 1$, условие (35) выполняется одновременно с неравенством $\tilde{V} \ll 1$ (см. (28)). Поля, удовлетворяющие условию (35), будем называть сильными (ср. [9]).

Теперь перейдем к отысканию коэффициентов A_{0j}, $A_{-1,j}$. Прежде всего необходимо отметить, что, как видно из (22) и (27), волновая функция $\psi_0(x)$ (а также и $\psi_{-1}(x)$) представляет собой суперпозицию «собственных функций» с импульсами p ($\exp(\pm ipx)$) и «наведенных» за счет межуровневых переходов функций $\exp(\pm ip_-x)$. Именно поэтому не работает подход, обычно применяемый в лазерной теории, при котором используется разложение по собственным функциям невозмущенной задачи.

Как следует из (27), главными по параметру $\tilde{V}^2$ среди коэффициентов A_{0j} являются A_{03} и A_{04}, причем в основном приближении по α/p они связаны соотношением

$$A_{03} \simeq -A_{04}, \quad A_{03} = -\frac{2qp_2^2\tilde{\Delta}_{12}(p_1)\exp(-ipa)}{\alpha p_1 a\tilde{\Delta}(\lambda)}, \tag{36}$$

так что

$$\psi_0(x) \simeq 2iA_{03}\sin(p_2x). \tag{37}$$

Если учесть в выражении для A_{03} следующие по α/p поправки, то вместо (37) будем иметь

$$\psi_0(x) \simeq \frac{2q\tilde{\Delta}_{12}(p_1)p_2^2}{\alpha p_1 a\tilde{\Delta}(\lambda)}\left\{-\sin[p_2(x-a)] + \frac{p_2}{2\alpha\delta}\exp[ip_2(x-a)]\right\}. \tag{38}$$

Второе слагаемое в (38) описывает внутриподзонный ток. Оно важно при вычислении коэффициентов прохождения и отражения, но может быть опущено в токах J_c и J_s в силу малости ($\sim p/\alpha$) по сравнению с первым слагаемым.

Основной вклад в ψ_{-1} вносят коэффициенты A_{-11} и A_{-12}, которые в главном по α/p приближении равны

$$A_{-11} \simeq -A_{-12}, \tag{39}$$

$$A_{-11} \simeq -\frac{8\sqrt{2}\,q\tilde{V}p_2^3}{\alpha a^2 p_1\tilde{\Delta}(\lambda)}, \tag{40}$$

так что

$$\psi_{-1}(x) = 2iA_{-11}\sin(p_1x) = -\frac{16\sqrt{2}\,iq\tilde{V}p_2^3}{\alpha a^2 p_1\tilde{\Delta}(\lambda)}\sin(p_1x). \tag{41}$$

Приведенные выражения справедливы для полей $\tilde{V} \ll p/\alpha$. Если $p/\alpha < \tilde{V} < 1$, то из (22) нетрудно убедиться, что к числителю выражения для $\psi_0(x)$ добавляется слагаемое, пропорциональное $\tilde{V}^2\alpha^2/p^2$.

Следует отметить, что близкие выражения для ψ_n и Δ в резонансном случае $\delta p = 0$ были получены другим методом в недавно опубликованной работе [12]. Авторы [12] применяли теорию возмущений по полю при решении (5), а затем проводили суммирование ряда, оставляя в нем главные по α/p члены. Условие сходимости ряда приводит к ограничению на амплитуду поля. Так как в [12] использовался гамильтониан взаимодействия с полем в форме Ex, то непосредственное сравнение затруднительно. Приближенно выражения в [12] справедливы для полей, удовлетворяющих условию $\lambda^2 < \Gamma_1\Gamma_2$, т. е. слабых полей в смысле (35). Найденные в [12] волновые функции были применены авторами для вычисления коэффициентов прохождения и отражения.

Подставляя (37) и (41) в (13), для токов $J_c(k)$ и $J_s(k)$ найдем выражения

$$J_{c,s}(k) = -\frac{2ieM_{12}}{m^*}\left[A_{03}^*A_{-11} \mp A_{03}A_{-11}^*\right] i^{(1\mp1)/2}, \tag{42}$$

которые с учетом (36) и (40) принимают вид

$$J_c(k) = \tilde{V}Q\eta\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \tag{43}$$

$$J_s(k) = \tilde{V}Q\eta\frac{\Gamma_2(\mathscr{E} - \omega - \mathscr{E}_{1R})}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \tag{44}$$

где

$$M_{12} = \frac{1}{a}\int_0^a dx\,[p_1\sin(p_2x)\cos(p_1x) - p_2\sin(p_1x)\cos(p_2x)], \tag{45}$$

$$Q = \frac{q^2p}{m^*}, \quad \eta = \frac{64M_{12}e^2p_1^2\delta^2}{\omega^2a^2(1+\delta^2)}, \tag{46}$$

Q — ток когерентной накачки.

5. ОДНОМОДОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В КВАНТОВОМ КАСКАДНОМ ЛАЗЕРЕ С НАКАЧКОЙ МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Будем считать, что электроны, поступающие на верхний рабочий уровень, обладают одинаковой энергией $\mathscr{E} \simeq \mathscr{E}_{2R}$. Такая ситуация реализуется, если энергия Ферми электронов в эмиттере C_F мала по сравнению с шириной уровня Γ_j. Уравнения (2), (3) в стационарном случае после подстановки в них (43) и (44) принимают вид

$$1 = \tilde{Q}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \tag{47}$$

$$\omega - \Omega = \tilde{Q}\frac{\Gamma_2(\mathscr{E} - \omega - \mathscr{E}_{1R})}{\tau_0|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \tag{48}$$

где

$$\tilde{Q} = 4\pi\tau_0 Q\eta/\kappa, \tag{49}$$

а $\tilde{\Delta}(\lambda)$ дается одним из выражений (34).

Пороговые значения тока накачки $\tilde{Q}_{th}$ и частоты генерации ω найдем из (47) и (48), положив в них $\lambda = 0$. Выбирая энергию электронов равной $\mathscr{E}_{2R}$, т. е. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{2R}$, найдем выражения для порогового тока

$$\tilde{Q}_{th} = \Gamma_2 \left[\Gamma_1^2 + (\omega_{21} - \omega)^2\right] / \Gamma_1 \tag{50}$$

и для частоты

$$\omega = \frac{S\omega_{21} + \Omega}{S + 1}, \quad S = \frac{1}{\Gamma_1 \tau_0}. \tag{51}$$

«Коэффициент стабилизации» S, равный отношению ширины моды резонатора $(1/\tau_0)$ к ширине линии излучения [8], может меняться в широких пределах в зависимости от параметров структуры и длины резонатора. Если, например, принять согласно [2, 3] $\Gamma_1 \approx 10^{-12}$ с$^{-1}$, $\tau_0 \approx 10^{-11}$ с, то $S \approx 10$, и частота ω в основном определяется частотой ω_{21}. Так как расстояние между резонаторными модами невелико и может выполняться соотношение $\Gamma_1 \gg (\omega_{21} - \Omega)/(1 + S)$, то пороговый ток равен

$$\tilde{Q}_{th} = \Gamma_1 \Gamma_2, \quad Q_{th} = \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{\omega^2 a^2 (1 + \delta^2) \kappa}{4\pi \tau_0 \cdot 64 M_{12} e^2 p_1^2} \tag{52}$$

и определяется произведением ширин уровней.

Таким образом, для понижения порогового тока необходимо выбирать параметры, приводящие к уменьшению Γ_j. Выражение (52) дает возможность проанализировать зависимость Q_{th} и от других параметров, например от частоты, размера ямы и др.

Нетрудно убедиться, что выше порога генерации выражение для частоты (51) сохраняется, т. е. частота не зависит от тока накачки, а приведенная мощность генерации $P_\omega = \lambda^2$ равна

$$P_\omega = \tilde{\Gamma} \left(\sqrt{\tilde{Q}} - \tilde{\Gamma} \right), \quad \tilde{\Gamma} = \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}. \tag{53}$$

Прежде всего отметим, что мощность P_ω нелинейно зависит от $\tilde{Q}$, так что скорость нарастания мощности убывает с увеличением $\tilde{Q}$, а $P_\omega(\tilde{Q})$ проявляет тенденцию к насыщению.

Кроме того, видно, что при больших накачках мощность пропорциональна произведению $\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}$. Таким образом, имеется нетривиальная зависимость мощности от эффективной ширины $\tilde{\Gamma}$: малые значения $\tilde{\Gamma}$ отвечают малым пороговым токам, но и меньшим мощностям, и наоборот. Следовательно, существует некий оптимум (по коэффициенту полезного действия), который достигается при $\tilde{Q} = 4\tilde{\Gamma}^2$, при этом мощность

$$P_\omega = \tilde{\Gamma}^2, \quad \lambda = \tilde{\Gamma}. \tag{54}$$

Причина уменьшения кпд и скорости нарастания мощности связана с тем, что при полях $\lambda \geq \tilde{\Gamma}$ нарушаются условия когерентного туннелирования (см. ниже) и поток поступающих от источника электронов испытывает сильное отражение. Вычисление коэффициента отражения подтверждает эти соображения.

Допустим, что энергия $\mathscr{E}$ электронов отличается от $\mathscr{E}_{2R}$ на величину ξ:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{2R} + \xi. \tag{55}$$

Мы увидим, что подстройка ξ радикально меняет режимы генерации. Во избежание громоздкости формул начнем анализ со случая $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, полагая при этом $\omega_{21} - \omega \ll \Gamma$.

Найдем из уравнения (47) выражение для мощности генерации:

$$P_\omega \equiv \lambda^2 = \xi^2 + \Gamma\left(\sqrt{\tilde{Q} - 4\xi^2} - \Gamma\right). \tag{56}$$

При $\xi = 0$ (56) переходит в (53). Если $\xi \neq 0$, то пороговый ток увеличивается с ростом ξ:

$$\tilde{Q}_{th} = (\Gamma^2 + \xi^2)^2/\Gamma^2. \tag{57}$$

В то же время выше порога расстройка приводит к увеличению поля λ. Следовательно, существует оптимальное значение ξ_0 для данного тока накачки, определяемое из уравнения

$$\frac{\partial\lambda^2}{\partial\xi_0} = 2\xi_0\left(1 - \frac{2\Gamma}{\sqrt{\tilde{Q} - 4\xi_0^2}}\right) = 0. \tag{58}$$

Уравнение (58) имеет следующие решения:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = \tilde{Q}/4 - \Gamma^2. \tag{59}$$

Первое решение соответствует максимуму мощности в интервале накачки $1 < \tilde{Q}/\Gamma^2 < 4$, где второе решение не реализуется ($\xi_0^2 < 0$). При выполнении условия

$$\tilde{Q} > 4\Gamma^2 \tag{60}$$

появляется второе решение, соответствующее максимуму P_ω (а для нулевого решения максимум сменяется минимумом). Зависимость мощности λ^2 от $\tilde{Q}$ (56) при $\xi = \xi_0$ принимает вид

$$\lambda^2 = \tilde{Q}/4. \tag{61}$$

Как видно из (61), мощность линейно возрастает с $\tilde{Q}$ и не зависит от Γ. Отметим, что «линейный» режим наступает (если принять во внимание (60)), когда амплитуда поля λ превосходит затухание Γ, т. е.

$$\lambda > \Gamma. \tag{62}$$

Итак, если с ростом $\tilde{Q}$ увеличивать расстройку согласно (59), то мощность генерации максимальна. Причину описанного явления можно связать с расщеплением уровней в сильном поле и появлением щели, равной λ [9, 14]. Поэтому если энергия поступающих электронов фиксирована (например, $\xi = 0$), то возникает отклонение энергии электронов накачки от резонансной и, следовательно, отражение. Если же величину

$\xi = \xi_0$ увеличивать пропорционально λ (см. (59)), то расстройка компенсируется. Такая интерпретация подтверждается соотношением между ξ_0 и λ, получаемым из (59) с учетом (61):

$$\xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2. \tag{63}$$

Существование режима с $\xi_0 \neq 0$ позволяет указать способ повышения эффективности когерентного лазера, при котором накачка осуществляется источником с одновременно меняющимися током и напряжением, связанными соотношением (59). При этом следует иметь в виду, что выход на режим, при котором мощность не зависит от затухания Γ, происходит при $\tilde{Q} > 4\Gamma^2$. Следовательно, оптимальным решением является выбор минимально возможной величины затухания Γ. Ясно также, что уход от резонанса можно частично компенсировать немоноэнергетическим распределением электронов. Этот случай будет рассмотрен в следующем разделе.

Нетрудно обобщить полученные результаты на случай $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Вместо (56) и (57) имеем для приведенной мощности

$$\lambda^2 = \xi^2 + \tilde{\Gamma}\left(\sqrt{\tilde{Q} - \frac{\xi^2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2}{\tilde{\Gamma}^2}} - \tilde{\Gamma}\right) \tag{64}$$

и пороговой накачки

$$\tilde{Q}_{th} = \frac{\xi^4 + \xi^2(\Gamma_1+\Gamma_2)^2 + \tilde{\Gamma}^4}{\tilde{\Gamma}^2}. \tag{65}$$

Оптимальная подстройка

$$\xi_0^2 = \frac{\tilde{Q}\tilde{\Gamma}^2}{(\Gamma_1+\Gamma_2)^2} - \frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)^2}{4} \tag{66}$$

обеспечивает линейную зависимость λ^2 от накачки $\tilde{Q}$,

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{Q}\tilde{\Gamma}^2}{(\Gamma_1+\Gamma_2)^2} - \frac{(\Gamma_1-\Gamma_2)^2}{4}, \tag{67}$$

если накачка и поле удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{Q} > \frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)^4}{4\tilde{\Gamma}^2}, \quad \lambda > \tilde{\Gamma}. \tag{68}$$

Когерентный лазер обладает еще одной особенностью, отличающей его от обычных лазеров, а именно, для его работы нет необходимости в инверсной населенности. Действительно, найдем отношение населенностей на верхнем и нижнем уровнях, воспользовавшись выражением (38) и (41):

$$I = \frac{\int_0^a |\psi_0|^2 dx}{\int_0^a |\psi_{-1}|^2 dx} = \frac{\tilde{\Gamma}^2}{\lambda^2} s, \quad s \simeq 1. \tag{69}$$

Отсюда следует, что при малом токе накачки и слабом поле,

$$\lambda < \tilde{\Gamma}, \tag{70}$$

имеется инверсная населенность ($I > 1$). Однако, если накачка и поле становятся сильными, населенность на нижнем уровне превосходит населенность на верхнем, т. е. инверсная населенность отсутствует. Можно показать, что в режиме оптимальной подстройки $\xi = \xi_0$ согласно (59) $I \approx 1$, т. е. населенности равны. Причина состоит в следующем. В когерентном лазере электроны, поступающие в яму, когерентно взаимодействуют с полем в течение времени жизни Γ^{-1}. Как известно, в этом случае межуровневые переходы электрона не зависят от перенаселенности. В некогерентном лазере процессы рассеяния сбивают фазу и разрушают когерентность взаимодействия с полем, поэтому вероятности перехода зависят от разности населенностей. Можно также показать, что населенность на верхнем уровне не меняется с ростом накачки (по крайней мере, до полей $\tilde{V} < \alpha/p$), а на нижнем возрастает пропорционально $\lambda/\tilde{\Gamma}$.

Следует отметить, что выражение (69) получено для модели, в которой поле локализовано внутри ямы. Поскольку реально поле делокализовано и вне ямы, то следует учитывать поглощение и излучение поля вне ямы. Однако эти нерезонансные переходы малы по параметру p^2/α^2.

6. НЕМОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ НАКАЧКА

Если энергия Ферми $\mathscr{E}_F$ в эмиттерной области достаточно велика по сравнению с $\tilde{\Gamma}$, то возникает необходимость усреднения токов (43) и (44) по энергии. Мы воспользуемся обычно применяемыми формулами (см., например, [10, 11]) для одномерного случая:

$$J = \rho \int\limits_{-\mathscr{E}_F/2}^{\mathscr{E}_F/2} J(\mathscr{E}) d\mathscr{E}, \tag{71}$$

ρ — плотность состояния. Учет движения в латеральной плоскости приводит к дополнительному множителю:

$$J \sim \int\limits_{-\mathscr{E}_F/2}^{\mathscr{E}_F/2} J(\mathscr{E}) \left(\frac{\mathscr{E}_F}{2} - \mathscr{E}\right) d\mathscr{E}. \tag{72}$$

Вообще говоря, применимость выражений (71) и (72) для когерентного приближения не очевидна. Но для иллюстрации основных закономерностей ограничимся выражением (71). Снова будем считать, что $\omega - \omega_{21} \ll \Gamma$. Тогда, подставляя (43), (44) в (71), получим

$$J_c(k) = \tilde{V} Q \eta \tilde{\Gamma}^2 \rho \int\limits_{-\mathscr{E}_F/2}^{\mathscr{E}_F/2} \frac{d\mathscr{E}}{|\lambda^2 - (\mathscr{E} + i\Gamma_1)(\mathscr{E} + i\Gamma_2)|^2}. \tag{73}$$

Поскольку в разд. 5 мы изучили моноэнергетическую накачку, найдем теперь J_c для обратного предельного случая, считая, что $\mathcal{E}_F \gg \Gamma_j, \lambda$. Заменяя пределы интегрирования на бесконечности, из (73) получаем

$$J_c = \frac{\tilde{V} Q \eta \tilde{\Gamma}^2 \pi \rho}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\lambda^2 + \tilde{\Gamma}^2)} \tag{74}$$

и, соответственно, для мощности лазера

$$P_\omega = \tilde{\Gamma}^2 \left[\frac{\pi \tilde{Q} \rho}{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 1 \right]. \tag{75}$$

Важно обратить внимание, что зависимость мощности от тока накачки линейна даже без «автоподстройки». Это связано с тем, что так как энергия Ферми $\mathcal{E}_F$ велика, то всегда находятся электроны с резонансной энергией. Легко показать (беря точно интеграл в (73)), что при $\lambda > \mathcal{E}_F$ снова наблюдается корневая зависимость (53). Необходимо также отметить, что в отличие от (61), (67) в (75) мощность при больших накачках существенно зависит от Γ_j и ρ.

Найдем также частоту генерации для немоноэнергетических электронов накачки из уравнения

$$\omega - \Omega = \frac{\tilde{Q} \Gamma_2 \rho}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{E} (\mathcal{E} + \omega_{21} - \omega)}{\left| \left[(\mathcal{E} + (\omega_{21} - \omega) + i\Gamma_1 \right] (-\mathcal{E} - i\Gamma_2) + \lambda^2 \right|^2}. \tag{76}$$

Если положить $\Gamma_1 = \Gamma_2$, то интеграл от первого слагаемого равен нулю из-за четности знаменателя (что легко увидеть, сделав замену переменной $\mathcal{E} = \mathcal{E}' - (\omega_{21} - \omega)/2$). Поэтому выражение для частоты снова дается соотношением (51) с $S = 1/2\tau_0 \Gamma$.

В общем случае $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ток J_s после интегрирования по энергии равен (при $\omega_{21} - \omega \ll \Gamma_1$)

$$J_s = \frac{\pi \tilde{V} Q \eta 2 \tilde{\Gamma}^2 (\omega_{21} - \omega) \rho}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 (\lambda^2 + \tilde{\Gamma}^2)}. \tag{77}$$

Подставляя (77) в (3) и учитывая (75), находим, что снова ω описывается выражением (51) с $S = 1/\tau_0(\Gamma_1 + \Gamma_2)$.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как и ожидалось (см. Введение), когерентный лазер с когерентной накачкой обладает рядом существенных особенностей. Прежде всего, отсутствует тесная связь с инверсной населенностью. В зависимости от тока накачки и мощности соотношение между населенностями верхнего и нижнего уровней может быть любым. В оптимальном режиме работы когерентного лазера с подстройкой ξ_0 электроны поступают на верхний уровень, совершают один излучательный переход (при любом поле λ) и покидают квантовую яму. Такое поведение можно сравнить с явлением самопрозрачности (см. [9]) с той существенной разницей, что в нашем случае электрон остается на нижнем уровне.

Если же подстройка отсутствует, моноэнергетическая накачка приводит к нелинейной (корневой) зависимости мощности генерации от тока накачки. Резкое отклонение от линейной зависимости наблюдается, когда поле λ превышает ширину уровней $\tilde{\Gamma}$. Такое предсказание модели также (как и режим с подстройкой) допускает экспериментальную проверку, как впрочем, и линейную зависимость мощности в случае немонохроматической накачки. Естественно, что наиболее эффективной когерентной накачкой является моноэнергетическая с подстройкой энергии согласно (59).

Хотелось бы также подчеркнуть, что необходимое для генерации электромагнитного поля затухание электронов в рассмотренной модели вносится граничными условиями. Поэтому нет необходимости привлекать приближенные кинетические подходы, учитывающие диссипативные процессы рассеяния. Таким образом, мы имеем пример модели стационарной лазерной генерации как строго квантовомеханической задачи, позволяющей в то же время найти мощность и частоту.

Изученная модель максимально упрощена, чтобы выявить основные особенности когерентного лазера. Однако мы полагаем, что при определенном выборе параметров, обеспечивающем выполнение условия $\tau_{ph} > \Gamma_j^{-1}$ (см. Введение), модель качественно применима в квантовых каскадных лазерах на квантовых ямах, проволоках и особенно точках. Количественная теория должна учитывать процессы рассеяния, сдвиги уровней из-за накопления заряда в яме, реальную структуру барьеров.

Автор выражает благодарность Ю. В. Копаеву за многочисленные обсуждения и ценные советы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант №96-02-17363-а), Научным советом по МНТП России «Физика твердотельных наноструктур» (проект 1-092/4), а также INTAS (проект №93-1703-ext).

Литература

1. A. Kazarinov and R. Suris, Sov. Phys. Semicond. **5**, 207 (1971).
2. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., Science **264**, 553 (1994).
3. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., Appl. Phys. Lett. **66**, 538 (1994).
4. S. Luryi, Appl. Phys. Lett. **47**, 490 (1985).
5. А. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ФТП **6**, 135 (1972); **7**, 488 (1973). J. Faist, F. Capasso et al., Electron. Lett. **29**, 2230 (1993). F. Capasso et al., Quantum Electron. **22**, 1853 (1986). A. Kastulsky et al., Appl. Phys. Lett. **59**, 2636 (1991). M. Helm et al., Phys. Rev. Lett. **63**, 74 (1989).
6. V. F. Elesin and Yu. Kopaev, Solid State Comm. **96**, 987 (1995). В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **108**, 2186 (1995). В. Ф. Елесин, А. Крашенинников, ЖЭТФ **111**, 681 (1997).
7. V. Gorpinkel, S. Luryi, and B. Gelmout, in *Proc. IEEE, Japan* (1996), p. 94.
8. W. E. Lamb, Phys. Rev. **134**, 1429 (1964).
9. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
10. R. K. Mains and G. I. Haddad, J. Appl. Phys. **64**, 3564 (1988); **64**, 5041 (1988).
11. H. C. Lju, Phys. Rev. B **43**, 12538 (1991). А. Б. Пашковский, ЖЭТФ **109**, 1779 (1996).
12. Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, Письма в ЖЭТФ **63**, 559 (1996).
13. M. Kira, Phys. Rev. B **53**, 15789 (1995).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Москва, Физматгиз (1963).