РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА *ТОМ 112, ВЫПУСК 4(10)*
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД *ОКТЯБРЬ, 1997*
МОСКВА «НАУКА»

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ

*А. В. Захаров**

Казанский государственный университет
420008, Казань, Россия

Поступила в редакцию 7 февраля 1997 г.

Работа является непосредственным продолжением работы [1], посвященной выводу макроскопических уравнений Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию. После усреднения по ансамблю системы микроскопических уравнений Эйнштейна и уравнения Лиувилля для случайных функций получена замкнутая система макроскопических уравнений Эйнштейна и кинетических уравнений для одночастичных функций распределения. Макроскопические уравнения Эйнштейна отличаются от классических наличием в левой части дополнительных слагаемых. Эти слагаемые обусловлены взаимодействием частиц. Они представляют собой бесследовые тензоры с равной нулю дивергенцией. Дано явное ковариантное выражение для этих слагаемых через интегралы по импульсному пространству от выражений, зависящих от одночастичных функций распределения взаимодействующих частиц среды. Данные выражения пропорциональны кубу постоянной Эйнштейна и квадрату плотности частиц. Последний факт означает, что эффекты взаимодействия могут проявиться в системах с достаточно большой плотностью (Вселенная на ранних стадиях эволюции, плотные объекты, близкие к состоянию гравитационного коллапса и др.).

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является непосредственным продолжением работы [1], посвященной выводу макроскопических уравнений Эйнштейна с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию.

---

*E-mail: Alexei.Zakharov@ksu.ru

Макроскопические уравнения Эйнштейна приведены к виду

$$G_{ij} + \varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij} = \chi T_{ij},$$

где G_{ij} — тензор Эйнштейна, T_{ij} — тензор энергии-импульса, χ — гравитационная постоянная Эйнштейна. Точка с запятой обозначает ковариантную производную. Новые члены в левой части полученных уравнений обусловлены взаимодействием частиц. Они представляют собой бесследовые тензоры с равной нулю дивергенцией. Дано явное ковариантное выражение для этих членов через интегралы по импульсному пространству от выражений, зависящих от одночастичных функций распределения взаимодействующих частиц среды. Данные выражения пропорциональны кубу постоянной Эйнштейна и квадрату плотности частиц. Последний факт означает, что эффекты взаимодействия могут проявиться лишь в системах с достаточно большой плотностью (Вселенная на ранних стадиях эволюции, плотные объекты, близкие к состоянию гравитационного коллапса и др.), либо в макросистемах, состоящих из объектов большой массы (скопления галактик).

2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Метод получения макроскопических уравнений Эйнштейна изложен в [1]. Обозначения в данной статье также совпадают с обозначениями [1].

Коротко, метод получения макроскопических уравнений Эйнштейна заключается в следующем.

Выпишем систему микроскопических уравнений Эйнштейна

$$\tilde{G}^{ij} = \chi \tilde{T}^{ij}. \tag{1}$$

Здесь $\tilde{G}^{ij}$ — тензор Эйнштейна риманова пространства с метрикой $\tilde{g}_{ij}$, $\chi = 8\pi k/c^4$ — постоянная Эйнштейна (k — гравитационная постоянная), $\tilde{T}^{ij}$ — микроскопический тензор энергии-импульса:

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_a c \int \frac{d^4\tilde{p}_a}{\sqrt{-\tilde{g}}}\, \tilde{p}^i_a \tilde{u}^j_a N_a\left(q^i, \tilde{p}_i\right), \tag{2}$$

где $\tilde{g}$ — определитель метрики $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{p}^i_a$ — импульс частиц сорта «a», $\tilde{u}^i_a = \tilde{p}^i_a/\sqrt{\tilde{g}_{kj}\tilde{p}^k_a\tilde{p}^j_a}$, $N_a(q^i, \tilde{p}^i_a)$ — случайная функция Климонтовича [2]:

$$\tilde{N}_a\left(q^i, \tilde{p}_j\right) = \sum_{i=1}^{n_a} \int d\tilde{s}\, \delta^4\left(q^i - q^i_{(l)}\right) \delta^4\left(\tilde{p}_j - \tilde{p}^{(l)}_j(\tilde{s})\right) \tag{3}$$

(n_a — число частиц сорта «a», $\tilde{s}$ — канонический параметр вдоль траектории частиц: $d\tilde{s} = \sqrt{\tilde{g}_{ij}dq^i dq^j}$, $q^i_{(l)}$, $\tilde{p}^{(l)}_j$ — координаты и импульс l-ой частицы сорта «a», которые определяются из уравнений движения (уравнений геодезических)). Функция $\tilde{N}_a$ удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik}\tilde{p}^j\tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \tag{4}$$

Далее метрика $\tilde{g}_{ij}$ представляется в виде

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \tag{5}$$

где $g_{ij} = \langle \tilde{g}_{ij} \rangle$ — усредненная по ансамблю метрика [1, 2]. В системе (1), (2), (4) переходим от величин, измеренных в метрике $\tilde{g}_{ij}$, к величинам, измеренным в метрике g_{ij}. В результате система (1), (2), (4) приобретает вид

$$\begin{aligned} & R_{ij} + \nabla_m \Omega^m_{ij} - \nabla_j \Omega^m_{im} + \Omega^m_{mn}\Omega^n_{ij} - \Omega^m_{jn}\Omega^n_{im} = \\ & = \chi \sum_a \int \frac{d^4p}{\sqrt{(-g)}} \alpha \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \left[\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jm} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{km} \right] p^k p^m N_a, \end{aligned} \tag{6}$$

$$p^i \frac{\partial N_a}{\partial q^i} + \Gamma_{j,ik} p^k p^j \frac{\partial N_a}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\Omega^m_{jk} \Delta_{mi} p^j p^k N_a \right). \tag{7}$$

Здесь p^i — импульс, измеряемый в метрике g_{ij}, N_a — случайная функция в пространстве с метрикой g_{ij} (выражение для нее получается из (3) опусканием во всех величинах знака «$\sim$»), $\Omega^m_{kj} = \tilde{\Gamma}^m_{kj} - \Gamma^m_{kj}$ — разность символов Кристоффеля второго рода для метрик $\tilde{g}_{ij}$ и g_{ij}, $\Delta_{ij} = g_{ij} - u_i u_j$, $u_i = p_i / \sqrt{p_l p^l}$.

Следующим этапом было разложение уравнений (6) с точностью до членов второго порядка по величинам h_{ij} и усреднение полученных уравнений по ансамблю. В случае, когда мы ограничиваемся усредненными уравнениями с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию, можно получить замкнутую систему уравнений для одночастичной функции распределения $f_a(q,p) = \langle N_a \rangle / n_a$ и для усредненной метрики g_{ij}.

Уравнение для f_a получено ранее в [1, 3] и имеет вид

$$u^i \frac{\partial f_a}{\partial q^i} + \Gamma_{j,ik} \frac{\partial f_a}{\partial p_i} = \sum_b \int \frac{d^4p}{\sqrt{(-g)}} E_{ij}(p,p') \left(\frac{\partial f_a}{\partial p_j} f'_b - \frac{\partial f'_b}{\partial p'_j} f_a \right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E_{ij}(p,p') = & \frac{2\pi k^2 L n_b}{c^6 \left[(u,u')^2 - 1 \right]^{3/2}} \left[2(u,u')(p,p') - (u,p)(u',p') \right]^2 \times \\ & \times \left\{ -g_{ij} \left[(u,u')^2 - 1 \right] - u_i u_j - u'_i u'_j + (u,u')(u_i u'_j + u'_i u_j) \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $(u,u') = u'_i u^i$, $(u,u) = u_i u^i$ и т. д. Величины, помеченные штрихом, относятся к частицам сорта «*b*», величины без штриха — к частицам сорта «*a*», L — аналог кулоновского логарифма [3, 4]:

$$L = \int\limits_{k_{min}}^{k_\infty} \frac{dk}{k}. \tag{10}$$

Для усредненной метрики g_{ij} уравнения доведены в [1] до следующего вида:

$$R_{ij} + \Lambda_{ij} = \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right), \tag{11}$$

где T_{ij} — макроскопический тензор энергии-импульса, $T = g^{ij}T_{ij}$ — его след, R_{ij} — тензор Риччи, Λ_{ij} — дополнительное слагаемое в левой части уравнений Эйнштейна, появившееся после усреднения по ансамблю квадратичных по h_{ij} слагаемых:

$$\Lambda_{ij} = (\delta^k_n \delta^s_j - \delta^k_j \delta^s_n)\left[-\frac{1}{2}\nabla_k P^n_{is} + Q^n_{kis}\right] + \lambda_{ij}. \tag{12}$$

Здесь

$$P^n_{is} = \langle h^n_l \Omega^l_{is}\rangle, \tag{13}$$

$$Q^n_{kis} = \langle \Omega^n_{kl}\Omega^l_{is}\rangle, \tag{14}$$

$$\lambda_{ij} = -\sum_a \frac{\chi}{m_a}\int \frac{d^4p}{\sqrt{(-g)}}\left\{-\frac{1}{2}p_ip_ju^ku^m - \frac{1}{4}g_{ij}p^kp^m - \frac{1}{2}p_ip_jg^{km} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}m_a^2c^2g_{ij}g^{km} + p_ip^k\delta^m_j + p_jp^k\delta^m_i - \frac{1}{2}m_a^2c^2\delta^k_i\delta^m_j\right\}\langle N_a h_{km}\rangle. \tag{15}$$

Опускание и поднятие индексов проводится с помощью метрики g_{ij}.

Для дальнейшего упрощения (13), (14) достаточно вычислить h_{ij} и Ω^l_{ij} внутри области, определяемой радиусом корреляции и соответствующим временем корреляции. Основной вклад в вычисляемые макроскопические величины дают далекие столкновения. Для учета их вклада достаточно найти h_{ij} из линеаризованных относительно метрики g_{ij} уравнений Эйнштейна. Так как мы считаем метрику внутри области корреляции постоянной, можно ввести локально лоренцеву систему отсчета в окрестности точки, где нас интересуют значения h_{ij}.

Таким образом, дальнейшие выкладки не имеют ковариантного характера, однако все они проводятся с целью определения компонент тензора Λ_{ij} в некоторой (произвольной) точке q в выбранной системе координат, в которой $g_{ij} = \eta_{ij}$ — тензор Минковского. В этой системе координат интервал ds^2 имеет вид

$$ds^2 = (d\eta)^2 - (dq^1)^2 - (dq^2)^2 - (dq^3)^2.$$

Окончательный результат нужно будет записать в ковариантном виде.

Выражения для h_{ij} и Ω^l_{ij}, найденные из линеаризованных относительно метрики Минковского (которую по-прежнему обозначаем через g_{ij}) уравнений Эйнштейна, найдены в [1]. Они имеют вид

$$h_{ij}(\eta,\mathbf{q}) = \sum_b \int d^4p' \int d^3q' \int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} h^{(b)}_{ij}(\eta,\eta',p',\mathbf{k})\Phi_b(\eta',\mathbf{q}',p'), \tag{16}$$

$$\Omega^i_{jk}(\eta,\mathbf{q}) = \sum_b \int d^4p' \int d^3q' \int d^3k \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \Omega^{i(b)}_{jk}(\eta,\eta',p',\mathbf{k})\Phi_b(\eta',\mathbf{q}',p') \tag{17}$$

($\mathbf{q} = (q^1,q^2,q^3)$ — трехмерный радиус-вектор в данной системе координат, $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)$). Здесь $\Phi_b = N_b - n_bf_b$,

$$h^{(b)}_{ij}(\eta,\eta',p',\mathbf{k}) = -\frac{i\chi m_bc^2}{(2\pi)^3k}\left(u'_iu'_j - \frac{1}{2}g_{ij}\right)\left\{e^{ik(\eta'-\eta)} - e^{-ik(\eta'-\eta)}\right\}, \tag{18}$$

$$\Omega^{i(b)}_{jk}(\eta,\eta',p',\mathbf{k}) = \frac{\chi m_b c^2}{2(2\pi)^3 k}\left\{\left[\left(u'_j u'_k - \frac{1}{2}\,g_{jk}\right)k^i_+ - \left(u'_j u'^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\right)k^+_k - \right.\right.$$
$$- \left(u'_k u'^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_k\right)k^+_j\Big]e^{ik(\eta'-\eta)} - \left[\left(u'_j u'_k - \frac{1}{2}g_{jk}\right)k^i_- - \left(u'_j u'^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\right)k^-_k - \right.$$
$$\left.\left. - \left(u'_k u'^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_k\right)k^-_j\right]e^{-ik(\eta'-\eta)}\right\}. \tag{19}$$

В (18) и (19) введены векторы

$$k^+_i = (k,\mathbf{k}), \quad k^-_i = (-k,\mathbf{k}), \quad k = \sqrt{\left[(k_1)^2+(k_2)^2+(k_3)^2\right]} = |\mathbf{k}|.$$

При этом, очевидно, $k^-_i(\mathbf{k}) = -k^+_i(-\mathbf{k})$.

Подстановка (16)–(19) в (13)–(15) приводит к следующим выражениям для P^n_{is}, Q^n_{kis} и λ_{ij}:

$$P^n_{is} = \sum_{bc}\int d^4p'\int d^4p''\int d^3q'\int d^3q''\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta''\int d^3k'\int d^3k''\,\times$$
$$\times\, e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')}h^{n(b)}_l(\eta,\eta',p',\mathbf{k}')\Omega^{l(c)}_{is}(\eta,\eta'',p'',\mathbf{k}'')n_b n_c g_{bc}(x',x''), \tag{20}$$

$$Q^n_{kis} = \sum_{bc}\int d^4p'\int d^4p''\int d^3q'\int d^3q''\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta''\int d^3k'\int d^3k''\,\times$$
$$\times\, e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')}\Omega^{n(b)}_{kl}(\eta,\eta',p',\mathbf{k}')\Omega^{l(c)}_{is}(\eta,\eta'',p'',\mathbf{k}'')n_b n_c g_{bc}(x',x''), \tag{21}$$

$$\lambda_{ij} = -\sum_{ab}\frac{\chi}{m_a}\int d^4p\int d^4p'\int d^3q'\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int d^3k' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}\,\times$$
$$\times\left\{-\frac{1}{2}\,p_i p_j u^k u^m - \frac{1}{4}\,g_{ij}p^k p^m - \frac{1}{2}\,p_i p_j g^{km} + \frac{1}{4}\,m_a^2 c^2 g_{ij}g^{km} + p_i p^k\delta^m_j + \right.$$
$$\left. + \,p_j p^k\delta^m_i - \frac{1}{2}\,m_a^2c^2\delta^k_i\delta^m_j\right\}h^{(b)}_{km}(\eta,\eta',p',\mathbf{k}')n_a n_b g_{ab}(x,x'). \tag{22}$$

В этих выражениях нештрихованные величины относятся к частицам сорта «a», штрихованные один раз — к частицам сорта «b», штрихованные два раза — к частицам сорта «c».

Величины $g_{ab}(x,x')$ в (20)–(22) — это двухчастичные корреляционные функции, которые внутри области корреляции имеют следующий вид [1, 3]:

$$g_{ab}(x,x') = \int d^3k\int\limits_{-\infty}^{\eta}\frac{d\tau}{p^0}\left[\frac{\partial}{\partial p_i}\left(p^l p^m\Delta_{ij}f_a(x)\right)\right]_\tau\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{d\tau'}{u'^0}\,f_b(x')\,\times$$
$$\times\,\Omega^{j(b)}_{lm}(\tau,\tau',p',\mathbf{k})\exp\left[-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') + \frac{i}{c}\,(\mathbf{k}\mathbf{v})(\eta-\tau) + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right] +$$
$$+\int d^3k\int\limits_{-\infty}^{\eta'}\frac{d\tau'}{p'^0}\left[\frac{\partial}{\partial p'_i}\left(p'^l p'^m\Delta'_{ij}f_b(x')\right)\right]_{\tau'}\int\limits_{-\infty}^{\tau'}\frac{d\tau}{u^0}\,f_a(x)\Omega^{j(a)}_{lm}(\tau',\tau,p,\mathbf{k})\,\times$$

$$\times \exp\left[-i\mathbf{k}(\mathbf{q}'-\mathbf{q})+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\eta'-\tau')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v})(\tau-\eta)\right]. \qquad (23)$$

Здесь индекс τ' означает, что в соответствующее выражение, зависящее от штрихованных координат $\mathbf{q}'$ и импульсов p'_i в момент η' следует подставить вместо η', $\mathbf{q}'$ величины τ', $\mathbf{q}'+\mathbf{v}'(\tau'-\eta')/c$. Аналогичное значение имеет и индекс τ.

После подстановки (23) в (20)–(22) и интегрирования по $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}''$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ получаем для P^n_{is}, Q^n_{kis}, λ_{ij} выражения

$$P^n_{is}=\sum_{bc} n_b n_c (2\pi)^6 \int d^4p' \int d^4p'' \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int d^3k \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{p'^0} \times \right.$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial p'_t}\left(p'^r p'^m \Delta'_{tj} f_b(x')\right)\right]_{\tau'} \int\limits_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'')\Omega^{j(c)}_{rm}(\tau',\tau'',p'',-\mathbf{k}) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right] + \int\limits_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{p^{0''}} \left[\frac{\partial}{\partial p''_t}\left(p''^r p''^m \Delta''_{tj} f_c(x'')\right)\right]_{\tau''} \times$$
$$\left. \times \int\limits_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x')\Omega^{j(b)}_{rm}(\tau'',\tau',p',\mathbf{k}) \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right]\right\} \times$$
$$\times h^{n(b)}_l(\eta,\eta',p',-\mathbf{k})\Omega^{l(c)}_{is}(\eta,\eta'',p'',\mathbf{k}), \qquad (24)$$

$$Q^n_{kis}=\sum_{bc} n_b n_c (2\pi)^6 \int d^4p' \int d^4p'' \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int d^3k \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{p'^0} \times \right.$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial p'_t}\left(p'^r p'^m \Delta'_{tj} f_b(x')\right)\right]_{\tau'} \int\limits_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'')\Omega^{j(c)}_{rm}(\tau',\tau'',p'',-\mathbf{k}) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right] + \int\limits_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{p^{0''}} \left[\frac{\partial}{\partial p''_t}\left(p''^r p''^m \Delta''_{tj} f_c(x'')\right)\right]_{\tau''} \times$$
$$\left. \times \int\limits_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x')\Omega^{j(b)}_{rm}(\tau'',\tau',p',\mathbf{k}) \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right]\right\} \times$$
$$\times \Omega^{n(b)}_{kl}(\eta,\eta',p',-\mathbf{k})\Omega^{l(c)}_{is}(\eta,\eta'',p'',\mathbf{k}), \qquad (25)$$

$$\lambda_{ij}=-\sum_{bc}\frac{\chi(2\pi)^3 n_b n_c}{m_c}\int d^4p' \int d^4p'' \left[-\frac{1}{2}p''_i p''_j u''^k u''^m - \frac{1}{4}g_{ij}p''^k p''^m - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}p''_i p''_j g^{km}+\frac{1}{4}m_c^2c^2 g_{ij}g^{km}+p''_i p''^k\delta^m_j + p''_j p''^k \delta^m_i - \frac{1}{2}m_c^2c^2\delta^k_i\delta^m_j\right]\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int d^3k h_{km}^{(b)}(\eta,\eta',p,-\mathbf{k}) \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{p'^0} \left[\frac{\partial}{\partial p'_r} \left(p'^l p'^s \Delta'_{nr} f_b(x') \right) \right]_{\tau'} \times \right.$$

$$\times \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'') \Omega_{ls}^{n(c)}(\tau',\tau'',p'',-\mathbf{k}) \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{kv}'')(\eta-\tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{kv}')(\tau'-\eta') \right] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\tau''}{p''^0} \left[\frac{\partial}{\partial p''_r} \left(p''^l p''^s \Delta''_{nr} f_c(x'') \right) \right]_{\tau'} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \Omega_{ls}^{n(b)}(\tau'',\tau',p',\mathbf{k}) \times$$

$$\left. \times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{kv}'')(\eta-\tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{kv}')(\tau'-\eta') \right] \right\}. \qquad (26)$$

Для дальнейшего упрощения (24)–(26) поступаем следующим образом. Во-первых, считаем, что функция распределения внутри области корреляции слабо изменяется и в первом приближении зависимостью f от временной координаты при вычислении интегралов в (24)–(26) можно пренебречь. Подставим в (24)–(26) явный вид для $h_{ij}^{(b)}$ и $\Omega_{kj}^{i(b)}$ из (18), (19) и вычислим интегралы по τ', τ'', η', η'', $\mathbf{k}$. Тогда выражение для P_{is}^n приводится к виду

$$P_{is}^n = \sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b m_c n_b n_c c^6}{8(2\pi)^3} \int d^4p' \int d^4p'' f_b(x') f_c(x'') \left[1 - 10(u'u'')^2 \right] \times$$

$$\times \left(u'^n u'_l - \frac{1}{2}\delta_l^n \right) \left[\left(u''_i u''_s - \frac{1}{2} g_{is} \right) g^{lf} - \left(u''^l u''_i - \frac{1}{2}\delta_i^l \right) \delta_s^f - \left(u''^l u''_s - \frac{1}{2}\delta_s^l \right) \delta_i^f \right] \times$$

$$\times \left(m_c u'^m K_{fm}^{(1)}(u',u'') + m_b u''^m K_{fm}^{(2)}(u',u'') \right) - \sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b m_c n_b n_c c^7}{4(2\pi)^3} \times$$

$$\times \int d^4p' \int d^4p'' \left(u'^n u'_l - \frac{1}{2}\delta_l^n \right) \left[\left(u''_i u''_s - \frac{1}{2} g_{is} \right) g^{lf} - \left(u''^l u''_i - \frac{1}{2}\delta_i^l \right) \delta_s^f - \right.$$

$$\left. - \left(u''^l u''_s - \frac{1}{2}\delta_s^l \right) \delta_i^f \right] \left\{ \left[(u'u'')^2 (\delta_j^m + u'_j u'^m) - \frac{1}{2}(\delta_j^m - u'_j u'^m) - 2(u'u'') u'^m u''_j \right] \times \right.$$

$$\times f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_j} K_{fm}^{(1)}(u',u'') + \left[(u'u'')^2 (\delta_j^m + u''_j u''^m) - \frac{1}{2}(\delta_j^m - u''_j u''^m) - \right.$$

$$\left. \left. - 2(u'u'') u''^m u'_j \right] f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_j} K_{fm}^{(2)}(u',u'') \right\}. \qquad (27)$$

Здесь введены обозначения $K_{fm}^{(1)}(u',u'')$ и $K_{fm}^{(2)}(u',u'')$ для тензоров, имеющих в локально лоренцевой системе координат, где $g_{ij} = \eta_{ij}$ — тензор Минковского, следующий вид:

$$K_{fm}^{(1)}(u',u'') = \frac{1}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int_{-\infty}^{\eta'} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \left(e^{ik(\eta'-\eta)} - e^{-ik(\eta'-\eta)} \right) \times$$

$$\times \left(k_f^+ e^{ik(\eta''-\eta)} - k_f^- e^{-ik(\eta''-\eta)} \right) \left(k_m^+ e^{-ik(\tau''-\tau')} - k_m^- e^{ik(\tau''-\tau')} \right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right],$$

$$K^{(2)}_{fm}(u',u'')=\frac{1}{u'^0u''^0}\int\frac{d^3k}{k^3}\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta'\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta''\int\limits_{-\infty}^{\eta''}d\tau''\int\limits_{-\infty}^{\tau''}d\tau'(e^{ik(\eta'-\eta)}-e^{-ik(\eta'-\eta)})\times$$
$$\times(k_f^+e^{ik(\eta''-\eta)}-k_f^-e^{-ik(\eta''-\eta)})(k_m^+e^{-ik(\tau''-\tau')}-k_m^-e^{ik(\tau''-\tau')})\times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta''-\tau'')+\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau'-\eta')\right].$$

После вычисления интегралов по τ', τ'', η', η'' эти выражения принимают вид

$$K^{(1)}_{fm}(u',u'')=\frac{2\pi c^5}{u'^0u''^0}\int\frac{d^3k}{k^2}\delta(\mathbf{k}\mathbf{v}''-\mathbf{k}\mathbf{v}')\left\{\frac{k_f^+k_m^+}{(kc-\mathbf{k}\mathbf{v}'')(kc+\mathbf{k}\mathbf{v}'')^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_f^+k_m^-+k_f^-k_m^+}{(kc-\mathbf{k}\mathbf{v}'')^2(kc+\mathbf{k}\mathbf{v}'')^2}+\frac{k_f^-k_m^-}{(kc-\mathbf{k}\mathbf{v}'')^3(kc+\mathbf{k}\mathbf{v}'')}\right\}=K_{fm}(u',u''), \tag{28}$$

$$K^{(2)}_{fm}(u',u'')=-K^{(1)}_{fm}(u',u'')=-K_{fm}(u',u''). \tag{29}$$

Данные равенства справедливы только в локально лоренцевой системе отсчета. Для того чтобы получить ковариантные выражения для тензоров $K^{(1)}_{fm}(u',u'')$ и $K^{(2)}_{fm}(u',u'')$, учтем следующее. Величины $K^{(1)}_{fm}(u',u'')$ и $K^{(2)}_{fm}(u',u'')$ появились в (27) после подстановки корреляционной функции $g_{ab}(x',x'')$ в (20) и интегрирования по $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}''$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$. Но выражение для корреляционной функции (23) представляет собой сумму двух слагаемых, отличающихся друг от друга заменой штрихованных один раз величин, относящихся к частицам сорта «a», на штрихованные дважды величины, относящиеся к частицам сорта «b», и наоборот. После интегрирования этих слагаемых по $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}''$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ в (27) и появились $K^{(1)}_{fm}(u',u'')$ и $K^{(2)}_{fm}(u',u'')$. Очевидно, что оба этих слагаемых должны вычисляться в одной системе отсчета. Удобно в качестве такой системы выбрать систему центра масс, в которой

$$\mathbf{v}'=\mathbf{v},\quad \mathbf{v}''=-\mathbf{v},\quad u'^0=u''^0=1/\sqrt{1-v^2/c^2}=u^0.$$

В этой системе отсчета

$$K_{00}=K_{0\alpha}=0,\quad K_{\alpha\beta}=\frac{2\pi^2c}{vu_0^2k^2_{min}}\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{v_\alpha v_\beta}{v^2}\right). \tag{30}$$

Здесь $v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$, $v_\alpha=v^\alpha=u^\alpha/u^0$ — пространственные компоненты вектора $\mathbf{v}$.

Ковариантное обобщение (30) имеет вид

$$K_{ij}(u',u'')=\frac{4\pi^2}{k^2_{min}\left[(u'u'')^2-1\right]^{3/2}}\times$$
$$\times\left\{-\left[(u'u'')^2-1\right]g_{ij}-u'_iu'_j-u''_iu''_j+(u'u'')(u'_iu''_j+u''_iu'_j)\right\}. \tag{31}$$

Выражения для $K^{(1)}_{fm}(u',u'')$ и $K^{(2)}_{fm}(u',u'')$ оказались расходящимися при $k\to 0$, т. е. при больших прицельных расстояниях. Это связано с тем, что мы интегрируем по бесконечной области, в то время как на самом деле нужно ограничиться интегрированием только по области корреляции, где мы считали метрику слабо меняющейся. Данную трудность, так же как и при выводе кинетического уравнения, следует обходить введением обрезания в расходящемся интеграле

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k^3}.$$

Нижний предел интегрирования положим равным не нулю, а величине $k_{min} = 1/r_{max}$, где r_{max} — размер области корреляции (радиус корреляции). Тогда предыдущий интеграл принимает значение $1/2k_{min}^2 = (1/2)r_{max}^2$. Опыт вывода релятивистского кинетического уравнения (см. [4, 5]) показывает, что при более тщательном исследовании интегралы становятся сходящимися при $r \to \infty$, причем вклад в интегралы от области $r > r_{max}$ пренебрежимо мал. В [4, 5] даны оценки для величины r_{max} в случае, когда усредненная метрика g_{ij} есть метрика изотропной космологической модели.

Тензор (31) обладает следующими свойствами:

$$K_{ij}(u', u'') = K_{ij}(u'', u'), \quad K_{ij}u'^i = K_{ij}u''^i = 0, \quad K_{ij} = K_{ji}. \tag{32}$$

Вследствие этого выражение для P^n_{is} существенно упрощается. В макроскопические уравнения Эйнштейна входит не тензор P^n_{is}, а тензор $\varphi^k_{ij} = -(1/2)(\delta^k_n\delta^s_j - \delta^k_j\delta^s_n)$. Выражение для этого тензора приводится к виду

$$\begin{aligned}\varphi^k_{ij} = &-\sum_{bc}\frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3}\int\frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}}\int\frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}}\left[\frac{1}{2}g^{fk}u''_i u''_j +\right.\\ &\left.+\ u'^k(u'u'')(\delta^f_j u''_i + \delta^f_i u''_j)\right]\left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right)K_{fr}(u', u'')\times\\ &\times\left(f_c(x'')\frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_r} - f_b(x')\frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_r}\right).\end{aligned} \tag{33}$$

Отметим, что

$$g^{ij}\varphi^k_{ij} = 0, \quad \varphi^i_{ij} = 0, \quad \varphi^k_{ij} = \varphi^k_{ji}. \tag{34}$$

Аналогичным образом упрощаем выражение для тензора

$$\mu_{ij} = (\delta^k_n\delta^s_j - \delta^k_j\delta^s_n)Q^n_{kis} + \lambda_{ij}, \tag{35}$$

которое принимает вид

$$\begin{aligned}\mu_{ij} = &\sum_{bc}\frac{\chi^3 m_b m_c n_b n_c c^6}{16(2\pi)^3}\int\frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}}\int\frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}}f_b(x')f_c(x'')\left(1 - 10(u'u'')^2\right)\times\\ &\times\left\{u'^q u'_j\delta^r_i - u''^r u''_j\delta^q_i + g^{qr}\left[\left((u'u'')^2 + \frac{1}{2}\right)u''_i u''_j + \frac{1}{2}\left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right)g_{ij}\ -\right.\right.\\ &\left.\left.-\ 2(u'u'')u'_i u''_j\right] - \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right)\delta^q_i\delta^r_j\right\}\left(m_c u'^m J^{(1)}_{rqm}(u', u'') +\right.\end{aligned}$$

$$+ m_b u''^m J^{(2)}_{rqm}(u',u'')\big) - \sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}} \Big\{ u'^q u'_j \delta^r_i -$$

$$- u''^r u''_j \delta^q_i + g^{qr} \left[\left((u'u'')^2 + \frac{1}{2} \right) u''_i u''_j + \frac{1}{2} \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2} \right) g_{ij} - 2(u'u'') u'_i u''_j \right] -$$

$$- \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2} \right) \delta^q_i \delta^r_j \Big\} \Big\{ \left[\left((u'u'')^2 - \frac{1}{2} \right) \delta^m_f + \left((u'u'')^2 + \frac{1}{2} \right) u'_f u'^m - \right.$$

$$\left. - 2(u'u'') u''_f u'^m \right] J^{(1)}_{rqm}(u',u'') f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_f} + \left[\left((u'u'')^2 - \frac{1}{2} \right) \delta^m_f + \right.$$

$$\left. + \left((u'u'')^2 + \frac{1}{2} \right) u''_f u''^m - 2(u'u'') u'_f u''^m \right] J^{(2)}_{rqm}(u',u'') f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_f} \Big\}. \qquad (36)$$

Здесь введены обозначения $J^{(1)}_{rqm}(u',u'')$ и $J^{(2)}_{rqm}(u',u'')$ для тензоров, которые в локально лоренцевой системе отсчета имеют вид

$$J^{(1)}_{lmn}(u',u'') = \frac{1}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int_{-\infty}^{\eta'} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' (k_l^+ e^{-ik(\eta'-\eta)} -$$

$$- k_l^- e^{ik(\eta'-\eta)})(k_m^+ e^{ik(\eta''-\eta)} - k_m^- e^{-ik(\eta''-\eta)})(k_n^- e^{ik(\tau''-\tau')} -$$

$$- k_n^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}) \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{kv}'')(\eta''-\tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{kv}')(\tau'-\eta') \right],$$

$$J^{(2)}_{lmn}(u',u'') = \frac{1}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int_{-\infty}^{\eta''} d\tau'' \int_{-\infty}^{\tau''} d\tau' (k_l^+ e^{-ik(\eta'-\eta)} -$$

$$- k_l^- e^{ik(\eta'-\eta)})(k_m^+ e^{ik(\eta''-\eta)} - k_m^- e^{-ik(\eta''-\eta)})(k_n^- e^{ik(\tau''-\tau')} -$$

$$- k_n^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}) \exp\left[\frac{i}{c}(\mathbf{kv}'')(\eta''-\tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{kv}')(\tau'-\eta') \right].$$

После вычисления интегралов по η', η'', τ', τ'' имеем

$$J^{(1)}_{lmn}(u',u'') = \frac{c^4}{u'^0 u''^0} \int \frac{d^3k}{k^3} \frac{\mathrm{V.p.}}{(\mathbf{kv}''-\mathbf{kv}')} \left\{ \frac{k_l^+ k_m^+ k_n^+}{(kc+\mathbf{kv}'')^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_l^+ k_m^+ k_n^- + k_l^+ k_m^- k_n^+ + k_l^- k_m^+ k_n^+}{(kc+\mathbf{kv}'')^2 (kc-\mathbf{kv}'')} + \frac{k_l^+ k_m^- k_n^- + k_l^- k_m^+ k_n^- + k_l^- k_m^- k_n^+}{(kc+\mathbf{kv}'')(kc-\mathbf{kv}'')^2} + \frac{k_l^- k_m^- k_n^-}{(kc-\mathbf{kv}'')^3} \right\}. \qquad (37)$$

Выражение для $J^{(2)}_{lmn}(u',u'')$ получается из выражения для $J^{(1)}_{lmn}(u',u'')$ заменой $\mathbf{v}' \to \mathbf{v}''$ и наоборот. Символ V.p. означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Так же, как и в предыдущем случае, конкретизируем (37) в системе центра масс, в которой $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}'' = -\mathbf{v}$, $u'^0 = u''^0 = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = u^0$. В этой системе отсчета компоненты $J^{(1)}_{lmn}(u',u'')$ имеют вид (пространственные индексы у трехмерного вектора скорости v^α опускаются с помощью трехмерного символа Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$)

$$J_{000} = -\alpha(v)\frac{v^2}{c^2}, \quad J_{00\alpha} = -\alpha(v)\frac{v_\alpha}{c}, \quad J_{0\alpha\beta} = -\alpha(v)\delta_{\alpha\beta} + \beta(v)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2}\right), \qquad (38)$$

$$J_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{c^2}{v^2}\alpha(v)\left[\delta_{\alpha\beta}\frac{v_\gamma}{c} + \delta_{\alpha\gamma}\frac{v_\beta}{c} + \delta_{\beta\gamma}\frac{v_\alpha}{c} - 2\frac{v_\alpha v_\beta v_\gamma}{cv^2}\right] +$$
$$+ \frac{c^2}{v^2}\beta(v)\left[\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2}\right)\frac{v_\gamma}{c} + \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{v_\alpha v_\gamma}{v^2}\right)\frac{v_\beta}{c} + \left(\delta_{\beta\gamma} - \frac{v_\beta v_\gamma}{v^2}\right)\frac{v_\alpha}{c}\right]. \tag{39}$$

Функции α и β и (38), (39) зависят только от скорости $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ и имеют следующий явный вид:

$$\alpha = \frac{\pi c^3}{u_0^2 v^3 k_{min}}\left[\frac{2(v/c)(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^2} + \ln\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)\right], \tag{40}$$

$$\beta = \frac{\pi c^3}{2u_0^2 v^3 k_{min}}\left[\frac{2(v/c)\left(3 - 2(v^2/c^2) + 3(v^4/c^4)\right)}{(1 - v^2/c^2)^2} + 3\left(1 + v^2/c^2\right)\ln\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)\right]. \tag{41}$$

Здесь введено обозначение для интеграла

$$\frac{1}{k_{min}} = \int\limits_{k_{min}}^{\infty}\frac{dk}{k^2}.$$

По соображениям, указанным выше, здесь мы вновь положили нижний предел равным $k_{min} = 1/r_{max}$.

Ковариантное обобщение данных результатов, полученных в локально лоренцевой системе отсчета центра масс, на произвольные системы отсчета имеет вид

$$J^{(1)}_{ijk}(u', u'') = J^{(2)}_{ijk}(u'', u') = J_{ijk}(u', u''), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} J_{ijk}(u', u'') = A\,&\left[(g_{ij}u'_k + g_{ik}u'_j + g_{jk}u'_i) - z(g_{ij}u''_k + g_{ik}u''_j + g_{jk}u''_i) -\right. \\ &\left. - (u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) + 3z u''_i u''_j u''_k\right] + \\ &+ C\left[u'_i u'_j u'_k - z(u'_i u'_j u''_k + u'_i u''_j u'_k + u''_i u'_j u'_k) +\right. \\ &\left. + z^2(u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) - z^3 u''_i u''_j u''_k\right], \end{aligned} \tag{43}$$

где $z = (u'u'') = (u'^i u''_i)$,

$$A = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{k_{min}}\left[\frac{z - 2}{(z - 1)^2(z + 1)^{1/2}} + \frac{2z - 1}{(z + 1)(z - 1)^{5/2}}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right], \tag{44}$$

$$C = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{k_{min}}\left[\frac{z - 6}{(z - 1)^3(z + 1)^{3/2}} + \frac{6z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)^{7/2}}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right]. \tag{45}$$

Тензор $J_{ijk}(u', u'')$ удовлетворяет тождеству

$$J_{ijk}(u', u'')u''^k = 0. \tag{46}$$

Вследствие свойств (42), (46) мы можем выражение (36) для μ_{ij} записать в следующем ковариантном виде:

$$\mu_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^2 m_c^2 n_b n_c c^7}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^4p'}{\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^4p''}{\sqrt{(-g)}} \left\{ \left[\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)(u_i''u_j'' + u_i'u_j') + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(z^2 - \frac{1}{2}\right) g_{ij} - 2z(u_i'u_j'' + u_i''u_j') \right] g^{qr} - 2\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_i^q \delta_j^r \right\} \times$$
$$\times f_c(x'') \frac{\partial}{\partial p_f'} \left\{ f_b(x') \left[\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_f^m + \left(z^2 + \frac{1}{2}\right) u_f' u'^m - 2z u_f'' u'^m \right] \right\} J_{rqm}(u', u''). \quad (47)$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\frac{\partial}{\partial p_f'} \left[\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_f^m + \left(z^2 + \frac{1}{2}\right) u_f' u'^m - 2z u_f'' u'^m \right] = \left(5z^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{u'^m}{m_b c}.$$

Отметим, что тензор μ_{ij} является бесследовым:

$$g^{ij}\mu_{ij} = 0. \quad (48)$$

Вследствие (34) и (48) макроскопические уравнения Эйнштейна для гравитационно взаимодействующих частиц записываются в виде

$$G_{ij} + \varphi_{ij;k}^k + \mu_{ij} = \chi T_{ij}, \quad (49)$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную в пространстве с метрикой g_{ij}, G_{ij} — тензор Эйнштейна этого пространства, T_{ij} — тензор энергии-импульса.

Тензоры φ_{ij}^k и μ_{ij} выражаются по формулам (33), (47) через одночастичные функции распределения f_b, заданные в восьмимерном фазовом пространстве, в котором все четыре компоненты четырехмерного импульса считаются независимыми. Переход к семимерной функции распределения F_b осуществляется по правилу

$$n_b f_b(q^i, p_j) = F_b(q^i, p_\alpha)\delta\left(\sqrt{g^{lm}p_l p_m} - m_b c\right).$$

Здесь функция F_b зависит только от пространственных компонент импульса (пространственные компоненты мы обозначаем греческими индексами).

Интегрируя (33), (47) по p_0' и p_0'', приводим тензоры φ_{ij}^k и μ_{ij} к виду:

$$\varphi_{ij}^k = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^3 m_c^3 c^9}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{(-g)}} \left[\frac{1}{2} g^{fk} u_i'' u_j'' + u'^k (u'u'')(\delta_j^f u_i'' + \delta_i^f u_j'')\right] \times$$
$$\times \left((u'u'')^2 - \frac{1}{2}\right) K_{f\alpha}(u', u'') \left(F_c(x'')\frac{\partial F_b(x')}{\partial p_\alpha'} - F_b(x')\frac{\partial F_c(x'')}{\partial p_\alpha''}\right), \quad (50)$$

$$\mu_{ij} = -\sum_{bc} \frac{\chi^3 m_b^3 m_c^3 c^9}{8(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{(-g)}} \left\{ \left[\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)(u_i''u_j'' + u_i'u_j') + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(z^2 - \frac{1}{2}\right) g_{ij} - 2z(u_i'u_j'' + u_i''u_j') \right] g^{qr} - 2\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_i^q \delta_j^r \right\} \times$$
$$\times F_c(x'') \frac{\partial}{\partial p_f'} \left\{ F_b(x') \left[\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\delta_f^m + \left(z^2 + \frac{1}{2}\right) u_f' u'^m - 2z u_f'' u'^m \right] \right\} J_{rqm}(u', u''). \quad (51)$$

Здесь

$$\frac{d^3p'}{p'^0\sqrt{(-g)}} \quad \text{и} \quad \frac{d^3p''}{p''^0\sqrt{(-g)}}$$

— инвариантные элементы объема в трехмерном импульсном пространстве частиц сорта «b» и «c» соответственно. Греческий индекс α в (50) пробегает только значения $1, 2, 3$ (пространственный индекс). Производную по p'_f в (51) следует вычислять так, как будто все четыре компоненты импульса независимы. Зависимость p'_0 от p'_α учитывается после дифференцирования по p'_f.

Тензоры φ^k_{ij} и μ_{ij} обязаны подчиняться дополнительному условию

$$g_{lj}(\varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij})_{;l} = 0, \tag{52}$$

так как дивергенции тензоров G_{ij} и T_{ij} обращаются в нуль.

Уравнение (52) накладывает некоторые ограничения на зависимость от координат и относительной скорости частиц (последняя может быть выражена через z) параметра k_{min}.

В правой части макроскопических уравнений Эйнштейна стоит макроскопический тензор энергии-импульса. Последний выражается через одночастичные функции распределения F_b:

$$T_{ij} = \sum_b \int \frac{d^3p}{p^0\sqrt{(-g)}}\, p_i p_j F_b(p). \tag{53}$$

К системе уравнений (49)–(53) нужно добавить кинетическое уравнение для F_b, которое получается из (8) интегрированием по p_0 и имеет вид (53) из [1].

3. ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

Полученные уравнения гравитационного поля для сплошных сред отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием дополнительных слагаемых

$$\varphi^k_{ij;k} + \mu_{ij}$$

в левой части.

Эти слагаемые пропорциональны постоянной Эйнштейна в третьей степени, однако они пропорциональны плотности частиц во второй степени. Следовательно, эти дополнительные слагаемые могут сыграть роль только в сплошных средах достаточно высокой плотности. Такие плотности возможны на ранних стадиях эволюции Вселенной, а также внутри объектов, близких к состоянию гравитационного коллапса. Поэтому, естественно, первые приложения полученных уравнений следует искать в теории ранних стадий эволюции Вселенной и в теории гравитационного коллапса.

Рассмотрим полученные макроскопические уравнения для среды, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия, когда функция распределения каждого из сортов частиц есть общерелятивистская функция распределения вида [6]

$$F_a(q^i, p_\alpha) = A_a \exp\left[-c(v_i p^i)/k_B T\right]. \tag{54}$$

Здесь v_i — макроскопическая 4-скорость среды, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, A_a — нормировочная постоянная.

В этом случае тензор φ^k_{ij} тождественно равен нулю, а тензор μ_{ij} имеет вид

$$\mu_{ij} = -\chi\epsilon\left(\frac{4}{3}v_iv_j - \frac{1}{3}g_{ij}\right). \tag{55}$$

Если перенести μ_{ij} из левой части макроскопических уравнений (49) в правую, то они превращаются в обычные уравнения Эйнштейна с дополнительным тензором энергии-импульса, который имеет вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости с уравнением состояния $P = \epsilon/3$, но с отрицательной «плотностью энергии».

В нерелятивистском пределе, когда $mc^2 \gg k_BT$, абсолютная величина этой «плотности энергии» равна (вычисления мы опускаем)

$$\sum_{ab}\frac{15k^2r_{max}}{2k_BT}m_a^2m_b^2N_aN_b. \tag{56}$$

Здесь N_a и N_b — плотности числа частиц сорта «a» и «b» соответственно. В ультрарелятивистском пределе, когда $mc^2 \ll k_BT$, выражение для данной отрицательной «плотности энергии» отличается от (56). Мы не будем выписывать здесь соответствующей формулы. Отметим лишь, что при $mc^2 = k_BT$ результат по порядку величин совпадает с (56).

Как отмечалось во Введении, вследствие малости величины гравитационной постоянной вклад данной «отрицательной плотности» энергии в суммарную плотность вещества может сыграть роль только при больших плотностях (на ранних стадиях эволюции Вселенной) либо в макросистемах, состоящих из больших масс (скопления галактик).

Следует также отметить, что дополнительные слагаемые в левой части макроскопических уравнений для гравитационного поля в сплошных средах получены только с учетом гравитационного взаимодействия частиц среды. В средах, где значительную роль играют другие взаимодействия, следует учесть и последние. Например, в плазме главную роль играют электромагнитные взаимодействия. Поэтому при выводе уравнений для гравитационного поля в релятивистской плазме, в частности, для плазмы на радиационно доминированной стадии эволюции Вселенной, следует в первую очередь учесть электромагнитные взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-05734-а).

Литература

1. А. В. Захаров, ЖЭТФ **110**, 3 (1996).
2. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **37**, 735 (1959).
3. А. В. Захаров, ЖЭТФ **99**, 769 (1989).
4. Г. С. Бисноватый-Коган, И. Г. Шухман, ЖЭТФ **82**, 3 (1982).
5. А. В. Захаров, Астрон. ж. **66**, 1208 (1989).
6. Н. А. Черников, Научн. докл. высш. школы, Физ. мат. № 1, 168 (1959).