

**КОГЕРЕНТНОЕ ПЛЕНЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТЕЙ В АНСАМБЛЕ  
ТРЕХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ ПРИ НАЛИЧИИ КООПЕРАТИВНОЙ РЕЛАКСАЦИИ**

*Б. Г. Матисов<sup>а</sup>, И. А. Григоренко<sup>а</sup>, И. Е. Мазец<sup>б</sup>*

*<sup>а</sup> Санкт-Петербургский государственный технический университет  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

*<sup>б</sup> Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук  
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 11 апреля 1997 г.

Выведены уравнения, описывающие динамику трехуровневых атомов с каскадной схемой уровней, взаимодействующих с двумя когерентными резонансными полями при условии преобладания кооперативной релаксации над некогерентным спонтанным излучением. Проведен численный расчет временной динамики значений атомных населенностей. Установлена возможность когерентного пленения населенностей при наличии эффекта кооперативного распада. Рассчитана усредненная населенность промежуточного уровня как функция расстройки при различных значениях константы связи.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования взаимодействия когерентного электромагнитного излучения с многоуровневыми квантовыми системами являются сегодня одной из интенсивно развивающихся областей нелинейной лазерной спектроскопии и квантовой оптики. В многоуровневых системах принципиальную роль играет наличие нескольких каналов возбуждения и наведения лазерными полями когерентностей между долгоживущими квантовыми состояниями. Это приводит к появлению различных квантовых интерференционных эффектов во внутренней динамике атомов. Возникающая вследствие когерентного возбуждения интерференция оптических каналов, приводящая, в свою очередь, к когерентному пленению населенностей, представляет собой основу многих направлений развития в современной физике: сверхглубокое лазерное охлаждение атомов, создание лазеров без инверсии и др. (подробнее см. обзоры [1, 2]).

Известно [1, 3], что сильное влияние на характер эволюции населенностей атомных систем при когерентном пленении населенностей оказывает наличие различных релаксационных процессов, например столкновительных. Однако в предыдущих работах, связанных с явлением когерентного пленения населенностей в атомных системах, не рассматривался случай  $n\lambda^3 \geq 1$ , где  $n$  — концентрация атомов,  $\lambda$  — длина волны оптического перехода. В этих условиях определяющее влияние на эволюцию системы оказывает наличие кооперативных эффектов [4, 5]. Основой этих эффектов является самосогласованность поведения отдельных атомов. Это приводит к тому, что динамика квантовой системы в основном будет определяться кооперативной релаксацией.

В данной работе исследуется явление когерентного пленения населенностей в ансамбле трехуровневых атомов с каскадной схемой уровней, взаимодействующих с когерентным бихроматическим электромагнитным полем при наличии кооперативной релаксации.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Выпишем основные приближения, используемые в нашей теории. Мы предполагаем, что одномерный и однородный ансамбль атомов взаимодействует с двумя резонансными когерентными электромагнитными полями. Обозначим через  $N$  общее число атомов, а атомные состояния суть  $|1\rangle_l, |2\rangle_l, |3\rangle_l$ , где  $l = 1, \dots, N$  — номер конкретного атома.

Условие ортонормировки для волновой функции  $|i\rangle_l$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеет вид

$${}_l\langle i|i'\rangle_l = \delta_{ii'}. \quad (1)$$

Условимся, что  $|1\rangle_l$  — нижнее,  $|3\rangle_l$  — среднее,  $|2\rangle_l$  — верхнее состояния каскадной схемы. Для описания поведения системы нам понадобится коллективный атомный оператор, который определим как

$$\hat{R}_{ij} = \sum_{l=1}^N |j\rangle_l \langle i|. \quad (2)$$

Правила коммутации  $\hat{R}_{ij}$  непосредственно вытекают из определения (2):

$$[\hat{R}_{\mu\nu}, \hat{R}_{\nu'\mu'}] = \delta_{\nu\nu'} \hat{R}_{\mu\mu'} - \delta_{\mu\mu'} \hat{R}_{\nu'\nu}, \quad (3)$$

где  $\mu, \nu, \nu', \mu' = 1, 2, 3$ .

Электромагнитное поле описывается бозонными операторами рождения и уничтожения фотонов  $\hat{a}_j^+, \hat{a}_j$ . Тогда гамильтониан взаимодействия атомов с полем в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\hat{H} = \hbar \left( -\Omega_1 \hat{R}_{11} + \Omega_2 \hat{R}_{22} \right) + g_1 \hat{a}_1 \hat{R}_{31} + g_2^* \hat{a}_2^+ \hat{R}_{32} + g_1^* \hat{a}_1^+ \hat{R}_{13} + g_2 \hat{a}_2 \hat{R}_{23}. \quad (4)$$

Здесь  $\Omega_j$  — расстройка  $j$ -го поля ( $j = 1, 2$ ) от частоты  $\omega_j$  соответствующего атомного перехода,

$$g_j = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_j}{V}} d_j$$

— постоянная связи атомной системы с полем [4], где  $\omega_1, d_1$  — частота и дипольный момент перехода  $|3\rangle - |1\rangle$ , а  $\omega_2$  и  $d_2$  — частота и дипольный момент перехода  $|2\rangle - |3\rangle$ ,  $V$  — объем квантования.

Далее при описании релаксационных процессов для упрощения мы пренебрежем некогерентным распадом с верхних уровней, являющимся следствием взаимодействия с континуумом вакуумных (нулевых) мод. Основанием для данного упрощения является то, что релаксационный процесс, управляемый кооперативным эффектом, значительно быстрее, чем некогерентный процесс. Вместо медленной атомной релаксации мы вводим быструю релаксацию электромагнитного поля в стационарное состояние, определяемое лазерным излучением. Действительно, пара лазерных лучей, направленных на кювету с газом, создают чистое когерентное состояние  $|\alpha_1\alpha_2\rangle_f$ , т. е.

$$\hat{a}_j |\alpha_1\alpha_2\rangle_f = \alpha_j |\alpha_1\alpha_2\rangle_f, \quad (5)$$

где  $\alpha_j$  — комплексные числа. Это состояние сохраняется в течение времени пролета фотона через среду с линейным размером  $L$ . Время  $\tau = L/c$  может быть принято за кратчайший интервал времени в данной системе (например, при  $L = 0.3$  м,  $\tau = 1$  нс, т. е. много меньше чем  $10^{-7}$  с — времени спонтанной релаксации). Таким образом, полевая матрица плотности приходит в свое стационарное состояние  $|\alpha_1\alpha_2\rangle_{ff}\langle\alpha_1\alpha_2|$  с характерным временем релаксации  $\tau$ .

Для матрицы плотности  $\hat{\sigma}(t)$ , полностью характеризующей систему «атомы–поле», можно написать следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\sigma}] - \frac{1}{\tau} (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}'), \quad (6)$$

где  $\hat{\sigma}'$  — равновесная матрица плотности,

$$\hat{\sigma}' = \hat{\rho} \otimes |\alpha_1\alpha_2\rangle_{ff}\langle\alpha_1\alpha_2|, \quad (7)$$

а приведенная матрица плотности  $\hat{\rho}$  описывает только атомные степени свободы:

$$\hat{\rho} = \text{Sp} \{ \hat{\sigma} \}_f,$$

(шпур берется по полевым переменным). Уравнение (6) имеет формальное решение в виде ряда [4]:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}' + \tau \hat{K}_1 \hat{\sigma}' + \tau^2 \hat{K}_2 \hat{\sigma}' + \dots, \quad (8)$$

в котором достаточно ограничиться первыми двумя членами. Подставляя (8) в (6), получим явный вид оператора  $\hat{K}_1$ :

$$\hat{K}_1 (\hat{X}) = -\frac{\partial}{\partial t} \hat{X} - \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{X}].$$

Таким образом, с точностью до  $\tau^2$  для  $\hat{\sigma}$  имеем

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}' - \tau \frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}' - \frac{i\tau}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\sigma}']. \quad (9)$$

Условие применимости теории возмущений есть  $\tau \ll \sqrt{N} g_j / \hbar$ , т. е. процесс ухода фотонов протекает быстрее, чем успевают навестись межатомные корреляции. Это означает, что изменение поля на временах много больше  $\tau$  можно исключить адиабатически.

Беря шпур от обеих частей уравнения (6) и подставляя в него выражение (9), получаем уравнение для атомной матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} - \frac{i\tau}{\hbar} \left[ \hat{H}_{at}, \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} \right] = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{at}, \hat{\rho}] - \frac{\tau}{\hbar^2} \text{Sp} \left\{ \left[ \hat{H}, [\hat{H}, \hat{\rho}] \right] \right\}_f, \quad (10)$$

где гамильтониан  $\hat{H}_{at}$ , учитывающий только атомные переменные, имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_{at} = & \left\langle \alpha_1\alpha_2 \left| \hat{H} \right| \alpha_1\alpha_2 \right\rangle_f = \hbar \left( -\Omega_1 \hat{R}_{11} + \Omega_2 \hat{R}_{22} \right) + \\ & + g_1 \alpha_1 \hat{R}_{31} + g_2^* \alpha_2^* \hat{R}_{32} + g_1^* \alpha_1^* \hat{R}_{13} + g_2 \alpha_2 \hat{R}_{23}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее введем оператор

$$\hat{Q}(\hat{X}) = \hat{X} + \frac{i\tau}{\hbar} [\hat{H}_{at}, \hat{X}],$$

и применим его к обеим частям (10). В результате, пренебрегая членами пропорциональными  $\tau^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{at}, \hat{\rho}] - \frac{\tau}{\hbar^2} \left( (\langle \hat{H}^2 \rangle - \hat{H}_{at}^2) \hat{\rho} + \hat{\rho} (\langle \hat{H}^2 \rangle - \hat{H}_{at}^2) \right) + \\ & + \frac{\tau}{\hbar^2} \left( 2\hat{H}_{at} \hat{\rho} \hat{H}_{at} - 2 \text{Sp} \left\{ \hat{H} (\hat{\rho} \otimes |\alpha_1 \alpha_2\rangle_{ff} \langle \alpha_1 \alpha_2|) \hat{H} \right\} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\langle \hat{H}^2 \rangle = {}_f \langle \alpha_1 \alpha_2 | \hat{H}^2 | \alpha_1 \alpha_2 \rangle_f$ . Тогда, подставляя выражения (4) и (11) в (12), получим уравнение для матрицы плотности, описывающей ансамбль атомов с каскадной схемой уровней:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{at}, \hat{\rho}] + \frac{\tau |g_1|^2}{\hbar^2} \left( [\hat{R}_{13}, \hat{\rho} \hat{R}_{31}] + [\hat{R}_{13} \hat{\rho}, \hat{R}_{31}] \right) + \\ & + \frac{\tau |g_2|^2}{\hbar^2} \left( [\hat{R}_{32}, \hat{\rho} \hat{R}_{23}] + [\hat{R}_{32} \hat{\rho}, \hat{R}_{23}] \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Это уравнение является обобщением известной модели Бонифачио [6].

### 3. АТОМНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ УСРЕДНЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Исчерпывающая информация о динамике атомной системы содержится в усредненном значении коллективного атомного оператора [4]:

$$r_{ij} \equiv \frac{1}{N} \langle \hat{R}_{ij} \rangle = \frac{1}{N} \text{Sp} \left\{ \hat{R}_{ij} \hat{\rho} \right\}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Перейдем к  $r_{ij}$ , используя уравнение (13):

$$\begin{aligned} N \frac{\partial}{\partial t} r_{ij} = & -\frac{i}{\hbar} \text{Sp} \left\{ [\hat{H}_{at}, \hat{\rho}] \hat{R}_{ij} \right\} + \frac{\tau}{\hbar^2} \left( |g_1|^2 \text{Sp} \left\{ \left( [\hat{R}_{13}, \hat{\rho} \hat{R}_{31}] + [\hat{R}_{13} \hat{\rho}, \hat{R}_{31}] \right) \hat{R}_{ij} \right\} \right) + \\ & + \frac{\tau}{\hbar^2} \left( |g_2|^2 \text{Sp} \left\{ \left( [\hat{R}_{32}, \hat{\rho} \hat{R}_{23}] + [\hat{R}_{32} \hat{\rho}, \hat{R}_{23}] \right) \hat{R}_{ij} \right\} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя циклическую перестановку под операцией взятия шпура, получим

$$\begin{aligned} N \frac{\partial}{\partial t} r_{ij} = & -\frac{i}{\hbar} \text{Sp} \left\{ \hat{\rho} [\hat{H}_{at}, \hat{R}_{ij}] \right\} + \frac{\tau}{\hbar^2} \left( |g_1|^2 \text{Sp} \left\{ \hat{\rho} \hat{R}_{31} [\hat{R}_{ij'}, \hat{R}_{13}] + \hat{R}_{13} [\hat{R}_{31}, \hat{R}_{ij}] \hat{\rho} \right\} \right) + \\ & + \frac{\tau}{\hbar^2} \left( |g_2|^2 \text{Sp} \left\{ \hat{\rho} \hat{R}_{23} [\hat{R}_{ij'}, \hat{R}_{32}] + \hat{R}_{32} [\hat{R}_{23}, \hat{R}_{ij}] \hat{\rho} \right\} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись правилом коммутации (3), уменьшающим в правой части порядок по  $\hat{R}_{ij}$ , и используя квазиклассическую аппроксимацию [5]

$$\langle \hat{R}_{ij} \hat{R}_{i'j'} \rangle \approx \langle \hat{R}_{ij} \rangle \langle \hat{R}_{i'j'} \rangle, \quad (16)$$

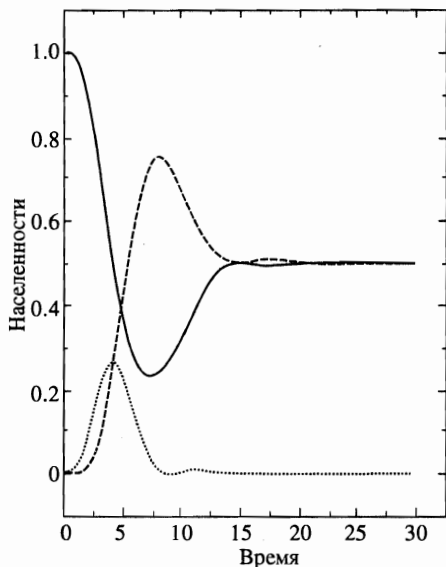


Рис. 1

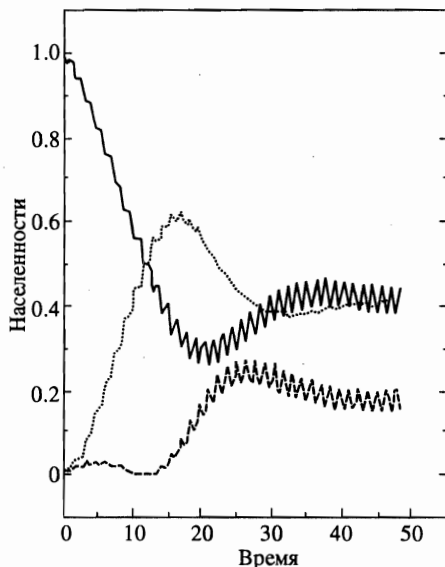


Рис. 2

Рис. 1. Временная эволюция населенностей в каскадной системе при  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-1}$ ,  $\Omega = 0$ ,  $V = 0.3\Gamma_1 N$ . По оси абсцисс отложено безразмерное время  $t/\Gamma_1 N$ . Сплошная кривая соответствует нижнему уровню, штриховая — верхнему, а пунктирная кривая соответствует промежуточному уровню каскадной схемы

Рис. 2. То же, что на рис. 1, при  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-1}$ ,  $\Omega = 2\Gamma_1 N$ ,  $V = 3\Gamma_1 N$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{r}_{11} &= iV_1 r_{31} - iV_1^* r_{13} + 2\Gamma_1 N |r_{31}|^2, \\
 \dot{r}_{22} &= iV_2^* r_{32} - iV_2 r_{23} - 2\Gamma_2 N |r_{32}|^2, \\
 r_{11} + r_{22} + r_{33} &= 1, \\
 \dot{r}_{31} &= i\Omega_1 r_{31} - iV_1^* (r_{33} - r_{11}) + iV_2 r_{21} + \Gamma_1 N r_{31} (r_{33} - r_{11}) + \Gamma_2 N r_{32} r_{21}, \\
 \dot{r}_{32} &= -i\Omega_2 r_{32} + iV_1^* r_{12} - iV_2 (r_{33} - r_{22}) - \Gamma_1 N r_{31} r_{12} + \Gamma_2 N r_{32} (r_{22} - r_{33}), \\
 \dot{r}_{21} &= i(\Omega_1 + \Omega_2) r_{21} + iV_2^* r_{31} - iV_1^* r_{23} + (\Gamma_1 - \Gamma_2) N r_{23} r_{31}, \\
 r_{ij} &= r_{ji}^*,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где введено обозначение

$$\Gamma_j = \frac{\tau}{\hbar^2} |g_j|^2, \quad V_j = \frac{g_j \alpha_j}{\hbar}. \tag{18}$$

Система (17) описывает динамику атомных населенностей  $r_{ii}$ . Характерной особенностью ее является нелинейность слагаемых, пропорциональных  $\Gamma_j N$  и отвечающих за кооперативную релаксацию.

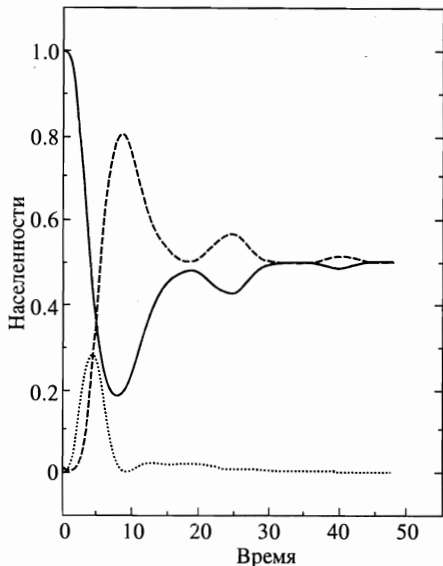


Рис. 3

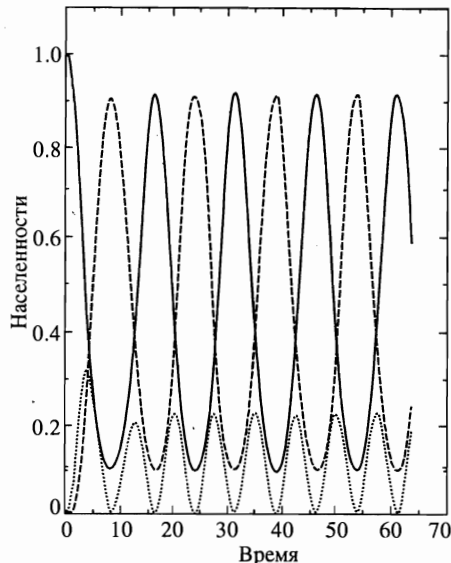


Рис. 4

Рис. 3. То же, что на рис. 1, при  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 0.8$ ,  $\Omega = 0$ ,  $V = 0.3\Gamma_1 N$

Рис. 4. То же, что на рис. 1, при  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 2$ ,  $\Omega = 0$ ,  $V = 0.3\Gamma_1 N$

Для системы (17) в качестве начального условия положим равенство

$$r_{ij}|_{t=0} = \delta_{i1}\delta_{j1}, \tag{19}$$

которое означает, что все атомы при  $t = 0$  находятся на нижнем энергетическом уровне  $|1\rangle$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Мы приводим результаты численного интегрирования системы уравнений (17) с начальными условиями (19). Для упрощения мы положили  $V_1 = V_2 \equiv V$  и  $\Omega_1 = -\Omega_2 \equiv \Omega$ . Расчеты проведены для различных значений  $\Omega$ ,  $V$  и отношения  $\Gamma_2/\Gamma_1$ .

На рис. 1 изображена временная эволюция атомных населенностей в ансамбле атомов с каскадной схемой уровней. Видно, что населенности крайних уровней выравниваются, в то время как населенность среднего уровня стремится к нулю. Это соответствует установлению в системе когерентного пленения населенностей. Отметим также, что стационарное решение  $r_{11} = 0.5$ ,  $r_{22} = 0.5$ ,  $r_{12} = -0.5$ , при равенстве нулю остальных элементов  $r_{ij}$ , является точным решением системы (17).

В случае, которому соответствует рис. 2, при больших значениях расстройки ( $\Omega/\Gamma_1 N \gg 1$ ) и константы связи ( $V/\Gamma_1 N \gg 1$ ) когерентного пленения населенностей не происходит. Установившийся режим представляет собой осцилляции населенностей

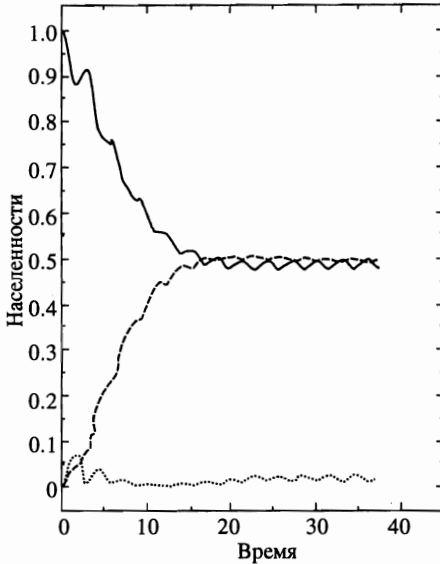


Рис. 5

Рис. 5. То же, что на рис. 1, при  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-1}$ ,  $\Omega = 0.3\Gamma_1 N$ ,  $V = 1.5\Gamma_1 N$

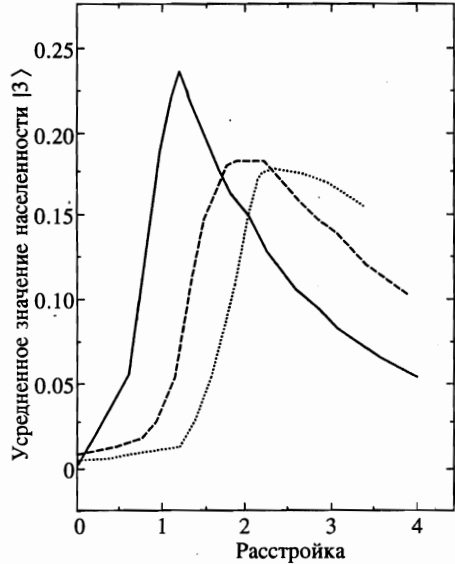


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость усредненного значения населенности промежуточного уровня  $|3\rangle$  от безразмерной расстройки  $\Omega/\Gamma_1 N$  при различных значениях параметра  $V$ :  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 10^{-1}$ , сплошная кривая соответствует  $V = 0.5\Gamma_1 N$ , штриховая —  $V = 1\Gamma_1 N$ , пунктирная —  $V = 2\Gamma_1 N$

крайних уровней и выход на постоянное и отличное от нуля значение населенности среднего уровня.

На рис. 3, 4 показано влияние величины параметра  $\Gamma_2/\Gamma_1$  на процесс установления когерентного пленения населенностей. При  $\Gamma_2/\Gamma_1 > 1$  (рис. 4) когерентное пленение становится невозможным, так как состояние  $|2\rangle$  распадается со скоростью  $\Gamma_2 N$ , а состояние  $|1\rangle$  заселяется со скоростью  $\Gamma_1 N$ , таким образом, скорость заселения плененного состояния меньше скорости его распада. На рис. 5 показано подавление осцилляций при относительно большой величине константы связи ( $V > \Gamma_1 N$ ).

На рис. 6 изображена зависимость усредненного значения населенности промежуточного уровня  $|3\rangle$  от относительной расстройки  $\Omega/\Gamma_1 N$  при различных значениях  $V$ , характеризующей интенсивность лазерного поля. Видно, что ширина черной линии (провала в спектре флуоресценции, см. [1]) увеличивается с ростом константы связи.

При анализе численных решений системы уравнений (17) можно сделать вывод, что в каскадной схеме уровней при условии кооперативной релаксации для установления режима когерентного пленения населенностей необходимо выполнение следующих условий:

$$\Gamma_2/\Gamma_1 \ll 1, \quad V \gg \Gamma_2 N.$$

Из этих двух условий первое совпадает, а второе существенно отличается от условия установления когерентного пленения населенностей для аналогичной схемы уровней при когерентной релаксации [1]. Кроме того, в случае кооперативной динамики осцил-

ляции населенностей существенны на начальном этапе эволюции, если выполняется условие  $V \ll \Gamma_2 N$ . Если же  $V \gg \Gamma_2 N$ , то осцилляции подавлены. А при преобладании некогерентной релаксации, наоборот, осцилляции подавлены при частотах Раби, больших скорости релаксации с верхнего уровня, и развиты в противном случае [7].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено теоретическое исследование процесса установления когерентного пленения населенностей в атомном ансамбле, взаимодействующем с двумя резонансными когерентными электромагнитными полями при условии кооперативной релаксации. Поведение этой квантовой системы нелинейно вследствие наличия нелинейного релаксационного процесса. Полученные результаты позволяют применять явление когерентного пленения населенностей, например, в целях когерентного просветления [8], в оптических средах со средним расстоянием между атомами порядка длины волны атомного перехода,  $n\lambda^3 \sim 1$ . Установлено, что кооперативная релаксация вносит существенные изменения в динамику ансамбля атома. Выявлены особенности этой динамики по сравнению со случаем преобладания некогерентной спонтанной релаксации, найдены условия осуществления когерентного пленения населенностей в рассматриваемой выше системе.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета Российской Федерации по высшему образованию (грант № 5-5.5-139).

## Литература

1. Б. Г. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов и др., УФН **163**, 1 (1993).
2. E. Arimondo, *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam (1995), Vol. 35, p. 257.
3. E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **54**, 2216 (1996).
4. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные эффекты в оптике*, Наука, Москва (1988).
5. М. М. Альперин, Я. Д. Клубис, А. И. Хижняк, *Введение в физику двухуровневых систем*, Наукова думка, Киев (1987).
6. R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Naake, *Phys. Rev. A* **4**, 302 (1971).
7. Е. А. Корсунский, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, ЖЭТФ **101**, 26 (1992).
8. М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, ЖЭТФ **95**, 1263 (1989); K. J. Boller, A. Imamoglu, and S. E. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2593 (1991).