ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 3(9), стр. 796–804

ТОМОГРАФИЯ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ

В. И. Манько, О. В. Манько

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 1997 г.

Для произвольного значения спина предложена схема измерения его квантового состояния, аналогичная схеме симплектической томографии, используемой для измерения квантовых состояний, связанных с непрерывными наблюдаемыми типа координаты и импульса. Дан вывод инвариантной формы для оператора плотности спинового состояния через интеграл по углам, задающим ось квантования, от произведения измеряемой вероятности значений проекции спина на выделенное направление и шаровых функций, суммированных с коэффициентами Клебша–Гордана.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике по отношению к классической механике радикально изменено понятие «состояние системы» [1]. Состояние квантовой системы описывается либо волновой функцией [2] (для чистых состояний), либо матрицей плотности [3, 4] (для смешанных состояний). С самого начала развития квантовой механики предпринимались попытки «классического» ее объяснения [5–7], не приведшие, однако, к результату. В рамках попыток приблизить описание квантового состояния на языке матрицы плотности к классическому описанию, под которым понимается сопоставление состоянию положительной нормированной функции распределения вероятности измеряемой величины (например, координаты или импульса), была введена функция Вигнера [8], а также P-распределение Глаубера–Сударшана [9, 10] и Q-функция Хусими–Кано [11, 12]. Все эти функции зависят от переменных q и p и нормированы, а для отдельных квантовых состояний (например, осциллятора при температуре T) похожи на классические функции распределения в фазовом пространстве. Однако все эти функции не являются распределениями вероятности, что очевидно, поскольку соотношение неопределенностей координаты и импульса не позволяет измерить одновременно эти сопряженные величины, и поэтому для квантовой системы (например, осциллятора) не существует функции распределения в фазовом пространстве. В этой связи функции Вигнера, Глаубера–Сударшана, Хусими–Кано, задающие полностью смешанное квантовое состояние и связанные друг с другом и с матрицей плотности в координатном представлении обратимыми интегральными преобразованиями, были названы квазираспределениями. Квазираспределения существенно отличаются от распределений вероятности. В частности, функция Вигнера, будучи действительной функцией, может принимать отрицательные значения и поэтому не может являться распределением вероятности, для которой возможны только неотрицательные значения. Функция Хусими–Кано нормирована и принимает только неотрицательные значения, однако ее аргументы q и p не являются одновременно измеряемыми координатой и импульсом, поэтому эта функция также является квазираспределением. Тем не менее оказалось, что можно описывать квантовые состояния системы не только квазивероятностями, но и настоящими функциями распределения вероятностей.

Измеряемыми величинами в квантовой механике являются величины типа координаты, импульса, энергии. Но возможна и такая физическая постановка вопроса: как измерить само квантовое состояние системы (т.е. функцию Вигнера, матрицу плотности)? При решении этого вопроса удалось показать, что можно задавать состояние квантовой системы не только квазираспределениями, например, функцией Вигнера, но и настоящими распределениями вероятностей. Эти распределения названы маргинальными распределениями, поскольку наряду со случайной физической величиной зависят также от дополнительных параметров, описывающих разные системы отсчета в классическом фазовом пространстве системы.

В последние годы задача измерения квантового состояния интенсивно исследовалась теоретически и экспериментально. Так, в [13, 14] была найдена связь функции Вигнера [8] с измеряемым маргинальным распределением вероятностей для гомодинной наблюдаемой, являющейся повернутой на заданный угол координатой в фазовом пространстве системы. Функция Вигнера одномерной системы была выражена через эту измеряемую нормированную положительную функцию распределения с помощью преобразования Радона (с интегрированием по углу поворота в фазовом пространстве), используемого в обычной медицинской томографии. В этой связи схема измерений квантового состояния для непрерывной наблюдаемой типа координаты или импульса была названа схемой оптической томографии, и эта схема была применена в экспериментах по реконструкции квантового состояния моды электромагнитного излучения [15] и в молекулярной спектроскопии [16]. Схема оптической томографии была модифицирована в [17, 18] в схему симплектической томографии, использующей для реконструкции квантового состояния измерение нормированной и положительной функции распределения для непрерывной наблюдаемой, являющейся координатой, измеренной не в одной системе отсчета в фазовом пространстве, а в ансамбле систем отсчета, связанных друг с другом линейными преобразованиями поворота и изменения масштаба. В этой схеме, названной схемой симплектической томографии, для восстановления функции Вигнера по данным эксперимента используется не преобразование Радона, а преобразование Фурье, что позволило обобщить схему симплектической томографии на многомодовые системы [18].

Схема оптической томографии была сформулирована в работе [19] в инвариантной форме, не зависящей от используемого квантовомеханического представления. В этой работе через измеряемое распределение вероятностей было получено выражение для оператора плотности (а не только функции Вигнера). Инвариантное выражение для оператора плотности в схеме симплектической томографии было дано в [18] и использовано в [20] для получения классически–подобного уравнения эволюции для квантового состояния, описываемого положительным маргинальным распределением (непрерывной наблюдаемой), эквивалентного уравнению Шредингера для волновой функции.

Еще одна модификация томографического метода измерения квантового состояния была рассмотрена в [21–23]. В предложенной в этих работах схеме измеряется распределение по дискретному числу квантов (фотонов) в исследуемой моде, дополнительно зависящее от контролируемых фазы и амплитуды внешнего классического поля, накладываемого на поле сигнала, находящееся в квантовом состоянии. Реконструкция четных и нечетных когерентных состояний [24] иона в ловушке [25] обсуждалась в [26–

30]. Такие состояния экспериментально реализованы для иона в ловушке [31] и для моды электромагнитного поля в микрорезонаторе [32].

С другой стороны, чисто квантовым объектом является спин, и он не имеет классического предела. Его состояния обычно описываются спинорами. Для этой сугубо квантовой величины также важна физическая задача: как измерить квантовое состояние спиновой степени свободы? Попытка ввести описание состояний дискретной квантовой наблюдаемой типа спина с помощью классического распределения была сделана в [33]. Схема связи спиновой матрицы плотности с наблюдаемым маргинальным распределением для произвольного спина кратко обсуждается в [34] по аналогии с работами по оптической и симплектической томографиям в неинвариантной формулировке [13, 14, 17] и с использованием групповой трактовки томографических схем, предложенной в [23, 35].

Целью настоящей работы является подробный вывод и анализ метода томографии спиновых состояний, кратко сформулированного в [34], и получение инвариантного выражения для оператора плотности состояния любого спина j через измеряемую вероятность проекции спина на произвольное направление. Этот оператор плотности будет выражен через интеграл по телесному углу от измеряемого распределения, дополнительно зависящего от двух углов, задающих это направление, и стандартного оператора, зависящего от шаровых функций и, следовательно, от этих углов. Данное выражение хотя и аналогично преобразованию Радона схемы оптической томографии, но тем не менее существенно от него отличается. Таким образом, при томографических методах измерения квантового состояния, использующих обратимые интегральные преобразования матрицы плотности и измеримой функции распределения вероятностей (маргинального распределения) неявно принимается, что состояние квантовой системы можно задать не матрицей плотности, а функцией распределения вероятностей измеряемой величины. В явном виде такое определение квантового состояния обсуждается в [36, 37]. Тем не менее обсуждение схем томографии квантовых состояний было связано с измерением величин типа координаты, имеющей классический предел.

2. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И МАРГИНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В настоящем разделе мы введем семейство положительных нормированных распределений вероятностей проекции спина и покажем, что через него выражается матрица плотности произвольного состояния спина.

Рассмотрим для произвольного спина j состояние, описываемое эрмитовой матрицей плотности с матричными элементами $\rho^{(j)}_{mm'}$, отвечающими оператору плотности $\hat{\rho}(j)$ в базисе из собственных векторов $|jm\rangle$, операторов проекции спина и квадрата спина на ось z, т. е.

$$\hat{j}_3|jm\rangle = m|jm\rangle,$$
$$\hat{j}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle, \qquad (1)$$

где j — полуцелое или целое неотрицательное число, $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$. Мы имеем

$$\langle jm|\hat{\rho}^{(j)}|jm'\rangle = \rho^{(j)}_{mm'},$$
$$\hat{\rho}^{(j)} = \sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j}^{j} \rho^{(j)}_{mm'}|jm\rangle\langle jm'|. \tag{2}$$

Диагональные элементы матрицы плотности задают функцию распределения (в состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}^{(j)}$) проекций спина на ось z,

$$\rho^{(j)}_{mm} = \omega_0(m), \tag{3}$$

с условием нормировки

$$\sum_{m=-j}^{j} \omega_0(m) = 1. \tag{4}$$

В системе отсчета, повернутой по отношению к начальной так, что поворот задан углами Эйлера α, β, γ, функция распределения проекций спина m_1 на новую ось z' есть величина

$$\widetilde{\omega}(m_1,\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m_1'=-j}^{j}\sum_{m_2'=-j}^{j} D^{(j)}_{m_1 m_1'}(\alpha,\beta,\gamma)\rho^{(j)}_{m_1' m_2'} D^{(j)*}_{m_1 m_2'}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{5}$$

В этой формуле матричные элементы неприводимого представления группы вращений задаются $D^{(j)}$-функцией Вигнера [3]

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{im'\gamma} d^{(j)}_{m'm}(\beta) e^{im\alpha}, \tag{6}$$

где

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \left[\frac{(j+m')!(j-m)!}{(j+m)!(j-m)!}\right]^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{m'+m} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m} P^{(m'-m,m'+m)}_{j-m'}(\cos\beta) \tag{7}$$

и $P^{(a,b)}_n(x)$ — полином Якоби.

Функция Вигнера $D^{(j)}_{m',m}$ обладает свойством

$$D^{(j)*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{m'-m} D^{(j)}_{-m'-m}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{8}$$

Поскольку в формуле (5) мы имеем произведение матричного элемента представления группы вращений на комплексно-сопряженный матричный элемент, принадлежащий той же строке, то, как следует из формулы (6), зависимость от угла γ отсутствует. Поэтому функция распределения в формуле (5) зависит только от двух непрерывных параметров поворота, α и β, т. е. это функция точки на единичной сфере. Поэтому для этой функции распределения введем обозначение

$$\omega(m_1,\alpha,\beta) = \widetilde{\omega}(m_1,\alpha,\beta,\gamma) \tag{9}$$

и выпишем условие нормировки

$$\sum_{m_1=-j}^{j} \omega(m_1, \alpha, \beta) = 1. \tag{10}$$

Например, для $j = 1/2$ и состояния с проекцией спина на ось z, равной $m_1 = 1/2$, спиновая волновая функция есть спинор

$$\psi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и матрица плотности этого состояния имеет вид

$$\rho_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функция распределения, ассоциированная с этим состоянием, для $m_1 = 1/2$ есть

$$\omega\left(\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) = \cos^2 \frac{\beta}{2}.$$

Соответственно для состояния с проекцией спина $m_1 = -1/2$ эта функция принимает значение

$$\omega\left(-\frac{1}{2}, \alpha, \beta\right) = \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

Функция распределения (5) есть диагональный матричный элемент повернутой матрицы плотности спина (или матрицы плотности состояния спина, рассматриваемого с точки зрения повернутой системы координат). Нашей задачей является получение выражения для матрицы плотности состояния с матричным элементом $\rho^{(j)}_{mm'}$ через функцию распределения (9). Для этого умножим обе части формулы (5) на функцию $D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha, \beta, \gamma)$ (т. е. на шаровую функцию [3]) и проинтегрируем равенство по углам Эйлера, предварительно заменив $D^{(j)*}_{m_1 m_2'}(\alpha, \beta, \gamma)$ с помощью (8). Спин j_3 для функции $D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha, \beta, \gamma)$ является целым числом. При этом мы используем известный интеграл по группе вращений от произведения трех D-функций Вигнера [3].

$$\int D^{(j_1)}_{m_1' m_1}(\omega) D^{(j_2)}_{m_2' m_2}(\omega) D^{(j_3)}_{m_3' m_3}(\omega) \frac{d\omega}{8\pi^2} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В этой формуле ω обозначает совокупность трех углов Эйлера и

$$\int d\omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta \, d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma. \tag{12}$$

Величины в правой части равенства (11) есть $3j$-символы Вигнера, их явное выражение приведено в [3]. Таким образом, получаем

$$\int (-1)^{m_1} \omega(m_1, \alpha, \beta) D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{d\omega}{8\pi^2} = \\ = (-1)^{m_2'} \rho^{(j)}_{m_1' m_2'} \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1' & -m_2' & m_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Формула (13) есть линейная система уравнений для неизвестных матричных элементов $\rho^{(j)}_{m_1' m_2'}$. Чтобы решить эту систему, воспользуемся следующим свойством $3j$-символов Вигнера [3]:

$$(2j+1)\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \tag{14}$$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m=-j}^{j}(2j+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & -m \end{pmatrix} = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}. \tag{15}$$

Умножив равенство (13) сначала на $3j$-символ

$$\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и просуммировав, используя (14), по числам m_1, получим

$$(2j_3+1)\sum_{m_1=-j}^{j}\int(-1)^{m_1}\omega(m_1,\alpha,\beta)\,D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d\omega}{8\pi^2} =$$
$$= (-1)^{m_2'}\rho^{(j)}_{m_1'm_2'}\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1' & -m_2' & m_3 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Умножив теперь равенство (16) на число

$$(2j_3+1)\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1' & -m_2' & m_3 \end{pmatrix}$$

и просуммировав по проекции спина m_3 и целому спину j_3 с использованием формулы (15), получим

$$\sum_{j_3=0}^{2j}\sum_{m_3=-j_3}^{j_3}(2j_3+1)^2\sum_{m_1=-j}^{j}\int(-1)^{m_1}\omega(m_1,\alpha,\beta)\,D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha,\beta,\gamma)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1' & -m_2' & m_3 \end{pmatrix}\frac{d\omega}{8\pi^2} = (-1)^{m_2'}\rho^{(j)}_{m_1'm_2'}. \tag{17}$$

Полученное соотношение является решением поставленной задачи. Поскольку функция $D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha,\beta,\gamma)$ является шаровой функцией, зависящей только от двух углов Эйлера, α и β, формула (17) позволяет получить выражение для матрицы плотности спинового состояния через интеграл по сфере от произведения вероятности спину иметь проекцию m_1 на направление, являющееся нормалью к сфере в точке с угловыми координатами α и β, на шаровую функцию с последующим суммированием по проекциям спина и возможным значениям полного спина. В других обозначениях формула (17) получена в [34]. Таким образом, мы показали, что задавать смешанное состояние спина может не только матрица плотности, но и маргинальное распределение. Следовательно, мы говорим, что квантовое состояние спина задано, если задана вероятность проекции спина на выделенное направление, $\omega(m_1,\alpha,\beta)$, измеренная во всех произвольно повернутых системах координат.

3. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА СПИНОВОЙ ТОМОГРАФИИ

Формуле (17) можно придать инвариантный операторный вид, используя (2). Введем последовательно обозначения, сначала для функции на единичной сфере:

$$\Phi^{(j_3)}_{jm_1'm_2'}(\alpha,\beta) = (-1)^{m_2'} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha,\beta,\gamma) \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1' & -m_2' & m_3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

а затем для оператора на единичной сфере:

$$\hat{A}^{(j_3)}_j(\alpha,\beta) = (2j_3+1)^2 \sum_{m_1'=-j}^{j} \sum_{m_2'=-j}^{j} |jm_1'\rangle \Phi^{(j_3)}_{jm_1'm_2'}(\alpha,\beta) \langle jm_2'|. \tag{19}$$

Чтобы выписать окончательное выражение для оператора плотности, введем оператор на единичной сфере, который содержит зависимость от измеряемой проекции спина:

$$\hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta) = (-1)^{m_1} \sum_{j_3=0}^{2j} \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \hat{A}^{(j_3)}_j(\alpha,\beta). \tag{20}$$

Окончательно получаем выражение для оператора плотности

$$\hat{\rho}^{(j)} = \sum_{m_1=-j}^{j} \int \frac{dw}{8\pi^2}\, w(m_1,\alpha,\beta)\, \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta). \tag{21}$$

Полученная формула допускает следующую интерпретацию. Для определения спинового состояния для спина j экспериментально измеряется проекция спина m_1 на направления, задаваемые углами α и β, и для каждого направления измерение дает функцию распределения $w(m_1,\alpha,\beta)$ для дискретного набора проекций спина $m_1 = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$. Если эта функция распределения известна как функция параметров, задающих точку на сфере, то сначала с ее помощью находится усредненный оператор $\langle \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\rangle$ в каждой точке единичной сферы. (Оператор $\hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)$ является базисным оператором, не зависящим от измерения, но через который можно выразить оператор плотности.) Затем проводится интегрирование усредненного оператора по телесному углу. Таким образом, имеем

$$\hat{\rho}^{(j)} = \int \frac{dw}{8\pi^2} \langle \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\rangle, \tag{22}$$

где

$$\langle \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\rangle = \sum_{m_1=-j}^{j} w(m_1,\alpha,\beta) \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta). \tag{23}$$

Формула (22) завершает реконструкцию оператора плотности спинового состояния. Используя усредненный по проекции спина оператор $\langle \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\rangle$, заданный в каждой точке единичной сферы, т. е. являющийся функцией углов α и β, можно записать найденный оператор плотности спинового состояния в следующем виде:

$$\hat{\rho}^{(j)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\beta\, d\beta \langle \hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\rangle. \tag{24}$$

Полученные выражения позволяют вычислять средние значения физических величин, используя в качестве функции, описывающей квантовое состояние спина, положительную нормированную функцию распределения $\omega(m_1,\alpha,\beta)$. Так, для любой наблюдаемой $\hat{K}$ среднее значение в заданном состоянии спина $\hat{\rho}^{(j)}$ может быть найдено следующим образом. Сопоставим оператору $\hat{K}$ функцию, которая не зависит от квантового состояния:

$$\phi^{(j)}_K(m_1,\alpha,\beta) = \mathrm{Tr}\left[\hat{K}\hat{B}^{(j)}_{m_1}(\alpha,\beta)\right]. \tag{25}$$

Тогда среднее значение наблюдаемой $\hat{K}$ в состоянии с распределением $\omega(m_1,\alpha,\beta)$ вычисляется по правилу

$$\langle\hat{K}\rangle = \sum_{m_1=-j}^{j}\int\frac{dw}{8\pi^2}\,\omega(m_1,\alpha,\beta)\phi^{(j)}_K(m_1,\alpha,\beta). \tag{26}$$

Таким образом, каждому оператору $\hat{K}$ сопоставляется его символ (25), аналогичный символу Вейля и являющийся функцией дискретной переменной m_1 и двух непрерывных параметров, α и β. Далее, при задании состояния среднее значение вычисляется как усреднение по известной функции распределения с последующим интегрированием по параметрам поворота системы отсчета.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что, как и для непрерывных переменных типа координаты, квантовое состояние спиновой степени свободы может задаваться положительной функцией распределения вероятностей, несущей ту же информацию о спиновом состоянии, что и матрица плотности (оператор плотности).

Основным результатом работы являются выражения для оператора плотности состояния произвольного спина j, даваемые формулами (21), (24). Эти выражения служат основой схемы задания и возможного способа измерения спиновых состояний с помощью положительной нормированной функции распределения, дополнительно зависящей как от параметров от двух углов, задающих направление, на которое проецируется измеряемый спин. Результат измерения состояния выражается как интеграл по углам от выражения, включающего измеряемую функцию распределения, в полной аналогии со схемой оптической томографии. Таким образом, в работе томографические методы измерения квантового состояния, описываемого оператором плотности, обсуждавшиеся для непрерывных переменных, распространены на чисто квантовую дискретную переменную — спин.

Работа финансировалась из гранта №96-02-17222 Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. L. D. Landau, Z. Physik **45**, 430 (1927).
2. E. Schrödinger, Ann. Phys. (Leipzig) **79**, 489 (1926).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
4. J. von Neumann, *Mathematische Grunlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).
5. L. De Broglie, Compt. Rend. **183**, 447 (1926); **184**, 273 (1927); **185**, 380 (1927).
6. E. Madelung, Z. Phys. **40**, 332 (1926).
7. D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166; 180 (1952).
8. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
9. R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
10. E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
11. K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **23**, 264 (1940).
12. Y. Kano, J. Math. Phys. **6**, 1913 (1965).
13. J. Bertrand and P. Bertrand, Found. Phys. **17**, 397 (1987).
14. K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
15. D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
16. I. J. Dunn, I. A. Walmsley, and C. Mukamel, Phys. Rev. Lett. **74**, 884 (1995).
17. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Quantum Semiclass. Opt. **7**, 615 (1995).
18. G. M. D'Ariano, S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 1017 (1996).
19. G. M. D'Ariano, U. Leonhardt, and H. Paul, Phys. Rev. A **52**, R1801 (1995).
20. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Phys. Lett. A **213**, 1 (1996); E-prints archive, quant-ph/9609026; submitted to Found. Phys.
21. S. Wallentowitz and W. Vogel, Phys. Rev. A **53**, 4528 (1996).
22. K. Banaszek and K. Wodkiewicz, Phys. Rev. Lett. **76**, 4344 (1996).
23. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Europhys. Lett. **37**, 79 (1997).
24. V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, Physica **72**, 597 (1974).
25. R. L. de Matos Filho and W. Vogel, Phys. Rev. A **54**, 4560 (1996).
26. P. J. Bardroff, C. Leichte, G. Schrade, and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **77**, 2198 (1996).
27. R. L. de Matos Filho and W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **76**, 608 (1996).
28. O. V. Man'ko, Preprint IC/96/39, ICTP, Trieste (1996); J. Russ. Laser Research (Plenum Press) **17**, 439 (1996).
29. M. M. Nieto, Phys. Lett. A **219**, 180 (1996).
30. O. V. Man'ko, Phys. Lett. A **228**, 29 (1997).
31. D. M. Meekhof, G. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. Wineland, Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
32. S. Haroche, Nuovo Cim. B **110**, 545 (1995).
33. U. Leonhardt, Phys. Rev. A **53**, 2998 (1996).
34. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, submitted to Phys. Lett. A.
35. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, submitted to J. Mod. Opt.
36. V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Research (Plenum Press) **17**, 579 (1996).
37. V. I. Man'ko, in *Symmetries in Science* IX, ed. by B. Gruber, M. Ramek, Plenum Press, New York (1997), p. 215.