

РАДИАЦИОННЫЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ, ДВИЖУЩИЕСЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Городцов^а, С. Н. Резник^а, Ю. А. Степанянец^б

^а Институт проблем механики Российской академии наук
117526, Москва, Россия

^б Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 13 января 1997 г.

Вычислены обе компоненты полной радиационной силы, действующей на равномерно движущиеся массовые источники в стратифицированной несжимаемой жидкости. Природа этих сил связана с излучением внутренних гравитационных волн. Одна из компонент радиационной силы направлена против движения и является хорошо известной силой волнового сопротивления; для нее выведены различные полезные представления для нескольких типовых точечных источников (монополя, диполя и др.). Другая компонента, перпендикулярная направлению движения, вычислена здесь впервые. Приведено обобщение полученных результатов на случай вращающихся сред, в которых существуют инерционно-гравитационные внутренние волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что равномерное движение силовых или массовых источников в стратифицированной жидкости сопровождается излучением внутренних волн. Расчет волновых полей и порождаемых ими радиационных сил, действующих на движущиеся источники, проводился во многих работах, см., например, [1–12] и имеющиеся там ссылки (перечислить здесь все работы по данной теме не представляется возможным). Излучение внутренних волн аналогично черенковскому излучению электромагнитных волн в диэлектриках зарядами, равномерно движущимися со сверхсветовой скоростью. Из-за потерь энергии на излучение движущийся источник испытывает действие тормозящей силы волнового сопротивления. Однако в анизотропных средах помимо этой силы может возникать еще одна составляющая полной радиационной силы, направленная перпендикулярно скорости источника [13].

В большинстве работ, затрагивавших силовые характеристики, возникающие при излучении волн, рассматривалась в той или иной модификации задача о горизонтальном или вертикальном движении источников в стратифицированной среде. В этом случае имеется определенная симметрия по отношению к направлению силы тяжести, поэтому в этих задачах радиационная сила, обусловленная излучением внутренних волн, сводилась лишь к силе волнового сопротивления, а ее расчет проводился на основе энергетических соображений: мощность потерь в единицу времени (F_{wd}, V_s) равна потоку энергии W , уносимой внутренними волнами из заданного объема. Если же источник движется под углом к горизонту, то вследствие анизотропной природы внутренних волн спектр и интенсивность излучения слева и справа от источника, вообще говоря, неодинаковы. В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена теневая фотография, лю-



Рис. 1. Теневая фотография поля внутренних волн, излучаемых наклонно движущейся сферой в стратифицированной жидкости

безно предоставленная Е. Я. Сысоевой и Ю. Д. Чашечкиным, на которой изображено поле внутренних волн, излучаемых наклонно движущейся сферой в стратифицированной жидкости. На этой фотографии отчетливо видно, что характерные длины волн по обе стороны траектории шара заметно различаются. Благодаря тому что излучение источника с разных сторон от траектории неодинаково и уносимый волнами импульс тоже различен, на источник должна действовать помимо тормозящей еще и боковая сила отдачи. Вследствие этого полная радиационная сила должна содержать две компоненты: силу волнового сопротивления и боковую силу, которую, очевидно, невозможно рассчитать из энергетических соображений, поскольку она не совершает работы. Ясно, что так же, как и сила волнового сопротивления, она может быть найдена непосредственно путем подсчета полного потока импульса, уносимого излученными внутренними волнами. Наряду с этим, если сила волнового сопротивления уже найдена (например, с помощью энергетических соображений), боковую силу после этого легко можно вычислить и иным путем — по формулам, которые будут приведены и обоснованы ниже. Такой прием уже был успешно использован для подсчета боковых сил, действующих на равномерно движущиеся источники, излучающие волны Россби на β -плоскости и дрейфовые волны в плазме [13].

В данной работе приведен вывод полной радиационной силы, действующей на равномерно движущиеся массовые источники монопольного и дипольного типов в стратифицированной среде. При этом показано, что различные способы расчета приводят к одинаковым результатам.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Итак, рассмотрим для простоты равномерно движущийся в несжимаемой стратифицированной жидкости источник массы (расчеты для силового источника, как известно [12], сводятся к расчетам для эффективного массового источника). Будем предполагать жидкость безграничной и экспоненциально стратифицированной по плотности $\rho_0(z) = e^{-N^2 z/g}$, так что частота Брента-Вайсяля $N = \text{const}$. Основные уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для малых возмущений сводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} \hat{L} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp m, & \hat{L} w &= \frac{\partial^3 m}{\partial z \partial t^2}, \\ \hat{L} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) &= -\frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 m}{\partial t \partial z}, & \hat{L} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial m}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $m(t, \mathbf{r}) = m(\mathbf{r} - \mathbf{V}_s t)$ — источник массы, определяющий расход жидкости в единицу времени, скорость источника \mathbf{V}_s предполагается постоянной, $\hat{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + N^2 \Delta_\perp$ — линейный оператор, содержащий трехмерный оператор Лапласа Δ и его двумерную часть Δ_\perp , соответствующую горизонтальной плоскости x, y , $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_\perp, w\}$, $\mathbf{v}_\perp = \{u, v\}$.

Из системы (1) для поля давления нетрудно получить с помощью преобразования Фурье формальное решение стационарной задачи, выраженное через функцию Грина $G(t, \mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} P(\omega, \mathbf{k}) &= i\omega(N^2 - \omega^2)G(\omega, \mathbf{k})m(\omega, \mathbf{k}), \\ p(t, \mathbf{r}) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \iint m(t', \mathbf{r}')G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') dt' d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2)$$

Зная поле давления, легко можно вычислить потери энергии в единицу времени на излучение внутренних волн (мощность потерь):

$$W = \int p(t, \mathbf{r})m(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^{s+2}} \iiint P(\omega, \mathbf{k})m(\omega', -\mathbf{k})e^{-i(\omega+\omega')t} d\omega' d\omega d\mathbf{k},$$

где $s = 2$ или 3 — размерность пространства.

При равномерном движении фурье-образ источника пропорционален δ -функции: $m_0(\mathbf{k})\delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)]$. С учетом этого получаем

$$W = -\frac{1}{(2\pi)^s} \iint \omega(N^2 - \omega^2) \text{Im} \{G(\omega, \mathbf{k})\} |m_0(\mathbf{k})|^2 \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] d\mathbf{k} d\omega. \quad (3)$$

Как видно, величина этих потерь энергии определяется только мнимой частью фурье-образа функции Грина (здесь и далее используется запаздывающая функция Грина, удовлетворяющая условию причинности: $G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')|_{t < t'} = 0$). В приближении Буссинеска для однородно стратифицированной жидкости имеем

$$\text{Im} G(\omega, \mathbf{k}) = -\pi \text{sign}(\omega) \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_\perp^2). \quad (4)$$

Теперь формулу (3) можно переписать в виде

$$W = \frac{\pi}{(2\pi)^s} \iint |\omega|(N^2 - \omega^2)|m_0(\mathbf{k})|^2 \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_\perp^2) d\mathbf{k}d\omega. \quad (5)$$

Такое представление отражает волновой характер потерь, так как подынтегральное выражение сосредоточено (в силу второй δ -функции) на дисперсионной поверхности внутренних волн

$$\omega^2 k^2 = N^2 k_\perp^2 \quad \text{или} \quad \omega = \pm N k_\perp / k.$$

Кроме того, волновое поле излучения стационарно связано с равномерно движущимся источником, так что частота излучения оказывается пропорциональной продольной компоненте волнового вектора (первая δ -функция в формуле (5))

$$\omega = (\mathbf{kV}_s) \quad \text{или} \quad \mathbf{c} \equiv \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = \mathbf{V}_s.$$

Поэтому возможные волновые векторы излучаемых волн определяются простой системой уравнений

$$\begin{cases} \omega = (\mathbf{kV}_s), \\ \omega^2 k^2 = N^2 k_\perp^2. \end{cases} \quad (6)$$

Из второго уравнения данной системы вытекает ограниченность диапазона частот излучаемых волн: $\omega^2 \leq N^2$.

3. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Система соотношений (6) позволяет в двумерном случае выразить два возможных волновых вектора излучения \mathbf{k}_+ и \mathbf{k}_- как функции частоты ω (частотная параметризация):

$$\mathbf{k}_\pm = \left(\frac{\omega}{V_\pm}, \pm \frac{\sqrt{N^2 - \omega^2}}{V_\pm} \right), \quad V_\pm \equiv V_{sx} \pm V_{sz} \frac{\sqrt{N^2 - \omega^2}}{\omega}. \quad (7)$$

Альтернативная угловая параметризация этих волновых векторов \mathbf{k}_\pm находится следующим образом. Перейдем к полярным координатам $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ и выразим компоненты скорости источника через модуль скорости и угол наклона к горизонтальной оси x : $V_{sx} = V_s \cos \varphi$, $V_{sz} = V_s \sin \varphi$. Тогда, используя соотношение $\omega = (\mathbf{kV}_s)$, запишем

$$\mathbf{k} = \frac{(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)}{V_{sx} \cos \theta + V_{sz} \sin \theta} = \frac{\omega (\cos \theta, \sin \theta)}{V_s \cos(\theta - \varphi)}. \quad (8)$$

Принимая во внимание дисперсионную связь $\omega = \pm N \cos \theta$, получим искомую угловую параметризацию

$$\mathbf{k}_\pm = \pm \frac{N \cos \theta}{V_s} \frac{(\cos \theta, \sin \theta)}{\cos(\theta - \varphi)}. \quad (9)$$

Отсюда вытекают выражение для волнового числа и ограничение на углы и частоты излучаемых внутренних волн:

$$k = \frac{N}{V_s} \left| \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \right|, \quad \frac{\omega}{\cos(\theta - \varphi)} > 0. \quad (10)$$

Неравенство следует из формулы $\omega = kV_s \cos(\theta - \varphi)$ и положительности волнового числа.

Уточнение вкладов этих волн требует выполнения преобразований произведения двух δ -функций, входящих в подынтегральное выражение для мощности потерь W .

В случае частотной параметризации имеем

$$\delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{V}_s)]\delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2) = \frac{H(N^2 - \omega^2)}{2\omega^2 \sqrt{N^2 - \omega^2}} [\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_+) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_-)], \quad (11)$$

где $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

После этого формула для мощности потерь приобретает вид следующего частотного разложения (в ней подразумевается частотная параметризация волновых векторов \mathbf{k}_{\pm})

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{-N}^N \frac{\sqrt{N^2 - \omega^2}}{|\omega|} (|m_0(\mathbf{k}_+)|^2 + |m_0(\mathbf{k}_-)|^2) d\omega. \quad (12)$$

В случае точечного источника ($|m_0(\mathbf{k})|^2 = 1$) интеграл в (12) логарифмически расходится при малых частотах. Для устранения расходимости достаточно ввести формфактор вида $|m_0(\mathbf{k})|^2 = |f(\omega/V_s)|^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ (напомним, что $(\mathbf{k}_{\pm}\mathbf{V}_s) = \omega$). При таком формфакторе мощность потерь

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{-N}^N |f(\omega/V_s)|^2 \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1} d\omega \quad (13)$$

становится конечной и не зависит от направления движения источника. Величина силы волнового сопротивления $F_{wd} = W/V_s$ в этом случае тоже не зависит от направления движения источника. Рассматриваемый массовый источник является нелокальным в направлении его движения:

$$m(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(r_{\perp})}{2\pi} \int f(k_{\parallel}) e^{ik_{\parallel}(\tau_{\parallel} - V_s t)} dk_{\parallel} = \delta(r_{\perp}) F(r_{\parallel} - V_s t).$$

К подобному типу источников относится и точечный диполь, ориентированный в направлении движения:

$$m(t, \mathbf{r}) = -(\mathbf{l}\nabla)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_s t) = \frac{l}{V_s} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_s t), \quad (14)$$

где $\mathbf{l} = l\mathbf{V}_s/V_s$ — дипольный момент, $m(\omega, \mathbf{k}) = -2\pi i(\omega l/V_s)\delta[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{V}_s)]$. Для него формфактор $f(\omega/V_s) = -i l \omega/V_s$.

При нелокальности более общего вида появляется зависимость мощности потерь от направления движения.

Выполним теперь преобразование произведения δ -функций с целью угловой параметризации

$$\delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2) = \frac{\delta(\omega)\delta(k^2)}{N^2 \cos^2 \theta} + \frac{V_s}{2N^3} \frac{|\cos(\theta - \varphi)|}{|\cos \theta|^3} \delta \left[k - \frac{N}{V_s} \left| \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \right| \right] \times \\ \times \left\{ H \left[\frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \right] \delta(\omega - N \cos \theta) + H \left[-\frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \right] \delta(\omega + N \cos \theta) \right\}. \quad (15)$$

Окончательное выражение за исключением слагаемого с $\delta(\omega)\delta(k^2)$, не вносящего вклада в потери, дает искомую угловую параметризацию частоты и волнового числа. После его подстановки в общую формулу для потерь (5) получаем

$$W = \frac{N}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \left| m_0 \left(\frac{N \cos^2 \theta}{V_s \cos(\theta - \varphi)}, \frac{N \cos \theta \sin \theta}{V_s \cos(\theta - \varphi)} \right) \right|^2 d\theta. \quad (16)$$

В этой записи в соответствии с ранее сказанным зависимость от направления движения (от угла φ) пропадает для нелокальности продольного типа

$$|m_0(\mathbf{k})|^2 = |f[(\mathbf{kV}_s)/V_s]|^2 = \left| f \left(\frac{N}{V_s} \cos \theta \right) \right|^2,$$

причем потери энергии и сила волнового сопротивления при $f \xrightarrow{\cos \theta \rightarrow 0} 0$ остаются конечными.

В случае массового диполя с разнесенными на расстояние $2|\mathbf{a}|$ нелокальными источником и стоком, движущегося в произвольном направлении с ненулевым углом атаки (т. е. при $[\mathbf{aV}_s] \neq 0$), имеем

$$m(t, \mathbf{r}) = m_0(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{V}_s t) - m_0(\mathbf{r} + \mathbf{a} - \mathbf{V}_s t), \\ m(\omega, \mathbf{k}) = -4\pi i m_0(\mathbf{k}) \sin(\mathbf{k}\mathbf{a}) \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \quad (17)$$

в приведенных выше формулах для потерь энергии нужно лишь выполнить замену

$$|m_0(\mathbf{k})|^2 \rightarrow 4 \sin^2(\mathbf{k}, \mathbf{a}) |m_0(\mathbf{k})|^2. \quad (18)$$

Тогда угловое разложение для мощности потерь приобретает вид

$$W = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \sin^2 \left[\frac{Na}{V_s} \cos \theta \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos(\theta - \varphi)} \right] |m_0(\mathbf{k})|^2 d\theta, \quad (19)$$

$$\mathbf{k} = \frac{N}{V_s} \left| \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \varphi)} \right| (\cos \theta, \sin \theta),$$

где α — угол наклона диполя к оси x . Диполю с разнесенными точечными источником и стоком здесь соответствует переход $|m_0(\mathbf{k})|^2 \rightarrow m_0^2 = \text{const}$. Отсюда, в частности, можно получить и формулу для углового разложения мощности потерь точечного диполя ($a \rightarrow 0$, $m_0 \rightarrow \infty$, $l = 2m_0 a = \text{const} < \infty$), движущегося с некоторым углом атаки ($\alpha - \varphi \neq 0$):

$$W = \frac{N^3 l^2}{8\pi V_s^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta |\cos \theta| \frac{\cos^2(\theta - \alpha)}{\cos^2(\theta - \varphi)} d\theta. \quad (20)$$

Аналогично для частотного представления мощности потерь имеем

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1} \sum_{\pm} \sin^2(\mathbf{k}_{\pm} \mathbf{a}) |m_0(\mathbf{k}_{\pm})|^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1} \sum_{\pm} \sin^2 \left(\omega \frac{a_x \omega \pm a_z \sqrt{N^2 - \omega^2}}{V_{sx} \omega \pm V_{sz} \sqrt{N^2 - \omega^2}} \right) |m_0(\mathbf{k}_{\pm})|^2 d\omega. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Входящий сюда интерференционный множитель $\sin^2(\dots)$ обычно обеспечивает сходимость интеграла при малых частотах, например, при совпадении направлений диполя и скорости его движения ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{V}_s$), когда он сводится к $\sin^2(\omega a / V_s)$. Тогда результат для W и F_{wd} при $|m_0(\mathbf{k})|^2 = 1$ оказывается вообще не зависящим от направления движения. С другой стороны, в частном случае горизонтального движения диполя с углом атаки ($V_{sz} = 0, a_z \neq 0$) обсуждаемый интерференционный множитель, принимая упрощенный вид

$$\sin^2 \left(\frac{a_x}{V_{sx}} \omega \pm \frac{a_z}{V_{sz}} \sqrt{N^2 - \omega^2} \right),$$

уже не устраняет неинтегрируемую особенность в (21) при малых частотах. Для регуляризации здесь также требуется нелокальность источника, и по-прежнему достаточной является нелокальность продольного типа

$$|m_0(\mathbf{k})|^2 = |f(\omega/V_s)|^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0.$$

Выражение (21) можно записать несколько проще, пользуясь заменой $\omega \rightarrow -\omega$,

$$W = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1} \sin^2 \left(\omega \frac{a_x \omega + a_z \sqrt{N^2 - \omega^2}}{V_{sx} \omega + V_{sz} \sqrt{N^2 - \omega^2}} \right) |m_0(\mathbf{k}_+)|^2 d\omega. \quad (22)$$

Тогда в предельном случае для точечного диполя имеем

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{-N}^N |\omega| \sqrt{N^2 - \omega^2} \left(\frac{l_x \omega + l_z \sqrt{N^2 - \omega^2}}{V_{sx} \omega + V_{sz} \sqrt{N^2 - \omega^2}} \right)^2 d\omega.$$

С помощью тригонометрических замен эта формула приводится к виду (20).

Зная мощность потерь, нетрудно найти в каждом конкретном случае и силу волнового сопротивления, направление которой противоположно вектору скорости источника. В частности, для точечного диполя, движущегося без угла атаки, сила волнового сопротивления $\mathbf{F}_{wd} = -\rho_0 l^2 N^3 \mathbf{V}_s / 6\pi V_s^4$. Однако эта сила составляет лишь часть полной радиационной силы $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$, где $\mathbf{F}_{\parallel} \equiv \mathbf{F}_{wd}$.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении перпендикулярной к направлению движения радиационной силы \mathbf{F}_{\perp} . Поскольку такая сила не совершает работы, ее нельзя вычислить исходя из закона сохранения энергии, как было сделано выше для силы волнового сопротивления, здесь необходимо применить иной подход. Один из возможных

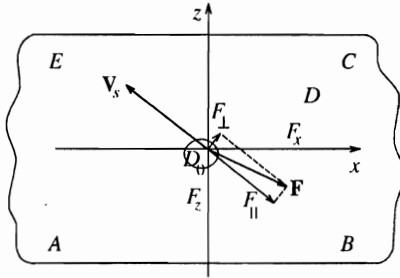


Рис. 2. Геометрия обтекания тела потоком жидкости в системе координат, в которой источник неподвижен

подходов развит в работе [14], в которой было найдено выражение для горизонтальной силы, действующей на тело в стратифицированном сдвиговом потоке. В системе отсчета, движущейся вместе с источником, результаты работы [14] полностью переносятся и на рассматриваемый здесь случай со значительным упрощением, поскольку поток жидкости не содержит сдвига скорости на бесконечности. При этом суть развиваемого подхода состоит в следующем.

Как известно, гидродинамическая сила, действующая на единицу длины цилиндрического тела в жидкости, определяется как взятая с обратным знаком сумма потока импульса, уносимого внутренними волнами из заданного объема (см. рис. 2) на бесконечность, и изменением импульса в единицу времени внутри этого объема. Для x -компоненты силы можно записать следующее выражение [15]:

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \rho_0 u \, ds + \iint_{ABCE} \Pi_{xk} n_k \, ds, \tag{23}$$

где Π тензор потока импульса, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности цилиндра, области D и $ABCE$ обозначены на рис. 2.

Если обтекаемое тело заменить источником массы $m(x, z)$, то из уравнения Эйлера с учетом уравнения непрерывности следует для x -компоненты скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = um. \tag{24}$$

Интегрируя (24) по контуру $ABCE$ (см. рис. 2), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{D+D_0} \rho_0 u \, ds - \iint_{ABCE} \Pi_{xk} n_k \, ds = \iint_{D+D_0} \rho_0 um \, dx \, dz. \tag{25}$$

Устремляя внешнюю границу рассматриваемого объема жидкости D к бесконечности, получаем в пределе выражение для горизонтальной компоненты радиационной силы (см. [14])

$$F_x = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 um \, dx \, dz. \tag{26}$$

Фурье-образ вертикальной компоненты скорости возмущения легко найти из второго уравнения системы (1), в которой оператор $\partial/\partial t$ необходимо заменить на $U_s \partial/\partial x + W_s \partial/\partial z$, в результате чего находим

$$\tilde{w} = \frac{-ik_z \tilde{m}}{k^2 - (N/(U_s + k_z W_s/k_x) + i\varepsilon)^2},$$

где U_s, W_s — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости потока V_s , а формальный символ ε в соответствии с правилом Лайтхилла [16] есть бесконечно малая величина, отражающая причинный характер отклика среды.

Фурье-образ горизонтальной компоненты скорости возмущений находится из уравнения неразрывности

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{m}}{ik} - \frac{k_z}{k_x} \tilde{w}.$$

Тогда для горизонтальной компоненты силы в случае точечного диполя, параллельного направлению движения, будем иметь

$$F_x = \frac{\rho_0}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty \frac{k_z}{k_x} \tilde{w} \tilde{m} dk_z \right) = \frac{\rho_0 l^2 N^3}{4\pi V_s^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin \theta \cos \theta)^2}{\cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

Здесь использовано свойство фурье-образа от реальной величины: $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k)$.

Поперечную радиационную силу (перпендикулярную направлению движения) найдем из равенства (см. рис. 2):

$$F_\perp = \frac{F_x - F_\parallel \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{\rho_0 l^2 N^3}{4\pi V_s^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta \operatorname{tg}(\theta - \varphi) d\theta. \quad (27)$$

Здесь для F_\parallel использовано выражение (20) при $\alpha = \varphi$.

Заметим, что выражение (27) для F_\perp совпадает с вычисленным по методике работы [13] с использованием понятия волнового импульса. По аналогии с квантовой механикой плотность волнового импульса можно записать в виде $\mathbf{p} = \bar{N}\mathbf{k}$, где $\bar{N} = \bar{S}/|V_g|$ есть удельное число квазичастиц, а \bar{S} — волновое действие. Тогда сила, обусловленная потоком волнового импульса через цилиндрическую поверхность единичной высоты, определяется в полярных координатах интегралом

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{p} |V_g| ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{k} \bar{S}(\theta) r d\theta.$$

В подынтегральное выражение формулы (27) как раз и входит произведение поперечной компоненты волнового вектора на волновое действие:

$$\bar{S} = \frac{\rho_0 l^2 N^3 \sin^2 \theta \cos \theta}{8\pi V_s^3 k_\parallel r}.$$

Интеграл в формуле (29) в элементарных функциях не выражается, но легко вычисляется с помощью ЭВМ. Зависимость F_\perp от φ имеет вид, представленный на рис. 3. Очевидно, что вследствие симметрии при движении источника вдоль осей x и z боковая сила обращается в нуль, тогда как сила волнового сопротивления от угла не зависит и остается конечной (если угол атаки для диполя равен нулю). Интересно, однако, что в диапазонах углов $0 + n\pi/2 < \varphi < (n+1)\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, 3$, существует еще по одному направлению $\varphi_0 + n\pi/2$, в котором F_\perp обращается в нуль. Угол $\varphi_0 \approx 0.655 \approx 37.5^\circ$

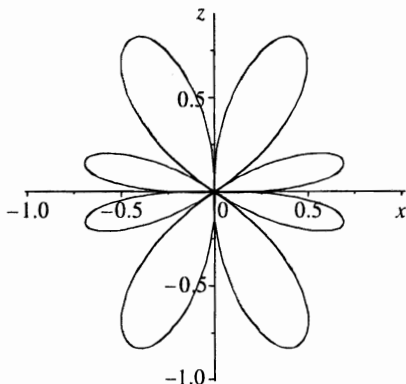


Рис. 3. Зависимость нормированной поперечной силы $F_{\perp}/|F_{\parallel}|$ от угла наклона траектории φ к горизонтальной оси x для дипольного источника в полярных координатах. При этом $F_{\parallel} = -\rho_0 l^2 N^3 / 6\pi V_s^3$

найден из численных расчетов по формуле (27). При этом из анализа этой формулы следует, что каждое такое направление является устойчивым по отношению к малым изменениям угла, тогда как направления $\theta = 0 + n\pi/2$ — неустойчивые. Иными словами, если источник отклоняется от направления, характеризуемого углом φ_0 , вправо или влево, то боковая сила стремится вернуть его назад. Если же источник отклоняется от горизонтального или вертикального направлений, то боковая сила способствует его дальнейшему уходу с этих направлений.

4. ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Учет вращения среды наряду со стратификацией для инерционно-гравитационных (или гравитационно-гироскопических) волн автоматически избавляет от «инфракрасной» расходимости интегралов и в случае точечных источников, благодаря отсечению нулевых частот (они оказываются вне диапазона допустимых частот). Запишем основные уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска для малых возмущений, обусловленных движением точечного источника в несжимаемой стратифицированной жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + 2\Omega[\nabla z, \mathbf{V}] &= -\nabla p - \rho g \nabla z, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{N^2}{g}(\mathbf{V}, \nabla z) &= 0, \quad \text{div} \mathbf{V} = m. \end{aligned} \tag{28}$$

Поскольку сила Кориолиса работы не совершает, то энергетика волнового движения остается такой же, как в жидкости без вращения. В выражение мощности потерь $W = \int p m \, dt$ нужно лишь подставить изменившуюся зависимость давления от массового источника

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{L}p &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \right) m, \\ -i\omega p(\omega, \mathbf{k}) &= -(N^2 - \omega^2)(4\Omega^2 - \omega^2)G(\omega, \mathbf{k})m(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\hat{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + N^2 \Delta_{\perp} + 4\Omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и использовать запаздывающую функцию Грина модифицированного оператора \hat{L} :

$$G(\omega, \mathbf{k}) = [(\omega + i\varepsilon)^2 k^2 - N^2 k_{\perp}^2 - 4\Omega^2 k_z^2]^{-1},$$

$$\text{Im } G(\omega, \mathbf{k}) = -\pi \text{sign}(\omega) \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_{\perp}^2 - 4\Omega^2 k_z^2).$$
(30)

В итоге получаем

$$W = \frac{\pi}{(2\pi)^s} \iint |m_0(\mathbf{k})|^2 \frac{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)}{|\omega|} \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \times$$

$$\times \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_{\perp}^2 - 4\Omega^2 k_z^2) d\mathbf{k} d\omega.$$
(31)

Здесь подынтегральное выражение сосредоточено на поверхности, задаваемой аргументами двух δ -функций, т. е. описываемой системой уравнений

$$\begin{cases} \omega = (\mathbf{kV}_s), \\ \omega^2 k^2 = N^2 k_{\perp}^2 + 4\Omega^2 k_z^2. \end{cases}$$
(32)

Дисперсионное уравнение теперь ограничивает возможные частоты интервалом между 2Ω и N (при $N > 2\Omega$ этим интервалом будет $N > \omega > 2\Omega$, а при $N < 2\Omega$, наоборот: $N < \omega < 2\Omega$). Таким образом, при учете вращения "отсекаются" как высокие, так и низкие частоты.

В рамках плоской задачи имеем

$$\omega = k_x V_{sx} + k_z V_{sz}, \quad k_x \sqrt{N^2 - \omega^2} = \pm k_z \sqrt{\omega^2 - 4\Omega^2}.$$

После чего легко находится частотная параметризация возможных волновых векторов излучения

$$k_x^{\pm} = \frac{\omega}{V_{\pm}}, \quad k_z^{\pm} = \pm \frac{\omega}{V_{\pm}} \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}},$$

$$V_{\pm} \equiv V_{sx} \pm V_{sz} \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}}.$$
(33)

Отметим, что введенные здесь волновые векторы \mathbf{k}^{\pm} несколько отличаются от ранее использованных \mathbf{k}_{\pm} в пределе $\Omega = 0$.

Аналогично получается угловая параметризация

$$\omega = \pm \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}, \quad k = \pm \frac{\sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}}{V_s \cos(\theta - \varphi)}.$$
(34)

При этом обратим внимание на значение $k = 0$. Поскольку дисперсионное уравнение

$$k^2(\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta - 4\Omega^2 \sin^2 \theta) = 0$$

имеет разделяющийся вид, оно могло бы допускать еще неволновое решение с $k^2 = 0$.

Что касается произведения двух δ -функций в подынтегральном выражении для мощности потерь, то их теперь можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2 - 4\Omega^2 k_z^2) &= \frac{1}{2|\omega| \sqrt{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)}} H\left(\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}\right) \times \\ &\times \left[\delta\left(k_x - \frac{\omega}{V_+}\right) \delta\left(k_z - \frac{\omega}{V_+} \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}}\right) + \delta\left(k_x - \frac{\omega}{V_-}\right) \delta\left(k_z + \frac{\omega}{V_-} \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}}\right) \right] = \\ &= \frac{H[(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)]}{2|\omega| \sqrt{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)}} [\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}^+) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}^-)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Пользуясь этим, из (31) получим

$$W = \frac{1}{8\pi} \int H\left(\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}\right) \sqrt{\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)} \sum_{\pm} |m_0(\mathbf{k}^{\pm})|^2 d\omega. \quad (36)$$

Благодаря отсечению низких частот, потери энергии здесь оказываются конечными даже для точечного источника ($|m_0(\mathbf{k})|^2 = 1$):

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \sqrt{\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)} H\left(\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}\right) d\omega. \quad (37)$$

Этот интеграл выражается через полные эллиптические интегралы [8], тем самым легко находится и сила волнового сопротивления.

В другом частном случае разнесенного диполя из точечных источника и стока, движущегося в произвольном направлении под углом атаки, имеем

$$m_0(\mathbf{k}) = -2im_0 \sin(\mathbf{ka}),$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{m_0^2}{2\pi} \int \sqrt{\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)} H\left(\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}\right) \sum_{\pm} \sin^2\left(\omega \frac{A_{\pm}}{V_{\pm}}\right) d\omega, \quad (38) \\ A_{\pm} &\equiv a_x \pm a_z \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}}. \end{aligned}$$

При нулевом угле атаки ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{V}_s$) последний множитель в подынтегральном выражении принимает упрощенный вид $2 \sin^2(\omega a/V_s)$, так что результаты для мощности потерь и силы волнового сопротивления снова оказываются не зависящими от направления движения.

Преобразуем теперь произведение δ -функций, пользуясь угловой параметризацией

$$\begin{aligned} \delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_x^2 - 4\Omega^2 k_z^2) &= \\ &= \delta[\omega - kV_s \cos(\theta - \varphi)] \delta[k^2(\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)] = \\ &= \frac{\delta(\omega) \delta(k^2)}{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta} + \frac{\delta\left[k - \frac{\omega}{V_s \cos(\theta - \varphi)}\right]}{2k^2 V_s |\cos(\theta - \varphi)| \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}} \times \\ &\times \left[\delta\left(\omega - \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}\right) + \delta\left(\omega + \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}\right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

На этом этапе опустим слагаемое, содержащее $\delta(\omega)\delta(k^2)$ (оно будет обсуждаться дальше). Для мощности потерь тогда имеем

$$W = \frac{(N^2 - 4\Omega^2)^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \times \left| m_0 \left[\frac{\cos \theta \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}}{V_s \cos(\theta - \varphi)}, \frac{\sin \theta \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}}{V_s \cos(\theta - \varphi)} \right] \right|^2 d\theta. \quad (40)$$

Для точечного источника нужно положить $|m_0(\dots)|^2 = 1$, а для диполя

$$|m_0(\dots)|^2 = 4m_0^2 \sin^2 \left[\frac{\cos(\theta - \alpha) a}{\cos(\theta - \varphi) V_s} \sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta} \right].$$

При обращении в нуль угла атаки диполя исчезает зависимость функции $|m_0(\dots)|$ и мощности потерь от направления движения. При этом в пределе точечного диполя получаем

$$W = \frac{(N^2 - 4\Omega^2)^2 l^2}{8\pi V_s^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (41)$$

Отброшенное слагаемое с $\delta(\omega)\delta(k^2)$ дает интегральную добавку к выражению для мощности потерь вида

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty k dk \int |m_0(\mathbf{k})|^2 \frac{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)\delta(\omega)\delta(k^2)}{|\omega|(N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} d\omega,$$

которая для точечного источника сводится к произведению регуляризуемого нелокальностью логарифмически расходящегося интеграла по частоте и не вполне определенного интеграла по волновому числу $\int_0^\infty k \delta(k^2) dk$. Если заменить $\delta(k^2)$ на $\delta(k^2 - \varepsilon)$, то последний интеграл становится равным $1/2$, а при замене на $\delta(k^2 + \varepsilon)$ интеграл обращается в нуль. Возникает вопрос, как правильно вычислять этот интеграл?

Ответ состоит в том, что отказ от приближения Буссинеска ведет к регуляризации близкой к последней. Это видно из следующего выражения:

$$\delta [k^2 \omega^2 - k^2 (N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta)] \rightarrow \delta [(k^2 + k_0^2) \omega^2 - k^2 (N^2 \cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta)],$$

где $k_0^2 = N^2/2g$. В пользу использования такой регуляризации $\delta(k^2) \rightarrow \delta(k^2 + \varepsilon)$ говорит и то, что на другом пути преобразования произведения обобщенных функций через (35) к (37) без подобной неопределенности приходим к результату, отличающемуся от (40) лишь тригонометрической заменой переменной интегрирования.

Что касается нахождения боковой составляющей радиационной силы, то ее снова можно вычислить приведенными выше способами. Совершенно аналогично тому, как это было сделано для случая чисто гравитационных волн, можно получить выражение для боковой компоненты радиационной силы, действующей на диполь:

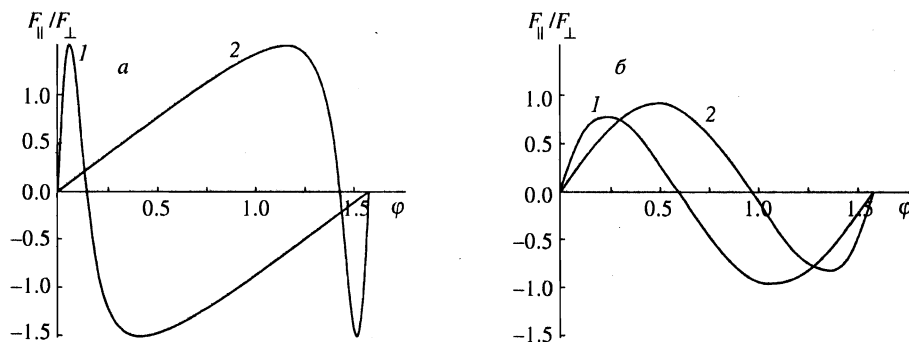


Рис. 4. Зависимость нормированной поперечной силы $F_{\perp}/|F_{\parallel}|$ от угла наклона траектории φ к горизонтальной оси x для монополюсного (а) и дипольного (б) источников в декартовой системе координат при различных значениях параметра $2\Omega/N$: 1 — $2\Omega/N = 0.1$, 2 — $2\Omega/N = 10$

$$F_{\perp} = -\frac{\rho_0 l^2 N^3}{4\pi V_s^3} \left(1 - 4\frac{\Omega^2}{N^2}\right)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta / N^2}} d\theta. \quad (42)$$

Выражение F_{\perp} для монополюсного источника помимо размерного множителя перед интегралом отличается тем, что содержит в знаменателе под интегралом вместо квадратного корня выражение $(\cos^2 \theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta / N^2)^{3/2}$.

Графики зависимостей боковой силы F_{\perp} , нормированной на силу волнового сопротивления F_{\parallel} , изображены на рис. 4 в декартовых координатах ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) для монополя (а) и для диполя (б) при различных значениях параметра Ω/N . Их вид качественно тот же, что и для гравитационных волн, только значение φ_0 , при котором F_{\perp} обращается в 0, растет с увеличением параметра Ω/N , стремясь к некоторому постоянному значению $\varphi_l > \pi/4$.

В предельном случае, когда параметр Кориолиса (удвоенная частота вращения жидкости) совпадает с частотой Брента-Вяйсяля ($2\Omega = N$), полная радиационная сила обращается в нуль вследствие отсутствия волновых движений в объеме жидкости. Формально это следует из полученных формул для обеих компонент радиационной силы (см., например, (42)).

5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ (ТРЕХМЕРНАЯ) ЗАДАЧА

Исходные общие формулы (5) для внутренних волн и (31) для инерционно-гравитационных волн пригодны при произвольной размерности пространства s . Полагая далее $s = 3$, ограничимся лишь волнами первого типа, поскольку при $s = 3$ учет вращения не дает никаких выгод в отношении сходимости интегралов, усложняя изложение.

При использовании сферических координат (следует обратить внимание на то, что теперь в противоположность плоскому случаю угол θ отсчитывается не от горизонтали, а от вертикали)

$$k_x = k \sin \varphi \sin \theta, \quad k_y = k \cos \varphi \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta, \quad k_{\perp} = k \sin \theta,$$

$$V_{sx} = V_s \sin \gamma, \quad V_{sy} = 0, \quad V_{sz} = V_s \cos \gamma,$$

$$(\mathbf{kV}_s) = kV_s \cos(\mathbf{kV}_s) = kV_s [\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi]$$

имеем угловую параметризацию

$$\delta[\omega - (\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega^2 k^2 - N^2 k_{\perp}^2) = \frac{\delta\{k - N|\sin \theta| / [V_s |\cos(\mathbf{kV}_s)|]\}}{2Nk^2 V_s |\sin \theta \cos(\mathbf{kV}_s)|} \times \\ \times \{H[\cos(\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega - N \sin \theta) + H[-\cos(\mathbf{kV}_s)] \delta(\omega + N \sin \theta)\}.$$

Отметим, что в трехмерном случае вопрос о законности замены $\delta(k^2 \dots) = (1/k^2)\delta(\dots)$ отпадает благодаря компенсирующему множителю k^2 в элементе объема интегрирования.

В итоге для мощности потерь имеем

$$W = \frac{N^2}{16\pi^2 V_s} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{|\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi|} |m_0(\mathbf{k})|^2|_{k=\kappa} d\theta, \quad (43)$$

где

$$\kappa = \frac{N|\sin \theta|}{V_s |\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi|}.$$

Здесь в отличие от плоской задачи логарифмически велик вклад от больших волновых чисел. Достаточным способом регуляризации интегралов теперь является использование формфактора вида $|m_0(\mathbf{k})|^2 = |F(k)|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ или «обрезание» интеграла по волновым числам при больших k , что в угловом представлении эквивалентно ограничению $|\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi| > \varepsilon |\sin \varphi|$. При этом дипольный характер источника не спасает от расходимости, а необходим учет его пространственной протяженности (нелокальности).

Далее, для точечного источника с регуляризирующим формфактором легко находим выражение для боковой радиационной силы

$$F_{\perp} = \frac{N^2}{16\pi^2 V_s^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{|\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi|} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} |m_0(\mathbf{k})|^2|_{k=\kappa} d\theta, \quad (44)$$

$$k_{\parallel} = k(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \varphi), \quad k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2.$$

Оба последних интеграла также не выражаются в элементарных функциях, но могут быть вычислены с помощью ЭВМ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные здесь результаты показывают, что движение источников в стратифицированных средах сопровождается излучением внутренних волн, вследствие чего возникают радиационные силы.

Благодаря тому что внутренние волны обладают анизотропными свойствами в вертикальной плоскости, их генерация источниками происходит, вообще говоря, с различной эффективностью слева и справа от траектории их движения. Поэтому возникающая радиационная сила содержит в общем случае две компоненты: продольную, направленную против скорости источника, — это тормозящая сила волнового сопротивления — и поперечную силу. В данной работе поперечная составляющая радиационной силы для внутренних волн вычислена впервые (ранее аналогичная сила была вычислена для волн Россби на β -плоскости и дрейфовых волн в плазме [13]).

Расчет показал, что в простейших случаях монополюсного и дипольного источников (движущегося без угла атаки в последнем случае) сила волнового сопротивления не зависит от направления движения, тогда как боковая сила существенно зависит от угла между вектором скорости и горизонтальной осью. Эта компонента силы обращается в нуль при движении по горизонтали, по вертикали и под некоторым фиксированным углом к горизонту. Любопытно отметить, что именно в этом направлении движение источника устойчиво по отношению к малым вариациям направления скорости источника: возникающая боковая сила имеет возвращающий характер. При движении по горизонтали или по вертикали малые вариации направления скорости приводят к появлению отклоняющей боковой силы, так что такое движение неустойчиво.

Полученные результаты обобщены на движение в трехмерном пространстве, а также на случай вращающихся стратифицированных сред, когда движение источника вызывает излучение инерционно-гравитационных волн.

Знание радиационной силы позволяет оценить обратное влияние излучаемых волн на движущиеся источники, что дает возможность рассматривать самосогласованные задачи и рассчитывать траектории движения источников.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 96-05-64476, 96-01-00585), INTAS (грант № 94-4057), МЦ ФПИН (грант № 97-2-05) и МОПО (грант № 95-0-13.0-69 и др.).

Авторы благодарны Ю. И. Троицкой за полезные советы и обсуждения.

Литература

1. С. Ф. Доценко, Мор. гидрофиз. исслед., Севастополь, № 2 22 (1973).
2. В. П. Гончаров, В. А. Красильников, В. И. Павлов, Изв. АН СССР, ФАО 12, 1310 (1976).
3. В. П. Докучаев, И. С. Долина, Изв. АН СССР 13, 655 (1977).
4. В. Д. Липовский, Изв. ВУЗов, Радиофизика, ч. I, 23, 159 (1980); Изв. ВУЗов, Радиофизика, ч. II, 23, 655 (1980).
5. В. Д. Липовский, Изв. АН СССР 17, 1134 (1981).
6. В. А. Городцов, Э. В. Теодорович, Изв. АН СССР, МЖГ № 2, 77 (1981).
7. Г. И. Григорьев, *Излучение внутренних гравитационных волн источниками массы, движущимися с переменным ускорением*, Препринт № 164 НИРФИ, Горький (1983).
8. В. А. Городцов, Э. В. Теодорович, в сб. *Н. Е. Кочин и развитие механики*, Наука, Москва (1984), с. 131.
9. В. А. Боровиков, Ю. В. Владимиров, М. Я. Кельберг, Изв. АН СССР, ФАО 20, 526 (1984).
10. И. В. Стурова, в сб. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*, Наука, Новосибирск (1985), с. 200.

11. К. А. Бежанов, А. Т. Онуфриев, А. М. Тер-Крикоров, Изв. АН СССР, МЖГ № 5, 86 (1987).
12. Ю. А. Степанянц, И. В. Стурова, Э. В. Теодорович, Итоги науки и техники, МЖГ, ВИНТИ 21, 93 (1987).
13. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, ЖЭТФ 102, 1047 (1992).
14. С. Н. Резник, Ю. И. Троицкая, Изв. РАН, ФАО 1, 133 (1996).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1984).
16. Дж. Лайтхилл, *Волны в жидкостях*, Мир, Москва (1981).