ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 4(10), стр. 1167–1175 ©1997

КОНДЕНСАЦИЯ БОЗЕ-ЧАСТИЦ В СТАТИЧЕСКОМ СКАЛЯРНОМ ПОЛЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко

Донецкий физико-технический институт
Национальной академии наук Украины
340114, Донецк, Украина

Поступила в редакцию 31 декабря 1996 г.

Характеристическая задача или задача Гурса, развитая в работах авторов [1–3], применяется для исследования энергетического спектра скалярной релятивистской частицы в статическом аксиально-симметричном скалярном внешнем поле, имеющем характер притяжения. Задача имеет, очевидно, модельный характер. Показано, что в этой постановке задачи нет неустойчивых, нарастающих со временем решений, как в задаче Коши, появляющихся при прохождении через нуль квадрата частоты (энергии) частицы, т. е. при конденсации бозе-частиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Гурса применяется только к гиперболическим, а следовательно, к релятивистским уравнениям. В такой постановке одна из пространственных координат (для определенности z, но процедура релятивистски ковариантна) выделена и начальное значение волновой функции задается на характеристиках $\xi = ct - z = 0$ и $\eta = ct + z = 0$ [4], а затем ищется решение во времени-подобной области, в двумерном подпространстве Минковского $\mathscr{M}^2_{(+)}$, где $\xi\eta = c^2t^2 - z^2 \geq 0$, или в пространственно-подобной области $\mathscr{M}^2_{(-)}$, где $\xi\eta = c^2t^2 - z^2 \leq 0$. Существенно то, что это единственная постановка задачи, которая распределяет решения волнового уравнения по областям двумерного (четырехмерного) пространства Минковского, что предотвращает нарушение теоремы единственности, например, появление двух функций Грина в электродинамике [5].

Обобщение одномерной в своей классической постановке задачи Гурса на случай трехмерного волнового уравнения и сделано в работах [1–3, 6].

Применим этот метод исследования к поведению релятивистской частицы в статическом внешнем скалярном поле, добавленном к квадрату массы μ по правилу

$$\mu^2 \to \mu^2 + \mu V/c^2, \tag{1}$$

где V — скалярное внешнее поле. Такие поля рассматривались Шиффом [7], Бете [8], Коккедэ [9], Мигдалом [10] и многими другими. По-видимому, соотношение (1) для неэлектромагнитных взаимодействий является таким же фундаментальным, как и принцип минимальности $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ в электромагнитных взаимодействиях.

Если внешнее скалярное поле V является статическим и сферически-симметричным ($V = V(|\mathbf{r}|)$) и имеет характер притяжения, то уравнение Клейна–Фока–Гордона (КФГ) может иметь в постановке задачи Коши нарастающие со временем (неустойчивые) решения. Кратко воспроизведем результаты этой задачи, подробно рассмотренные в [10, гл. 11, с. 103]. Уравнение КФГ для статического поля $V(r)$ имеет вид

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \Delta - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 - \frac{\mu V(r)}{\hbar^2}\right) \phi(\mathbf{r}) = 0, \tag{2}$$

где полная волновая функция $\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t)\phi(\mathbf{r})$.

Умножая (2) на ϕ^* и интегрируя по трехмерному объему, получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\overline{p^2}}{\hbar^2} + \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 + \frac{\mu \overline{V}}{\hbar^2}, \tag{3}$$

где

$$\overline{p^2} = \int (d\mathbf{r}) |\nabla\phi|^2,$$

$\overline{V}$ — среднее значение потенциала. Пусть поле $V(r)$ имеет характер ямы глубиной $(-V_0)$, тогда (3) запишется в виде

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\overline{p^2}}{\hbar^2} + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\mu V_0}{\hbar^2}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что существуют такие параметры ямы, при которых $\omega^2 = 0$ (это явление в [10] и называется конденсацией бозе-частиц), а при дальнейшем углублении ямы величина ω^2 становится отрицательной. Последнее и означает существование нарастающих со временем (неустойчивых) решений

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(|\omega| t)\phi(\mathbf{r}).$$

Если рассматривать так называемое винтовое движение (по оси z частица движется свободно, а в плоскости, перпендикулярной оси z, на нее действует аксиально-симметричное поле $V = V(x_T)$, где $x_T = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$), то решение уравнения КФГ в постановке задачи Коши будет следующим:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t + i p_z z/\hbar)\phi(x_1, x_2). \tag{5}$$

Такими же рассуждениями можно показать, что существуют параметры двумерной ямы (критические параметры), при которых квадрат частоты ω^2 проходит через нуль (наступает бозе-конденсация), затем ω^2 становится отрицательной и возникают неустойчивые решения.

Покажем теперь, как выглядит это же винтовое движение в нашей задаче. В отличие от решений (5) в задаче Гурса волновая функция уравнения КФГ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_T - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 - \frac{\mu V}{\hbar^2}\right) \psi(\mathbf{x}_T, z, t) = 0, \tag{6}$$

где введено сокращение $\Delta_T = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, является собственной функцией одномерного волнового оператора

$$\hat{L} = \partial^2/\partial z^2 - \partial^2/c^2\partial t^2 = -4\partial^2/\partial\xi\partial\eta,$$

так что

$$\hat{L}\psi = Q^2\psi, \quad \psi|_{\xi=0,\eta=0} = \phi(\mathbf{x}_T). \tag{7}$$

Фундаментальное решение (функция Римана) одномерного волнового уравнения

$$(4\partial^2/\partial\xi\partial\eta + Q^2)\psi(\xi,\eta) = 0$$

хорошо известно, это

$$\psi(\xi,\eta) = J_0\left(\sqrt{\xi\eta Q^2}\right) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)Q^2}\right), \tag{8}$$

где $J_0(\tau)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а $\xi\eta Q^2 \geq 0$.

Рассматривая Q^2 как эллиптический оператор, не зависящий от характеристических переменных (ξ,η) или (z,ct), т.е.

$$Q^2 = (\mu c/\hbar)^2 - \Delta_T + \mu V(x_T)/\hbar^2,$$

запишем решение уравнения КФГ в операторной форме [3]

$$\psi(\mathbf{x}_T, z, t) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)(\mu^2c^2/\hbar^2 - \Delta_T + \mu V/\hbar^2)}\right)|0\rangle, \tag{9}$$

где $|0\rangle = \psi|_{ct-z=0,ct+z=0} = \phi(x_T)$ — начальное значение волновой функции на характеристиках $\xi = ct - z = 0$ и $\eta = ct + z = 0$.

В данной работе мы рассмотрим аксиальный аналог проблемы Кеплера [11] и двумерный осцилляторный потенциал. На примере этих потенциалов, допускающих аналитическое решение, можно рассмотреть особенности энергетического спектра, возникающие в характеристической задаче (задаче Гурса).

2. АКСИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ПРОБЛЕМЫ КЕПЛЕРА

Релятивистская частица движется в аксиально-симметричном поле $V(x_T) = -g^2/x_T$, где константа g — свободный параметр, определяющий взаимодействие частицы с внешним скалярным полем. Параметр Q^2 в данном случае имеет вид

$$Q^2 = \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 - \Delta_T - \frac{\mu g^2}{x_T\hbar^2},$$

а собственные функции поперечного движения удовлетворяют уравнению

$$(\Delta_T + \beta k_0/x_T)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi) = (\beta k_0/N)^2\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi), \tag{10}$$

где введены обозначения $k_0 = \mu c/\hbar$, $\beta = g^2/\hbar c$ — константа взаимодействия, n_r — радиальное квантовое число, m — азимутальное квантовое число, n — главное квантовое число, $N = 2n + 1$, $n = n_r + |m|$, $x_T = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, φ — полярный угол.

Подставляя (10) в (9), получаем решение уравнения КФГ в виде

$$\psi(x_T, z, t) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)k_0^2(1 - \beta^2/N^2)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi). \tag{11}$$

Константу взаимодействия $\beta = g^2/\hbar c$ представим в форме $\beta = 2n_C + 1$, где n_C назовем конденсатным квантовым числом, тогда (11) примет вид, удобный для исследования на устойчивость:

$$\psi(x_T, z, t) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)(\mu_n c/\hbar)^2(n - n_C)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T, \varphi), \tag{12}$$

где появляется всегда положительная константа

$$\mu_n^2 = \mu^2 \frac{n + n_C + 1}{(n + 1/2)^2}.$$

Если $g^2/\hbar c \geq 1$ (реализуется сильная связь), то в конечном числе появляются нижние уровни, удовлетворяющие неравенству $n - n_C < 0$. Чтобы не допустить неустойчивости, надо перейти в подпространство $\mathscr{M}^2_{(-)}$ (где $z^2 - c^2t^2 \geq 0$) — устойчивые решения «переселяются» туда.

Таким образом, решение (12) в случае сильной связи состоит из двух частей:

$$\psi = \sum_{n=0}^{[n_C]} \psi^{(-)} + \sum_{n=[n_C]+1}^{\infty} \psi^{(+)}, \tag{13}$$

где $[n_C]$ — целая часть конденсатного числа n_C, а также

$$\psi^{(-)} = J_0\left(\sqrt{(z^2 - c^2t^2)(\mu_n c/\hbar)^2(n_C - n)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T, \varphi), \tag{14}$$

$$\psi^{(+)} = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)(\mu_n c/\hbar)^2(n - n_C)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T, \varphi), \tag{15}$$

$$\phi_{n_r,m} = C_{nm} e^{im\varphi - k_n x_T} F(-n_r, 2|m| + 1, 2k_n x_T) x_T^{|m|}, \tag{16}$$

$$k_n = k_0(n_C + 1/2)/(n + 1/2).$$

В решении (14) время удовлетворяет неравенству $|t| \leq |z|/c$, а в решении (15) — неравенству $|t| \geq |z|/c$.

При слабой связи ($g^2/\hbar c < 1$) конденсатное квантовое число отрицательно и состояния в подпространстве $\mathscr{M}^2_{(-)}$ отсутствуют.

Выясним теперь, как связаны решения (14), (15) в характеристической задаче с плоскими волнами задачи Коши. Для этого воспользуемся фурье-представлением бесселевых функций J_0. В пространстве $\mathscr{M}^2_{(+)}$

$$J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)(\mu_n c/\hbar)^2(n - n_C)}\right) = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{\exp(ip_z z/\hbar)\sin(\mathscr{E}_n(p_z)|t|/\hbar)}{\mathscr{E}_n(p_z)}, \tag{17}$$

где $\mathscr{E}_n(p_z)$ — энергетический спектр частицы (античастицы), который равен

$$\mathscr{E}_n(p_z) = \sqrt{c^2p_z^2 + \mu_n^2 c^4(n - n_C)}, \quad n \geq [n_C] + 1. \tag{18}$$

В пространстве $\mathscr{M}^2_{(-)}$

$$J_0\left(\sqrt{(z^2 - c^2t^2)(\mu_n c/\hbar)^2(n_C - n)}\right) = \frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} d\mathscr{E} \frac{\exp(-i\mathscr{E}t/\hbar)\sin(p_z(\mathscr{E})|z|/\hbar)}{p_z(\mathscr{E})}, \tag{19}$$

где

$$p_z(\mathscr{E}) = p_{z,n}(\mathscr{E}) = \frac{1}{c}\sqrt{\mathscr{E}^2 + \mu_n^2 c^4 (n_C - n)}, \quad 0 \le n \le [n_C]. \tag{20}$$

Из соотношений (18) и (20) видно, что собственные значения одномерного волнового оператора $\hat{L}$ меняют знак при переходе из $\mathscr{M}^2_{(+)}$ в $\mathscr{M}^2_{(-)}$ и обратно.

Действительно, из (18) следует, что $\mathscr{E}^2 - c^2 p_z^2 \ge 0$, а из (20), что $\mathscr{E}^2 - c^2 p_z^2 \le 0$. Граничный случай $\mathscr{E}^2 = c^2 p_z^2$ соответствует появлению конденсата в характеристической задаче.

Из фурье-представления (17) следует, что состояние частицы (античастицы) в $\mathscr{M}^2_{(+)}$ является суперпозицией бегущих вдоль оси z плоских волн с энергией, определяемой (18); групповая скорость этого пакета

$$v_z = \frac{d\mathscr{E}_n}{dp_z} = \frac{c^2 p_z}{\mathscr{E}_n} = \frac{c^2 p_z^2}{\sqrt{c^2 p_z^2 + \mu_n^2 c^4 (n - n_C)}} < c. \tag{21}$$

В пространстве $\mathscr{M}^2_{(-)}$ — это суперпозиция стоячих волн с групповой скоростью

$$v_z = \frac{d\mathscr{E}}{dp_z} = \frac{c^2 p_z}{\mathscr{E}_n} = \frac{c^2 p_z^2}{\sqrt{c^2 p_z^2 - \mu_n^2 c^4 (n_C - n)}} > c. \tag{22}$$

Наиболее интересен предел, когда $n_C \to n \mp 0$. В этом случае внешнее скалярное поле, по терминологии А. Мигдала [10], «съедает» массу частицы. Частица без массы движется вдоль оси z со скоростью $v_z = c \mp 0$. Важно отметить, что скомпенсировать массу частицы может именно сильное скалярное поле притяжения. Постоянное магнитное поле или поле плоской электромагнитной волны увеличивает массу частицы. Например, уровни энергии релятивистской частицы в постоянном магнитном поле

$$\mathscr{E}_n = \sqrt{c^2 p_z^2 + \mu_n^2 c^4}, \quad \mu_n^2 = \mu^2 \left(1 + \frac{H}{H_S}(2n+1)\right),$$

где $H_S = |e|\hbar/\mu^2 c^3$ — постоянное швингеровское поле. Они всегда зависят от массы μ.

Возможно, что постоянное электрическое поле может также скомпенсировать массу частицы. В постановке задачи Коши этот вопрос обсуждался в [12–14] и многих других работах. В характеристической задаче этот вопрос подлежит отдельному исследованию [15].

Минимальное значение конденсатного квантового числа n_C для волновой функции в $\mathscr{M}^2_{(+)}$, при котором наступает эффект компенсации массы частицы, наблюдается при константе связи $\beta = g^2/\hbar c \approx 3$, т.е. при $n_C = 1 - 0$. В этом случае в пространстве $\mathscr{M}^2_{(-)}$ находится одно основное состояние с $n = 0$, волновая функция которого имеет вид

$$\psi_0^{(-)} = C_0 \exp(-3k_0 x_T) J_0 \left(\sqrt{8k_0^2(z^2 - c^2 t^2)}\right). \tag{23}$$

При подстановке (23) в уравнение КФГ следует принять во внимание свойство бесселевых функций J_0, а именно

$$\hat{L} J_0 \left(\sqrt{8k_0^2(z^2 - c^2 t^2)}\right) = -8k_0^2 J_0 \left(\sqrt{8k_0^2(z^2 - c^2 t^2)}\right). \tag{24}$$

Состояния с $n \geq 1$ принадлежат подпространству $\mathscr{M}^2_{(+)}$, и в гармонике с $n = 1$ масса компенсируется. Это — конденсатное состояние. Волновые функции конденсатного состояния трехкратно вырождены (кратность вырождения равна $2n + 1$):

$$\psi_1^{(+)} = C_{1,0}\exp(-k_0 x_T)(1 - 2k_0 x_T) + C_{1,\pm 1}\exp(\pm i\varphi - k_0 x_T)x_T. \tag{25}$$

В рамках задачи Гурса удобно классифицировать состояния не по энергии, а по собственным значениям характеристического оператора $\hat{L}$, т. е. по разности

$$\mathscr{E}^2 - c^2 p_z^2 = \mathscr{E}_T^2.$$

Для $n_C = 1 - 0$ имеем следующий спектр:

$$\mathscr{E}^2_{T,0} = -8\mu^2 c^4, \quad \mathscr{E}^2_{T,1} = 0, \quad \mathscr{E}^2_{T,2} = (16/25)\mu^2 c^4, \ldots, \quad \mathscr{E}^2_{T,\infty} = \mu^2 c^4.$$

Возможен спонтанный переход в возбужденное конденсатное состояние, если произойдет потеря импульса поступательного движения.

Если $n_C = n + 0$ $(n \geq 0)$, то эффект компенсации массы наблюдается в $\mathscr{M}^2_{(-)}$ при меньшем значении конденсатного квантового числа n_C, при $g^2/\hbar c \approx 1$, т. е. при $n_C = +0$. Волновая функция основного конденсатного состояния имеет вид

$$\psi_0^{(-)} = C_{0,0}\exp(-k_0 x_T). \tag{26}$$

Состояние с $n = 1$ принадлежит $\mathscr{M}^2_{(+)}$. Волновая функция этого состояния

$$\psi_1^{(+)} = \exp(-k_0 x_T/3)\left(C_{1,0}\left(1 - (2/3)k_0 x_T\right) + C_{1,\pm 1} x_T \exp(\pm i\varphi)\right) \times$$
$$\times J_0\left(\sqrt{(8k_0^2/9)(c^2t^2 - z^2)}\right). \tag{27}$$

При подстановке решения (27) в уравнение КФГ снова принимаем во внимание свойства бесселевых функций (ср. с (24))

$$\hat{L} J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)\frac{8}{9}k_0^2}\right) = \frac{8}{9}k_0^2 J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)\frac{8}{9}k_0^2}\right). \tag{28}$$

Энергетический спектр начинается с нуля:

$$\mathscr{E}^2_{T,0} = 0, \quad \mathscr{E}^2_{T,1} = (8/9)\mu^2 c^4, \ldots, \quad \mathscr{E}^2_{T,\infty} = \mu^2 c^4.$$

Потеря конденсатного состояния может наступить, если скорость движения по z уменьшится до

$$v_z = \frac{p_z c^2}{\sqrt{c^2 p_z^2 + (8/9)\mu^2 c^4}} \approx c - \frac{4}{9}\frac{\mu^2 c^2}{p_z^2} < c.$$

Поскольку конденсатное и неконденсатное состояния принадлежат разным подпространствам $\mathscr{M}^2$, а следовательно и $\mathscr{M}^4$, надо думать, что конденсатное состояние (даже возбужденное) является устойчивым. Например, чтобы наступило конденсатное состояние для $n_C = 1 - 0$, частица должна потерять импульс поступательного движения

$$p_z = \frac{1}{c}\sqrt{\mathscr{E}^2 + 8\mu^2 c^4} \geq 2\sqrt{2}\,\mu c.$$

3. АКСИАЛЬНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ (ПЛОСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР)

Пусть статическое скалярное поле является плоским осцилляторным потенциалом

$$V(x_T) = -V_0 + \mu\Omega^2 x_T^2/4, \tag{29}$$

где глубина V_0 и частота осциллятора Ω являются свободными параметрами задачи. Волновая функция поперечного движения $\phi(\mathbf{x}_T)$ будет собственной функцией осцилляторного уравнения

$$\left(\Delta_T - \mu^2\Omega^2 x_T^2/4\hbar^2\right)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi) = -(\mu\Omega/\hbar)(n+1)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi), \tag{30}$$

где $n = 2n_r + |m|$ — главное квантовое число.

Решение, согласно (9), будет

$$\psi(x_T,z,t) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)\left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\left(1 + \frac{\hbar\Omega(n+1) - V_0}{\mu c^2}\right)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi), \tag{31}$$

где

$$\phi_{n_r,m} = C_{n,m}\exp\left(im\varphi - \frac{\mu\Omega x_T^2}{4\hbar}\right)F\left(-n_r, |m|+1, \frac{\mu\Omega x_T^2}{2\hbar}\right)x_T^{|m|}. \tag{32}$$

Снова удобно ввести конденсатное квантовое число n_C, полагая V_0 в виде

$$V_0 = \mu c^2 + \hbar\Omega(n_C + 1), \tag{33}$$

и тогда (31) примет вид, удобный для исследования на устойчивость:

$$\psi(x_T,z,t) = J_0\left(\sqrt{(c^2t^2 - z^2)(\mu_{eff}c/\hbar)^2(n - n_C)}\right)\phi_{n_r,m}(x_T,\varphi), \tag{34}$$

где эффективная масса $\mu_{eff}^2 = \mu\hbar\Omega/c^2$ зависит от частоты Ω внешнего поля.

При $n \ge [n_C] + 1$ энергетический спектр в $\mathscr{M}_{(+)}^2$ имеет вид

$$\mathscr{E}_n(p_z) = \sqrt{c^2p_z^2 + \mu_{eff}^2c^4(n - n_C)},$$

а при $0 \le n \le [n_C]$ волновая функция принадлежит подпространству $\mathscr{M}_{(-)}^2$ с квантованным вдоль оси z импульсом

$$p_{z,n} = \frac{1}{c}\sqrt{\mathscr{E}^2 + \mu_{eff}^2c^4(n_C - n)}.$$

Условие отсутствия связанных состояний в $\mathscr{M}_{(-)}^2$ следующее:

$$V_0 < \mu c^2 + \hbar\Omega.$$

Так как энергетический спектр эквидистантный, то переход из $\mathscr{M}_{(+)}^2$ в $\mathscr{M}_{(-)}^2$ и обратно связан с приобретением или потерей импульса вдоль оси z ($n_C = n \pm 0$):

$$p_z = \frac{1}{c}\sqrt{\mathscr{E}_{n\mp1}^2 \pm \mu c^2\hbar\Omega}. \tag{35}$$

Теперь можно сделать некоторый общий вывод. Для того чтобы существовал чисто релятивистский эффект компенсации массы внешним полем притяжения, необходимо, чтобы константа связи, а точнее, конденсатное квантовое число n_C принимало близкие к целым положительным числам значения. Тогда существует конечное число связанных состояний в $\mathscr{M}^2_{(-)}$. Именно эти состояния, рассмотренные в рамках задачи Коши и приводят к неустойчивым, нарастающим со временем волновым функциям.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема конденсатных состояний рассмотрена, вместо обычной задачи Коши, в рамках характеристической задачи. Недостаток задачи Коши в том, что начальные условия задаются в трехмерном пространстве при $t = 0$, т. е. на гиперплоскости, лежащей в пространстве сверхсветовых скоростей, а решение ищется внутри светового конуса.

В работе исследованы две простые точно решаемые модели. Первая — это аксиальная кеплерова проблема с переменной константой связи (один свободный параметр). Более сложная задача с двумя свободными параметрами (глубина и ширина ямы) — это двумерный осциллятор. Показано, что при определенном значении константы связи возникает конечное число связанных состояний в пространстве $\mathscr{M}^2_{(-)}$, где скорости сверхсветовые. Эти состояния соответствуют появлению неустойчивых решений в задаче Коши при $\mathscr{E}^2 < 0$. С этим связана необходимость учета взаимодействия бозонов и перехода к нелинейному уравнению, которое приходится решать численно [10]. Задача Гурса снимает эту проблему.

В задаче Гурса энергетический спектр в $\mathscr{M}^2_{(-)}$ (см. (18), (20)) не допускает состояний с $\mathscr{E}^2 < 0$, хотя состояние с $\mathscr{E} = 0$ возможно. Поэтому суперпозиция плоских волн (см. (19)) всегда устойчива. Энергетический же спектр в $\mathscr{M}^2_{(+)}$ начинается с числа $[n_C] + 1$; эти состояния устойчивы в обоих подходах. Переход из $\mathscr{M}^2_{(-)}$ в $\mathscr{M}^2_{(+)}$ возможен, если есть конденсатное безмассовое состояние, но тогда должна произойти потеря импульса p_z, достаточная для перехода между гиперболами разных секторов в пространстве $(\mathscr{E}, p_z)$.

Процесс переселения уровней связан с повышением константы взаимодействия, а поэтому напоминает неустойчивость типа явления K-захвата электрона в атомах, где $Z > 137$. В этом случае также, при $Z = 137$, скорость электрона в низшем состоянии становится равной скорости света.

Литература

1. А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко, Укр. физ. журн. **27**, 1602 (1982).
2. А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко, Диф. уравн. **20**, 302 (1984).
3. A. A. Borghardt and D. Ya. Karpenko, J. Math. Phys. **33**, 233 (1996).
4. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1964).
5. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1978).
6. P. Hillion, J. Math. Phys. **31**, 1939 (1990).
7. L. Schiff, H. Snyder, and J. Weinberg, Phys. Rev. **57**, 315 (1940).
8. Г. Бете, *Квантовая механика*, Мир, Москва (1965).

9. Я. Коккедэ, *Теория кварков*, Мир, Москва (1971).
10. А. Б. Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях*, Наука, Москва (1978).
11. А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко, Укр. физ. журн. **30**, 1564 (1985).
12. В. Д. Мур, В. С. Попов, ТМФ **27**, 81 (1976).
13. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, Москва (1980).
14. В. П. Олейник, Укр. физ. журн. **18**, 105 (1979).
15. А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко, Укр. физ. журн. **27**, 1572 (1982).