

СМЕШИВАНИЕ ЧАСТОТ В БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМА

А. Н. Григоренко, П. И. Никитин, Г. В. Рощеткин

*Институт общей физики Российской академии наук
117942, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 ноября 1996 г.

Изучена динамика бистабильной системы, возникающая под действием нескольких периодических возмущений и шума. Рассчитан отклик системы на комбинационных гармониках и изменения отклика, вызванные высокочастотной модуляцией и постоянным полем, снимающим вырождение в бистабильной системе. Смешивание гармоник экспериментально исследовано в тонкой пленке феррита-граната. Показано, что высшие гармоники демонстрируют поведение, характерное для стохастического резонанса, а форма и симметрия зависимости гармоник от постоянного поля, снимающего вырождение, могут быть использованы для определения характеристик бистабильной системы по отклику на внешнюю периодическую модуляцию.

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастический резонанс, представляющий собой вызванное шумом увеличение отклика бистабильной системы на периодическую модуляцию, привлек большое внимание исследователей [1–10]. Интерес был связан с тем, что при стохастическом резонансе шум увеличивает не только отклик системы, но и отношение сигнал/шум.

Напомним основные черты стохастического резонанса. Обычно рассматривается динамика системы в бистабильном потенциале с двумя вырожденными минимумами. В присутствии малой гармонической силы отклик системы (суммарная спектральная плотность обобщенной координаты системы в некотором диапазоне частот на частоте внешней силы) определяется локальной «жесткостью» минимума потенциала, в котором находится система. При наличии шума — случайной силы, индуцирующей переходы системы между минимумами, — отклик системы определяется некоторой глобальной «эффективной» жесткостью потенциала, которая может быть много меньше локальной жесткости минимума. Таким образом, добавление шума в бистабильную систему вызывает увеличение отклика системы на гармоническую модуляцию и может приводить к увеличению отношения сигнал/шум.

Такое поведение не описывается хорошо изученной теорией линейного отклика. Действительно, суммарная сила, действующая на систему в условиях стохастического резонанса, состоит из малой периодической и немалой случайной силы и, следовательно, не является малой. В то же время после усреднения по шумовой компоненте в отклике можно выделить линейную функцию модуляционной силы, а нелинейная система может быть заменена линейной с параметрами, зависящими от уровня шума. Если шум создается тепловыми флуктуациями и система находится в термодинамическом равновесии, это позволяет использовать флуктуационно-диссипативную теорему и теорию линейного отклика [9].

В качестве простейшего примера такой замены рассмотрим систему, отклик которой на статическую силу f дается формулой $X = X(f)$. Предположим, что сила, действующая на систему, состоит из малой периодической f_{\sim} и немалой случайной силы f_{ran} , а частоты таковы, что суммарный отклик по-прежнему дается формулой $X = X(f_{\sim} + f_{ran})$. Тогда

$$X = \sum_{n,m} \frac{X^{(m)}}{m!} C_m^n f_{\sim}^n f_{ran}^{m-n}.$$

Усредняя и выделяя линейную по модуляционной силе часть, получаем

$$X_{\sim} = \sum_m \frac{X^{(2m+1)}}{(2m)!} (f_{ran}^{2m}) f_{\sim} = k f_{\sim},$$

где константа k зависит от параметров шума. При малом шумовом сигнале отклик определяется дифференциалом $X_{\sim} \approx X' f_{\sim}$ и является локальным. При большой силе шума отклик определяется глобальными характеристиками функции $X(f)$ и особенностями потенциала. Главное отличие стохастического резонанса от элементарного примера заключается в необходимости усреднять нелинейные уравнения движения [3, 5, 7, 8]. Тем не менее стохастический резонанс является одной из немногих нелинейных проблем, в которых возможно получение достаточно точных аналитических результатов. В качестве основополагающего примера таких задач отметим маятник Капицы [11].

Стохастический резонанс был исследован экспериментально в различных бистабильных системах: лазерах [4], электрических схемах [3,6], в одноосном ферромагнетике [12] и т.д. Была развита теория резонанса [5, 7–9], включившая такие понятия, как фаза резонанса [13], добротность [14], время первого перехода [15]. Однако основное внимание авторов было сосредоточено на гармонической модуляции, и вопросы смешивания частот в бистабильной системе при наличии шума были затронуты лишь сравнительно недавно [16–19]. Продолжая начатое в [14] исследование, в данной работе мы подробно рассмотрим смешивание гармоник в бистабильном потенциале. Интерес к этому вопросу связан с возможностью получения большей добротности кривой стохастического резонанса (т.е. большей величины пика стохастического резонанса). Действительно, минимум отношения сигнал/шум в случае стохастического резонанса определяется откликом, связанным с динамикой системы внутри одной потенциальной ямы. В то же время смешивание гармоник отсутствует в параболическом потенциале, а значит, тем меньше, чем меньше уровень шума в системе. Особое внимание будет уделено асимметричному случаю, при котором минимумы потенциала различны. Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы опишем экспериментальную установку, при помощи которой изучались явления смешивания гармоник в ферромагнитной системе. В разд. 3 представлены основные экспериментальные результаты. Теория отклика бистабильной системы, подверженной действию двух гармонических сил в присутствии шума, изложена в разд. 4. В разд. 5 проводится сравнение теории с экспериментом и в Заключении даны основные результаты и выводы.

2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЙ И УСТАНОВКИ

Смешивание гармоник в условиях стохастического резонанса экспериментально изучалось в бистабильной магнитной системе, представляющей собой локальный уча-

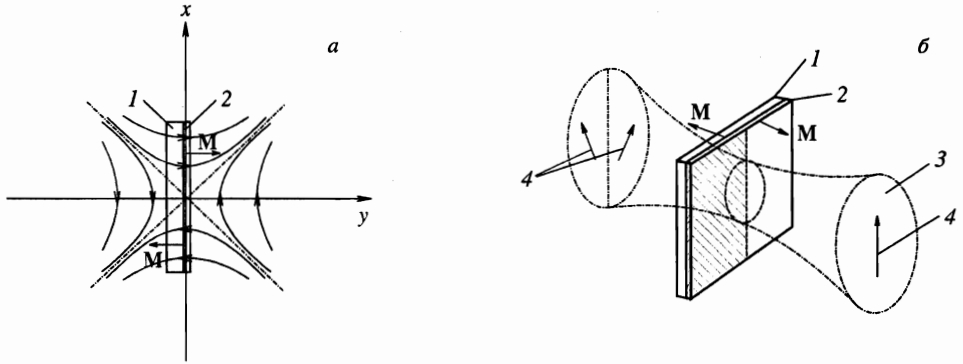


Рис. 1. Схемы положения образца в квадрупольном магнитном поле (а) и фокусировки лазерного излучения на образец (б). Обозначения: 1 — подложка, 2 — феррит-гранатовая пленка, 3 — пучок поляризованного лазерного излучения, 4 — направления поляризации света

сток доменной границы в тонкой легкоосной пленке феррита-граната. Известно [20], что движение доменных границ в феррит-гранатových пленках происходит скачками локальных участков. Эти скачки возникают из-за взаимодействия границы с местами стопорения. Таким образом, локальный участок доменной границы, фиксируемый внешним полем между двумя ближайшими местами стопорения, представляет собой простейшую бистабильную систему. Более подробно характеристики движения доменных границ, параметры мест стопорения и анализ ансамбля магнитных дефектов в феррит-гранатových пленках приведены в работах [21, 22].

Исследовались феррит-гранатовые пленки $(\text{LuBi})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$, $(\text{GdTlBi})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$ толщиной от 7 до 30 мкм с намагниченностью насыщения от 80 до 500 Гс и полем анизотропии от 1 до 1.8 кЭ. Результаты, представленные в статье, получены на пленке состава $(\text{LuBi})_3(\text{FeGa})_5\text{O}_{12}$ со следующими характеристиками: намагниченность насыщения $4\pi M_s = 80$ Гс, поле анизотропии $H_a = 1800$ Э, толщина $h = 30$ мкм, период страйпа $P = 25$ мкм.

Бистабильной системой служил локальный участок изолированной доменной границы с типичным размером ~ 10 мкм, который фиксировался между двумя ближайшими местами стопорения, расположенными на расстоянии ~ 0.4 мкм друг от друга. Обобщенной координатой являлось положение локального участка в пленке, а бистабильный потенциал возникал из-за взаимодействия доменной границы с местами стопорения.

Для формирования изолированной границы феррит-гранатовая пленка располагалась в градиентном магнитном поле с величиной градиента 2000 Э/см, созданном специальной системой магнитов [23]. На рис. 1а показано намагничивание пленки в квадрупольном поле с образованием прямой уединенной границы в седловой линии поля. Подобная геометрия позволяет избежать взаимодействия множества доменных границ, обычно присутствующих в одноосных пленках. Кроме того, перемещая пленку относительно седловой линии градиентного поля, мы могли реализовать прямую изолированную доменную границу в любом подходящем месте пленки.

Важно отметить тот факт, что из-за присутствия множества мест стопорения локальный участок доменной границы двигался в эффективном бистабильном потенциале только при приложении магнитных полей меньше 0.5 Э. При больших полях движение

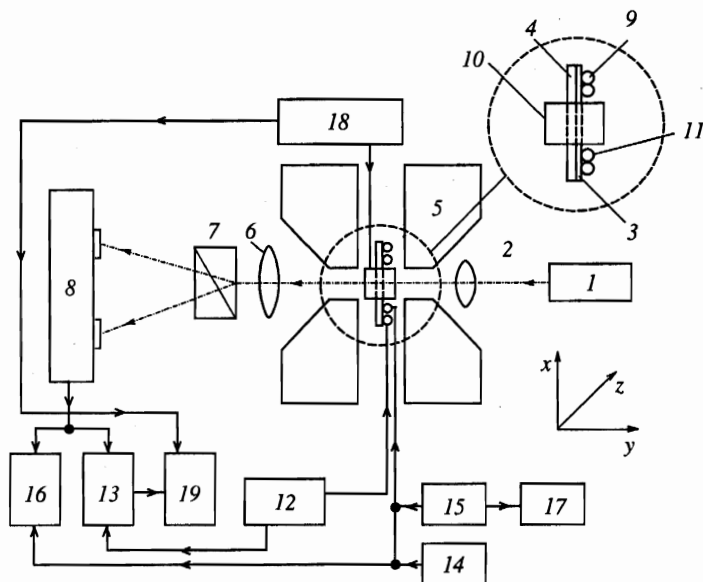


Рис. 2. Принципиальная схема установки: 1 — лазер, 2 — объектив, 3 — феррит-гранатовая пленка, 4 — подложка, 5 — система магнитов, 6 — объектив, 7 — призма Волластона, 8 — фотоприемное устройство, 9, 10, 11 — катушки для создания магнитных полей, 12 — генератор шума, 13 — селективный нановольтметр, 14, 15 — генераторы периодических сигналов, 16, 17 — осциллографы, используемые для контроля основных сигналов, 18 — источник постоянного магнитного поля, 19 — самописец

происходило в мультистабильном потенциале.

Регистрация смещения локального участка проводилась стандартным магнитооптическим методом напросвет. Принципиальная схема установки приведена на рис. 2. Пучок линейно поляризованного излучения He-Ne-лазера 1 с длиной волны $\lambda = 0.63$ мкм и плоскостью поляризации (плоскость yz), перпендикулярной плоскости рисунка, фокусировался объективом 2 с фокусным расстоянием $F = 1.5$ см на поверхность феррит-гранатовой пленки 3, нанесенной эпитаксиальным способом на прозрачную подложку из галлий-гадолиниевого граната 4.

Феррит-гранатовая пленка располагалась в квадрупольном магнитном поле, сформированном системой магнитов 5. При прохождении пучка поляризованного излучения через образец вектор поляризации поворачивался в соответствии с направлением M_z (см. рис. 1б). В результате исходный световой пучок разбивался на два с противоположно ориентированными векторами поляризации. Объектив 6 с фокусным расстоянием $F = 16$ см проецировал изображение освещенного участка пленки в плоскость фотоприемного устройства 8. После прохождения призмы Волластона 7 вышеупомянутые поляризованные пучки разделялись в пространстве по направлениям распространения и попадали на разные фотодиоды. Кроме двух фотодиодов фотоприемное устройство включало в себя схему вычитания шумов и усилитель, сигнал с которого подавался на селективный нановольтметр 13 типа 233 и осциллограф 16. Таким образом, измеряемый сигнал представлял собой изменение оптического потока, возникающее при смещении доменной границы, и был в нашем случае прямо пропорционален смеще-

нию.

В качестве источника шумового магнитного поля использовалась катушка 9. Источником гармонических магнитных полей служили две катушки 10 и 11. Все катушки располагались в непосредственной близости от пленки, как это показано на рис. 2. При этом катушка 10, создававшая медленно изменяющееся с постоянной скоростью поле, располагалась над пленкой, а витки катушки 9 и катушки 11, которая являлась генератором гармонического поля, охватывали кольцами участок пленки под фокальным пятном светового пучка. При такой ориентации катушек возмущающие поля и шумовое поле были направлены вдоль оси y перпендикулярно поверхности пленки, а движение доменной границы происходило вдоль оси x . С целью уменьшения помех, вызванных вибрациями при измерении малых изменений магнитооптических сигналов, вся эта конструкция размещалась на оптическом столе.

В процессе экспериментов шумовое магнитное поле возбуждалось электрическим сигналом, сформированным генератором шума 12. Для контроля и регистрации этот же сигнал подавался на селективный нановольтметр 13. Источниками гармонических сигналов служили генераторы 14 и 15 типа Г4-153. Одновременно эти же сигналы для контроля и в процессе настройки подавались на осциллографы 16 и 17. Для питания катушки 10 использовался генератор постоянного тока 18, который формировал медленно изменяющийся сигнал обеих полярностей таким образом, что поле катушки 10 непрерывно нарастало от -55 мЭ до $+55$ мЭ. Перед началом экспериментов проводилась юстировка оптической схемы и настройка аппаратуры. Юстировка служила достижению следующих основных целей.

1) Фокальное пятно должно было быть достаточно малым, так чтобы не происходило усреднения сигнала отклика по многим локальным участкам доменной границы. Это характеризовалось формой сигнала: при плавном изменении продвигающегося поля она должна была быть ступенчатообразной [20].

2) Доменная граница должна была разбивать засвеченный участок пленки под фокальным пятном на две симметричные части (секторы), как это показано на рис. 16. При этом движение доменной границы индуцировало максимальный сигнал отклика при прочих равных условиях.

3) Место расположения доменной границы в градиентном магнитном поле должно было быть локализовано между двумя одинаковыми по глубине потенциальными ямами.

Выполнение последнего условия определялось следующим образом. В присутствии гармонического магнитного поля включалось шумовое поле, при котором скачкообразно возрастал сигнал отклика, регистрируемый селективным нановольтметром 13. Далее на катушку 10 с помощью генератора 18 подавался слабый постоянный ток. Возникшее при этом магнитное поле сдвигало доменную границу вдоль оси x , вследствие чего наблюдалось уменьшение сигнала отклика. Если при перемене направления постоянного тока и, соответственно, сдвига доменной границы в другую сторону происходило уменьшение сигнала до той же величины, это являлось свидетельством выполнения вышеуказанного условия.

4) Призма Волластона 7 должна была быть ориентирована так, чтобы в отсутствие продвигающегося поля сигнал с фотоприемного устройства в виде шумовой дорожки имел минимальную амплитуду.

Настройка аппаратуры состояла в установлении параметров шумового и возмущающих сигналов, требуемых для проведения конкретного эксперимента.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

В первой части экспериментов измерялся отклик локального участка доменной границы на приложенное гармоническое поле в присутствии случайного магнитного поля. Откликом являлась спектральная плотность магнитооптического сигнала, измеренная с помощью селективного нановольтметра с селективностью 54 дБ. В зависимости отклика от частоты можно было выделить узкий пик, связанный с внешним гармоническим полем, и плавную кривую, связанную с шумовыми полями. Вклад в отклик на частоте внешней гармонической силы, вызванный этой силой, был в нашем случае измеряемым сигналом, в то время как вклад в этот отклик, обусловленный случайной силой, являлся шумом. В исследуемых условиях шумовые характеристики отклика (шум) в отсутствие модулирующего поля не изменялись. Таким образом, шум мог быть измерен как отклик системы в отсутствие модуляции. Еще раз отметим, что магнитооптический сигнал был прямо пропорционален перемещению локального участка доменной границы, т. е. обобщенной координате исследуемой бистабильной системы.

В качестве характеристики шума выступала спектральная плотность N шумового магнитного поля. Она определялась по спектральной плотности тока в шумовой катушке на частоте внешнего гармонического поля и выражалась в единицах $\text{мкЭ}/\text{Гц}^{1/2}$. Генератор шума позволял изменять параметр шума N в пределах от $15 \text{ мкЭ}/\text{Гц}^{1/2}$ до $110 \text{ мкЭ}/\text{Гц}^{1/2}$. Амплитуда гармонического поля задавалась в пределах от 5 мЭ до 50 мЭ , а частота — от 200 Гц до 7 кГц .

На рис. 3 показаны зависимости сигнала и шума, параметризованные сопротивлением, задающим параметр шума в генераторе шума, и измеренные при малом времени интегрирования. На рис. 4 приведена зависимость отношения сигнал/шум от N . Заметим, что по мере изменения N отношение сигнал/шум сначала уменьшается, затем начинает возрастать и при некотором N достигает локального максимума, после чего убывает. Присутствие такого максимума и характеризует наличие магнитостохастического резонанса. Таким образом, доменная граница, фиксированная между двумя ближайшими местами стопорения, действительно находится в условиях стохастического резонанса.

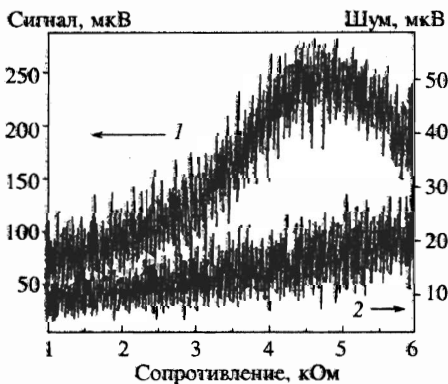


Рис. 3. Зависимости сигнала (1) и шума (2) от сопротивления, задающего параметр шума. Амплитуда переменного поля 9 мЭ , частота 260 Гц



Рис. 4. Кривая стохастического резонанса для основной гармоники. Амплитуда переменного магнитного поля 9 мЭ , частота 260 Гц

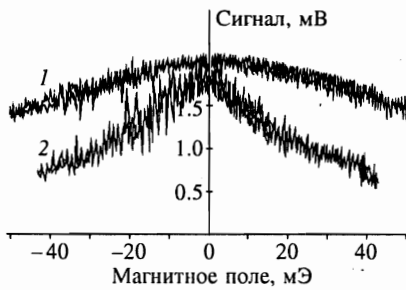


Рис. 5. Зависимость сигнала от постоянного магнитного поля, делающего минимумы бистабильного потенциала неравными, при $N = 63 \text{ мкЭ/Гц}^{1/2}$ (1) и $N = 27 \text{ мкЭ/Гц}^{1/2}$ (2). Амплитуда гармонического поля 18 мЭ, частота 4 кГц

Затем нами была изучена зависимость отклика системы от симметрии потенциала. Для снятия вырождения минимумов бистабильного потенциала прикладывалось постоянное магнитное поле, перпендикулярное плоскости пленки. При достаточно большом постоянном поле система становится моностабильной и локальный участок доменной границы фиксируется на микродефекте. Это приводит к разрушению условий стохастического резонанса и, как следствие, к уменьшению отклика на приложенное переменное поле.

На рис. 5 приведены кривые отклика, измеренные на частоте модулирующего поля 4 кГц, в зависимости от амплитуды постоянного магнитного поля, снимающего вырождение. В качестве параметра выступала величина N , которая изменялась от $15 \text{ мкЭ/Гц}^{1/2}$ до $63 \text{ мкЭ/Гц}^{1/2}$. Как видно из рис. 5, кривые монотонно спадают для обоих направлений поля. По мере увеличения силы шума происходит уширение кривой спада отклика. Это уширение может быть охарактеризовано при помощи величины ΔH — диапазона полей, в которых отклик больше или равен 0.5 уровня максимума сигнала. На рис. 6 показана зависимость ΔH и максимума S сигнала ($S(H = 0)$) от квадрата параметра шума N^2 , который пропорционален уровню шума в системе. Как видно, кривая $S(N^2)$ имеет максимум при $N^2 = 1400 \text{ мкЭ}^2/\text{Гц}$, а зависимость $\Delta H(N^2)$ линейно растет с ростом N^2 во всем диапазоне изменения.

Основная часть экспериментов была посвящена смешиванию различных гармоник: движению доменной границы под действием двух гармонических полей H_1 и H_2 с частотами f_1 и f_2 . Исследовалось смешивание гармоник как в бистабильном потенциале с равными минимумами, так и при приложении постоянного поля, снимающего вырождение. Зависимость отклика от силы шума имела типичный вид, соответствующий стохастическому резонансу. На рис. 7 представлена кривая стохастического резонанса для нечетной гармоники, возникающая под действием двух гармонических полей с частотами $f_1 = 3 \text{ кГц}$ и $f_2 = 500 \text{ Гц}$, амплитудами $H_1 = 20 \text{ мЭ}$, $H_2 = 25 \text{ мЭ}$, измеренная на частоте $f_1 + 2f_2 = 4 \text{ кГц}$. Эта зависимость от параметра шума измерялась в отсутствие постоянного поля. Четные гармоники отклика в этих условиях не наблюдались. При приложении постоянного поля появлялись четные гармоники. На рис. 8 приведена кривая стохастического резонанса для четной гармоники $f_1 + f_2$, измеренная при следующих значениях параметров: $f_1 = 3 \text{ кГц}$, $H_1 = 30 \text{ мЭ}$, $f_2 = 500 \text{ Гц}$, $H_2 = 30 \text{ мЭ}$, постоянное поле $H = 10 \text{ мЭ}$. Особый интерес представляла зависимость сигналов высших гармоник от постоянного поля, делающего минимумы потенциала неравными. При этом фиксировался уровень шума, а постоянное поле изменялось в пределах от -55 мЭ до 55 мЭ . На рис. 9 показана зависимость сигнала четной гармоники, полученная при параметре шума $N = 27 \text{ мкЭ/Гц}^{1/2}$ и при следующих параметрах гармонических полей:

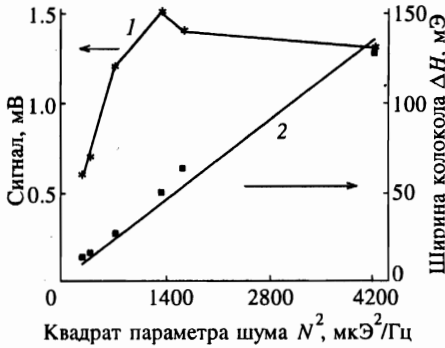


Рис. 6. Зависимости ширины колокола ΔH (1) и максимума сигнала S (2) от квадрата параметра шума. Амплитуда гармонического поля 18 мЭ, частота 4 кГц

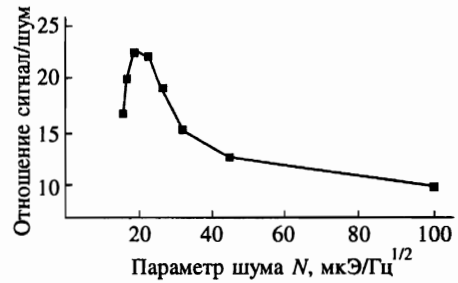


Рис. 7. Кривая стохастического резонанса для нечетной гармоники. Амплитуда гармонических полей $H_1 = H_2 = 20$ мЭ, частоты $f_1 = 3$ кГц, $f_2 = 500$ Гц. Частота регистрации сигнала $f = f_1 + 2f_2 = 4$ кГц

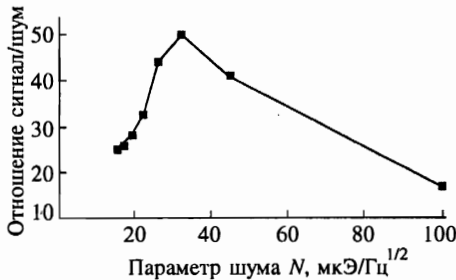


Рис. 8. Кривая стохастического резонанса для четной гармоники. Амплитуды гармонических полей $H_1 = 30$ мЭ, $H_2 = 21$ мЭ, частоты $f_1 = 2.2$ кГц, $f_2 = 500$ Гц. Частота регистрации $f = f_1 + f_2 = 2.7$ кГц, постоянное поле, снимающее вырождение, равнялось 10 мЭ.

$f_1 = 4$ кГц, $H_1 = 7.7$ мЭ, $f_2 = 1$ кГц, $H_2 = 11.2$ мЭ. Отметим минимум отклика при нулевом поле и два симметричных максимума. При увеличении параметра шума расстояние между максимумами этой кривой увеличивалось. Аналогичную форму имел отклик на частоте второй гармоники. Для нечетных гармоник была характерна другая форма зависимости отклика от постоянного поля, разрушающего симметрию системы. Эта зависимость, показанная на рис. 10, имела максимум при нулевом постоянном поле. Зависимость была снята при $f = 4$ кГц, $H = 16$ мЭ, частота регистрации равнялась $3f = 12$ кГц, параметр шума равнялся $N = 27$ мкЭ/Гц^{1/2}. Ширина кривой, показанной на рис. 10, также увеличивалась при увеличении параметра шума.

4. ТЕОРИЯ

Одномерное движение системы в бистабильном потенциале $U_0(x)$ при наличии модуляции $F(t) = f_1 \cos(\omega_1 t) + f_2 \cos(\omega_2 t)$, постоянной силы h , снимающей вырождение потенциала, и случайной шумовой силы $\xi(t)$ описывается уравнением Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU_0(x)}{dx} + F(t) + h + \xi(t). \quad (1)$$

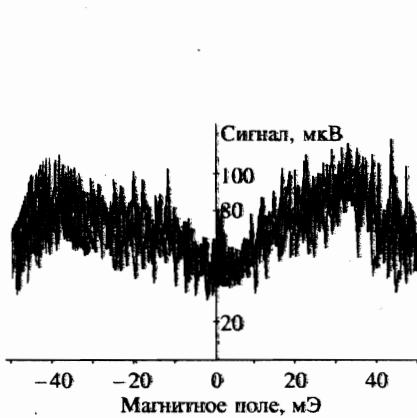


Рис. 9. Зависимость сигнала четной гармоники от постоянного магнитного поля, делающего минимумы бистабильного потенциала неравными. Амплитуды гармонических сигналов $H_1 = 7.7$ мЭ, $H_2 = 11.2$ мЭ, частоты $f_1 = 4$ кГц, $f_2 = 1$ кГц, частота регистрации $f = f_1 + f_2 = 5$ кГц, параметр шума $N = 27$ мкЭ/Гц^{1/2}

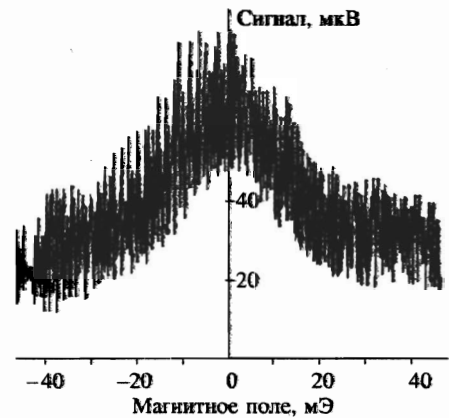


Рис. 10. Зависимость сигнала третьей гармоники от постоянного магнитного поля, делающего минимумы бистабильного потенциала неравными. Амплитуда гармонического сигнала $H_1 = 16$ мЭ, частота поля $f_1 = 4$ кГц, частота регистрации $f = 3f_1 = 12$ кГц, параметр шума $N = 27$ мкЭ/Гц^{1/2}

Наша задача состоит в том, чтобы найти отклик системы на внешнюю модуляцию, т. е. спектральную плотность координаты системы в некотором интервале частот на частоте внешнего поля или на комбинационных гармониках. Для нахождения искомого отклика воспользуемся подходом, в котором непрерывная динамика системы заменяется дискретными скачками между минимумами потенциала [5].

Такая замена возможна при не слишком высоком уровне шума, когда система большую часть времени проводит вблизи минимумов потенциала. Определим $n_+(t)$ как вероятность найти систему вблизи правого минимума, в то время как $n_-(t)$ будет вероятностью найти систему вблизи левого минимума:

$$n_+(t) = 1 - n_-(t) = \int_c^\infty p(x, t) dx, \tag{2}$$

где c — положение максимума потенциала, а $p(x, t)$ — плотность вероятности для изучаемой системы. Тогда уравнение динамики населенностей n_+ и n_- может быть записано в виде

$$\frac{dn_+}{dt} = -\frac{dn_-}{dt} = W_-(t)n_- - W_+(t)n_+, \tag{3}$$

где $W_+(t)$, $W_-(t)$ — вероятности перехода в единицу времени из правого и левого минимумов соответственно. Плотность распределения дискретной системы $P(x, t)$ задается соотношением

$$P(x, t) = n_+(t)\delta(x - x_+) + n_-(t)\delta(x - x_-), \tag{4}$$

где x_{\pm} выбираются таким образом, чтобы совпали средние значения x и x^2 , вычисляемые при помощи функций $p(x, t)$ и $P(x, t)$.

В отсутствие модуляции ($F(t) = 0$) стационарное распределение задается формулой

$$p(x, t) = \mathcal{N} \exp[-U_0(x)/D], \quad (5)$$

где \mathcal{N} — нормировочная константа, а D — уровень шума. Предположим, что $\pm a$ — минимумы симметричного бистабильного потенциала, а разложение потенциала вблизи минимумов имеет вид

$$U_0(x) \approx U_0(\pm a) + k(x \pm a)^2/2.$$

Тогда при

$$D \ll ka^2 \quad (6)$$

система действительно проводит большую часть времени вблизи минимумов и стационарное значение населенности находится как

$$n_{+0} = N \int_c^{\infty} \exp\left[-\frac{U_0(x) - hx}{D}\right] dx. \quad (7)$$

Это дает

$$n_{\pm 0} = \frac{\exp(\pm ha/D)}{2 \operatorname{ch}(ha/D)}. \quad (8)$$

При этом в среднее значение моментов

$$\langle x^n \rangle = N \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left[-\frac{U_0(x) - hx}{D}\right] dx \quad (9)$$

также основной вклад вносят минимумы потенциала. Проводя вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &\approx a \operatorname{th}(ha/D), \\ \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &\approx a^2 [\operatorname{ch}^2(ha/D)]^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

и, соответственно, $x_{\pm} = \langle x \rangle \pm 2n_{\mp 0}a$, так что $x_+ - x_- = 2a$ даже в присутствии постоянной силы h .

В рамках того же приближения малого шума (6) мы можем написать формулу для частоты перехода [24]:

$$W_{\pm} = \nu_0 \exp\left[-\frac{U(c) - U(a_{\pm})}{D}\right], \quad (11)$$

где $2\pi\nu_0 = \sqrt{|U''(a_{\pm})U''(c)|}$, a_{\pm} и c — положения минимумов и максимума потенциала соответственно.

Поскольку мы предполагаем, что шум не слишком велик, см. (6), то частота перехода W_{\pm} много меньше характерной частоты движения системы в минимуме $\omega_0 = k$, которая соответствует установлению локального равновесия. Поэтому при частотах внешних полей, удовлетворяющих условию

$$\omega_{1,2} \ll \omega_0, \tag{12}$$

справедливо адиабатическое приближение, при котором зависимость $W_{\pm}(t)$ находится путем подстановки в формулу (11) мгновенных значений положений максимума потенциала. Это приводит к следующей формуле для W_{\pm} :

$$W_{\pm} = \nu_K \exp\left(\frac{\mp(h+F)a - q(h+F)^2/k}{D}\right), \tag{13}$$

где

$$\nu_K = \nu_0 \exp\left[-\frac{U(0) - U(a)}{D}\right]$$

— частота Крамерса, а q — численный коэффициент порядка единицы, зависящий от формы потенциала. Точно задача (3), (13) не решается. Мы рассмотрим два предельных случая: 1) обе силы малы и 2) одна сила мала, а вторая произвольна, но имеет большую частоту.

4.1. Слабая модуляция

В этом случае можно пренебречь квадратичным членом в знаменателе экспоненты (13) и разложить все величины в ряд по малому параметру $\epsilon = Fa/D$: $n_+ = n_{+0} + n_{+1} + n_{+2} + \dots$, $W_{\pm} = W_{\pm 0} + W_{\pm 1} + W_{\pm 2} + \dots$. Это дает цепочку уравнений, первое из которых определяет стационарную плотность, а другие,

$$\frac{dn_{+1}}{dt} = \frac{W_{-1}W_{+0} - W_{+1}W_{-0}}{W_{+0} + W_{-0}} - (W_{+0} + W_{-0})n_{+1}, \tag{14.1}$$

$$\frac{dn_{+2}}{dt} = -(W_{+1} + W_{-1})n_{+1} - (W_{+0} + W_{-0})n_{+2}, \tag{14.2}$$

описывают резонанс и смешивание гармоник в несимметричном потенциале. Сигнал находится либо при помощи корреляционной функции $\langle x(t + \tau)x(t) \rangle$, либо методом формального расчета x_{ω} и $|x_{\omega}|^2$.

Оба подхода дают в случае $h \neq 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$ следующие формулы для спектральной плотности и отношения сигнал/шум:

$$S(\omega) = \left(4n_{+0}n_{-0} - \frac{2A^2}{B^2 + \omega_1^2}\right) \frac{4a^2B}{B^2 + \omega^2} + \frac{4\pi a^2 A^2}{B^2 + \omega_1^2} \delta(\omega_1 - \omega), \tag{15}$$

где

$$A = \frac{2W_{+0}W_{-0}}{W_{+0} + W_{-0}} \frac{fa}{D}, \quad B = W_{+0} + W_{-0} = 2\nu_K \operatorname{ch}\left(\frac{ha}{D}\right),$$

и

$$R = \frac{\pi f^2 a^2}{D^2} \frac{\nu_0 \exp(-\Delta U/D)}{2 \operatorname{ch}(ha/D) \Delta f} = \frac{R_0}{\operatorname{ch}(ha/D)}, \tag{16}$$

где Δf — ширина детектируемой полосы, а R_0 — отношение сигнал/шум в отсутствие постоянной силы h . При частоте $\omega_1 \ll B$ зависимость сигнала может быть найдена как

$$S = S_0 [\text{ch}^4(ha/D)]^{-1}, \quad (17)$$

где S_0 — сигнал при $h = 0$. Смешивание гармоник находится решением системы (14). В случае $\omega_1, \omega_2 \ll W_{+0} + W_{-0}$ отношение сигнал/шум для высших гармоник задается следующими уравнениями:

$$R_2(\omega = \omega_1 + \omega_2) = \frac{\pi f_1^2 f_2^2 a^6}{D^4 \Delta f} \frac{\nu_0 \exp(-\Delta U/D)}{\text{ch}(ha/D)} \text{th}^2 \left(\frac{ha}{D} \right), \quad (18.1)$$

$$R_3(\omega = \omega_1 + 2\omega_2) = \frac{2\pi f_1^2 f_2^4 a^8}{D^6 \Delta f} \frac{\nu_0 \exp(-\Delta U/D)}{\text{ch}(ha/D)} \text{th}^2 \left[1 + 3 \text{th}^2 \frac{ha}{D} \right]. \quad (18.2)$$

(Заметим, что в [14] была допущена ошибка при вычислении сигнала смешанных гармоник.) Таким образом, $R_{n+1} \sim (fa/D)^{2n} R_0$, где R_0 — отношение сигнал/шум для основной гармоники, и, следовательно, высшие гармоники также демонстрируют стохастический резонанс. Кроме того, все гармоники зависят от постоянного поля h , делающего минимумы неравными, с характерной шкалой D/a .

4.2. Быстрая модуляция

Предположим, что сила f_2 не мала, а частота ω_2 велика: $\omega_2 \gg \nu_K, \omega_1$. (При этом частота ω_2 все еще меньше основной частоты колебаний системы ω_0 , так что справедливо адиабатическое приближение.) Тогда в отклике можно выделить быструю и медленную составляющие и провести усреднение по быстрой. Это приводит к уравнению для медленной составляющей $n_{1+}(t)$:

$$\frac{dn_{1+}}{dt} = \langle W_-(t) \rangle - [\langle W_+(t) + W_-(t) \rangle] n_{1+}, \quad (19)$$

где под $\langle W \rangle$ подразумевается усреднение формулы (13) по быстрой компоненте. Проводя вычисления, получаем

$$\frac{1}{G} \frac{dn_{1+}}{dt} = W_-(t) - [W_+(t) + W_-(t)] n_{1+}, \quad (20)$$

где $W_{\pm}(t)$ соответствуют вероятностям перехода для случая, когда действует лишь одна сила f_1 ,

$$G(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\alpha') \exp \left[-\frac{(\alpha' - \alpha)^2}{4\beta} \right] d\alpha', \quad (21)$$

где $\alpha = f_2 a/D$, $\beta = q f_2^2 / kD$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Уравнение (21) описывает стохастический резонанс для гармоники ω_1 . Наличие сильного переменного поля большой частоты и немалой амплитуды приводит к перенормировке основной частоты $\nu_0 \rightarrow G\nu_0$. Это дает отношение сигнал/шум, аналогичное обычному выражению для стохастического резонанса:

$$R(\omega_1) \cong \frac{\pi f_1^2 a^2}{D^2 \Delta f} \frac{G\nu_0 \exp(-\Delta U/D)}{2 \text{ch}(ha/D)}. \quad (22)$$

Однако, как следует из (21), G зависит от уровня шума D . Легко получить следующие асимптотики для G : $G \rightarrow 0$ при $D \rightarrow \infty$ и $G \approx \exp(f_2 a / D)$ при $D \rightarrow 0$. Таким образом, при малом шуме высокочастотная сила f_2 приводит к уменьшению эффективной высоты барьера до величины $\Delta U \cong \Delta U - f_2 a$, что подтверждает наблюдение, сделанное в работе [16].

5. СРАВНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА И ТЕОРИИ

Движение доменной границы, рассмотренное в разд. 3, описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mu \left[-\frac{dW_0}{dx} + H(t) + H + H_{ran} \right], \quad (23)$$

где μ — подвижность доменных границ, $W_0(x)$ — бистабильный потенциал магнитных микродефектов, $H(t)$ — модуляционное магнитное поле, H — постоянное поле и H_{ran} — шумовое поле. Сравнение (1) и (23) позволяет заключить, что уровень шума D определяется формулой

$$D = (\mu N)^2, \quad (24)$$

где N — параметр шума, используемый в разд. 3, а постоянное поле h находится как $h = \mu H$. Высота потенциального барьера U_0 может быть оценена как $U_0 = \mu H_c a \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$, где $\mu = 10^3 \text{ см}(\text{с}\cdot\text{Э})^{-1}$ — подвижность доменных границ в исследуемой пленке, $H_c = 0.2 \text{ Э}$ — поле отрыва доменных границ от мест стопорения, которое было близко к полю коэрцитивности пленки, $2a \approx 0.4 \text{ мкм}$ — расстояние между минимумами потенциала. Характерная частота движения границы находится как $\nu_0 \approx \mu H_c / a = 10^7 \text{ Гц}$, а частота Крамерса ν_K изменялась в наших экспериментах от нуля до $6 \cdot 10^6 \text{ Гц}$.

Экспериментальные данные находятся в хорошем согласии с теорией. Действительно, положение максимума стохастического резонанса на основной гармонике соответствует условию $2D_{max} = U_0$, откуда $N_{max} = \sqrt{H_c a / 2\mu} = 45 \text{ мкЭ}/\text{Гц}^{1/2}$, что хорошо совпадает с измеренной величиной $N_{max} = 49 \text{ мкЭ}/\text{Гц}^{1/2}$, см. рис. 4. На рис. 7 и 8 также есть пики отношения сигнал/шум на комбинационных частотах. Это означает, что существует оптимальная величина шума в системе, при которой отношение сигнал/шум максимально на высших гармониках. Экспериментальный диапазон изменения шума не позволил нам зарегистрировать увеличение отношения сигнал/шум при малых значениях шума, а сравнение рис. 7, 8 с рис. 4 позволяет сделать вывод о том, что добротность резонанса выше на смешанных гармониках, см. [14].

Наиболее интересным с точки зрения практических применений является зависимость гармоник от постоянного поля h , делающего минимумы неравными. Поле h приводит к уничтожению одного из важнейших условий стохастического резонанса — бистабильности — и уменьшает отклик на основной и высших гармониках, что демонстрируют рис. 5, 9, 10, а также формулы (15), (16), (18). Это позволяет использовать стохастический резонанс для регистрации не только периодических, но и медленно изменяющихся полей. При этом поле h входит в основные соотношения только в комбинации ha/D и, следовательно, зависимость гармоник от h имеет одну и ту же шкалу D/a . Таким образом, зная только один параметр a (характеризующий расстояние между

вырожденными минимумами) и измерив ширину кривой спада нечетных гармоник или расстояние между максимумами четных гармоник, мы можем по зависимости отклика на внешнюю модуляцию определить значение уровня шума в системе.

Зависимость ширины колокола сигнала ΔH , показанного на рис. 5, от квадрата параметра шума N^2 , пропорционального уровню шума D , см. (24), приведена на рис. 6. Как видно из рис. 6, ширина ΔH действительно прямо пропорциональна величине D . Зная уровень шума в системе и величину ΔH , мы можем оценить расстояние между минимумами бистабильной системы. Это дает $2a \cong \mu N^2 / \Delta H \sim 0.5$ мкм, что согласуется с величиной $2a = 0.4$ мкм, полученной из статических измерений.

Кроме того, важно отметить симметрию четных и нечетных гармоник в зависимости от постоянного поля h . Нечетные гармоники имеют максимум при $h = 0$, а четные — минимум (см. рис. 9 и 10). Расстояние между максимумами четных гармоник, как показывают измерения, также увеличивается с ростом шума и может быть аппроксимировано формулой $\Delta H \cong \mu N^2 / a$. Таким образом, косвенные измерения отклика системы на периодическую модуляцию позволяют делать заключения о туннельных характеристиках системы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Нами было теоретически и экспериментально показано, что комбинационные гармоники, возникающие под действием на бистабильную систему двух периодических сил в присутствии шума, демонстрируют поведение, характерное для стохастического резонанса. Была исследована зависимость сигналов на основных и смешанных гармониках от постоянного поля, делающего минимумы неравными, и показано, что искомая зависимость имеет шкалу изменения, пропорциональную силе шума. Полученные закономерности были проверены на простейшей магнитной бистабильной системе — локальном участке доменной границы, фиксированной между двумя ближайшими микродефектами в тонкой феррит-гранатовой пленке. Был зарегистрирован стохастический резонанс на смешанных гармониках (второго и третьего порядка), измерена зависимость гармоник от постоянного поля, делающего минимумы бистабильного потенциала неравными. Симметрия гармоник и параметры их изменений оказались в качественном согласии с развитой теорией.

Наиболее важным следствием проведенных исследований является возможность определения флуктуационных параметров бистабильной системы (уровень шума) при помощи измерения отклика системы на периодическую модуляцию (изменение отклика при приложении постоянного поля, делающего минимумы неравными).

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 96-02-18956 и 96-02-19608), а также Международной ассоциацией INTAS (грант 94-1720).

Литература

1. R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, *J. Phys. A* **14**, L453 (1981).

2. R. Benzi, G. Parisi, A. Suter, and A. Vulpiani, *Tellus* **34**, 10 (1982).
3. S. Fauve and F. Heslot, *Phys. Lett. A* **97**, 5 (1983).
4. B. McNamara, K. Wiesenfeld, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2626 (1988).
5. B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **39**, 4854 (1989).
6. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, and S. Santucci, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 349 (1989).
7. R. Fox, *Phys. Rev. A* **39**, 4148 (1989).
8. P. Yung and P. Hanggi, *Phys. Rev. A* **41**, 2977 (1990).
9. М. И. Дыкман, П. В. Мак-Клинтон, Р. Манелла, Н. Г. Стокс, *Письма в ЖЭТФ* **52**, 780 (1990).
10. А. Н. Григоренко, В. И. Конов, П. И. Никитин, *Письма в ЖЭТФ* **52**, 1182 (1990).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1965).
12. A. N. Grigorenko, P. I. Nikitin, A. N. Slavin, and P. Zhou, *J. Appl. Phys.* **76**, 6335 (1994).
13. M. I. Dykman, R. Manella, P. V. E. McClintock, and N. G. Stocks, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2985 (1992).
14. A. N. Grigorenko, P. I. Nikitin, and G. V. Roschepkin, *J. Appl. Phys.* **79**, 6113 (1996).
15. L. Gammaitoni, F. Marchesoni, and S. Santucci, *Phys. Lett.* **195**, 116 (1994).
16. S. Vohra and L. Fabiny, *Phys. Rev. E* **50**, R2391 (1994).
17. R. Bartussek, P. Jung, and P. Hanggi, *Phys. Rev. E* **49**, 3930 (1994).
18. V. Shneidman, P. Jung, and P. Hanggi, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2682 (1994).
19. P. Jung and P. Talkner, *Phys. Rev. E* **51** (3Part B), 2640 (1995).
20. А. Н. Григоренко, С. А. Мишин, А. М. Прохоров, Е. Г. Рудашевский, *ФТТ* **30**, 2948 (1988).
21. А. Н. Григоренко, С. А. Мишин, Е. Г. Рудашевский, *ФТТ* **31**, 107 (1989).
22. А. Н. Григоренко, С. А. Мишин, Е. Г. Рудашевский, *ЖТФ* **14**, 1722 (1988).
23. А. Н. Григоренко, О. А. Ларин, С. А. Мишин, Е. Г. Рудашевский, *ПТЭ* (1), 163 (1988).
24. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986).