

ДИФФУЗИЯ И УСИЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ СО СПИРАЛЬНОСТЬЮ

Н. А. Силантьев

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук
196140, Санкт-Петербург, Россия
Instituto Nacional de Astrofisica, Optica y Electronica, Puebla, Mexico

Поступила в редакцию 15 апреля 1997 г.

Рассмотрена связь точных формул для коэффициентов турбулентной диффузии D_T и альфа-эффекта α_T для магнитного поля в лагранжевом и эйлеровом представлениях. Показано, что квадратичный по α_T член в коэффициенте диффузии, выведенном Моффатом и Крайчнаном, ошибочен и должен быть отброшен. Впервые дано численное решение нелинейного уравнения (*DIA*-equation) для тензора Грина, описывающего перенос магнитного поля, для случая несжимаемой, однородной, изотропной и стационарной турбулентности, обладающей спиральностью. На основе этих решений вычислены стационарные коэффициенты D_T и α_T для различных значений параметров $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0$, $\alpha = H_0/u_0^2\rho_0$, τ_0/τ_1 , R_0/R_1 , где u_0 , τ_0 и R_0 — характерные скорость, время жизни и масштаб турбулентных пульсаций, а H_0 , τ_1 и R_1 — аналогичные величины, описывающие спиральность среды $h(1, 2) = \langle \mathbf{u}(1) \text{rot } \mathbf{u}(2) \rangle$, параметр α характеризует степень спиральности. Сравнение *DIA*-значений D_T и α_T с самосогласованными значениями этих величин, вычисленных с использованием тензора Грина в диффузионном приближении, показало их качественное совпадение. Показано, что для всех рассмотренных типов турбулентности коэффициент турбулентной диффузии всегда положителен. Даны нестационарные значения $D_T(t)$ и $\alpha_T(t)$, вычисленные самосогласованным способом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема переноса и усиления магнитного поля в турбулентных проводящих средах изучается в магнитной гидродинамике, астрофизике и геофизике уже много лет. Подробный обзор работ по различным аспектам этой проблемы содержится в известных монографиях [1–4]. Очевидная сложность проблемы, обусловленная векторным характером магнитного поля, привела к использованию при вычислениях тех или иных правдоподобных предположений относительно поведения усредненного магнитного поля $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$. В частности, широкое использование получило диффузионное приближение, когда предполагается, что $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$ — достаточно гладкая функция на характерных масштабах R_0 и временах τ_0 корреляции поля турбулентных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ проводящей среды. Наличие средней ненулевой спиральности $H_0 = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \neq 0$ приводит к усилению первоначально имевшегося магнитного поля (так называемый α -эффект). Ненулевая спиральность турбулентных движений может быть вызвана наличием общего вращательного движения проводящей среды (вращение Земли, Солнца и т. д.). Кинематическая постановка задачи, когда магнитное поле считается достаточно малым, не влияющим на известное турбулентное движение жидкости или газа, в турбулентной среде со спиральностью пригодна лишь в течение того времени, пока энергия растущего магнитного поля не сравняется с кинетической энергией движущихся элементов газа.

В диффузионном приближении эволюция $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$ в изотропной турбулентной среде описывается известным уравнением:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2 \right) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \text{rot } \alpha_T(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle - \text{rot } D_T(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (1)$$

где $D_m = c^2/4\pi\sigma$ — молекулярный коэффициент диффузии, σ — проводимость среды, D_T — коэффициент турбулентной диффузии, α_T — коэффициент, описывающий усиление $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$ за счет действия α -эффекта. В приложениях обычно используются оценки $D_T \cong u_0 R_0$ и $\alpha_T \cong u_0$, которые оставляют большой произвол в конкретных расчетах эволюции среднего магнитного поля. В этой связи представляют интерес попытки более строгого вычисления D_T и α_T при заданных ансамблях турбулентной скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в эйлеровом представлении. По-видимому, первое точное значение $D_T = u_0 \tau_0/3$ было получено в работе [5] для короткокоррелированного во времени поля скоростей (коррелятор $\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle \propto \delta(t-t')$). Более общее рассмотрение проблемы вычисления коэффициента D_T , с учетом также и сжимаемости среды, представлено в работе [6].

Обычно коэффициент $D_m \ll D_T$ и может не учитываться при нахождении D_T и α_T . В этом случае легко получить точные выражения для D_T и α_T , используя лагранжево представление поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$. Здесь \mathbf{a} — координата жидкой частицы в начальный момент времени $t = 0$. Уравнения переноса скалярной примеси с концентрацией $n(\mathbf{r}, t) = \langle n \rangle + \mathbf{n}'$ ($\langle \mathbf{n}' \rangle = 0$) и уравнение для индукции магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'$ ($\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$) в случае $D_m = 0$ принимают вид

$$\partial n(\mathbf{r}, t)/\partial t = \nabla [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r}, t)], \quad (2)$$

$$\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\partial t = \text{rot} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

Решение этих уравнений при заданном лагранжевом поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ имеет вид [1, 4]

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t))/D(\mathbf{a}, t) \equiv n_0(\mathbf{a})/D(\mathbf{a}, t), \quad (4)$$

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} B_j^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)) \equiv \frac{\partial x_i}{\partial a_j} B_j^{(0)}(\mathbf{a}), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{X}(\mathbf{a}, t) \equiv \mathbf{a} + \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau), \quad \partial \mathbf{r}/\partial t \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{a}, t), \quad (6)$$

$$D_{ij}(\mathbf{a}, t) = \partial x_i / \partial a_j, \quad D(\mathbf{a}, t) = \det D_{ij}, \quad \dot{D}_{ij} \equiv \partial D_{ij} / \partial t, \quad \dot{D}/D = \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t),$$

$$D_{sp} \dot{D}_{pq}^{-1} = - \frac{\partial v_s}{\partial a_q}, \quad d\mathbf{r} = D(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a}. \quad (7)$$

Как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Величины $n_0(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{a})$ означают концентрацию и магнитное поле в начальный момент времени. Уравнение (4) выражает собой закон сохранения числа примесных частиц

$\langle n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = n_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a}$ при их переносе вдоль трубки тока переменного сечения. Выражение (5) описывает изменение вмороженного в элемент жидкости магнитного поля в несжимаемой среде за счет конвективного переноса, а также деформаций и вращений элемента жидкости или газа. Задание случайного поля лагранжевых скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ определяет ансамбль реализаций турбулентных течений, по которому надо усреднить решения (4) и (5), чтобы получить уравнения для средних $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle$ и $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$. При фиксированных \mathbf{r} и t величина $\mathbf{a} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ является случайной величиной и задача сводится к усреднению известных функций $n_0(\mathbf{a})$ и $\mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{a})$ от случайного аргумента \mathbf{a} со случайными же весовыми множителями $1/D(\mathbf{a}, t)$ и $D_{ij}(\mathbf{a}, t)$. Переход к диффузионному приближению предполагает гладкость $n_0(\mathbf{a})$ и $\mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{a})$ на характерных длинах $R_0 \cong \sqrt{\langle X^2 \rangle}$ и использование разложения Тейлора в ряд по $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ [7, 8]. В результате получаем точные выражения для D_T и α_T . Для скалярного примесного поля в изотропной среде имеем

$$D_T = \frac{1}{3} \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) / D(\mathbf{a}, t) \rangle, \tag{8}$$

где скобка $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций скоростей. Для несжимаемой среды ($D(\mathbf{a}, t) \equiv 1$) формула (8) была получена еще в 1921 году Тейлором [9]. Формулы для D_T и α_T для магнитного поля были получены гораздо позже [7, 8]:

$$D_T(t) = \frac{1}{3} \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \rangle + \frac{1}{6} \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \left[\langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \frac{\partial v_i(\mathbf{a}, \tau')}{\partial a_i} \rangle - \langle v_i(\mathbf{a}, t) \frac{\partial}{\partial a_i} \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau') \rangle \right] + \alpha_T(t) \int_0^t d\tau \alpha_T(\tau), \tag{9}$$

$$\alpha_T(t) = -\frac{1}{3} e_{ijm} \int_0^t d\tau \langle v_i(\mathbf{a}, t) \frac{\partial v_j(\mathbf{a}, \tau)}{\partial a_m} \rangle \equiv -\frac{1}{3} \int_0^t d\tau \langle \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \text{rot}_a \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \rangle. \tag{10}$$

Здесь $e_{ijn} = -e_{jin} = -e_{inj}$ — единичный псевдотензор ($e_{123} = 1$ и т.д.). Первый член в (9) совпадает с D_T для скалярной примеси и обусловлен чисто конвективным переносом примеси вместе с элементом жидкости или газа. Второй член в (9) определяет вклад в диффузию деформаций и вращений элемента среды. Особо следует сказать о смысле третьего члена в (9), пропорционального α_T^2 . Этот член возникает вследствие учета увеличения среднего магнитного поля за счет действия α -эффекта. При его выводе использовалось решение уравнения (1) с отброшенными диффузионными членами (члены с D_m и D_T). Само это приближенное решение пригодно лишь при малых временах, когда $\alpha_T \propto t$ и $D_T \propto t$, т.е. член с α_T^2 дает пренебрежимо малую поправку $\propto t^3$. Далее мы покажем, что при больших временах этот член вообще не существует. Формальное использование этого члена при $t \rightarrow \infty$ приводит к неограниченному увеличению D_T ($D_T \propto \alpha^2 t \rightarrow \infty$), т.е. к абсурдному с физической точки зрения результату.

Заметим также, что Паркер [4], усредняя (5), пренебрегал зависимостью $\mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{a})$ от $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ и получил для изотропной среды, где $\langle \partial x_i / \partial a_j \rangle = \delta_{ij}$, соотношение $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{a}) \rangle$, полностью аналогичное выражению $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle n_0(\mathbf{a}) \rangle$ для скалярной примеси в несжимаемой среде. Это привело его к неверному заключению, что D_T для магнитного поля в изотропной среде должно точно совпадать с D_T для скалярной примеси. Из

общих соображений можно ожидать, что усреднение более сложных выражений, входящих во второй член в (9), даст меньший вклад в D_T , чем первый конвективный член. То есть можно ожидать, что в основном коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля (в отсутствие спиральности среды) действительно близок к D_T скалярной примеси.

Формулы (9) и (10) были использованы Крайчнаном [8, 10] для вычисления $D_T(t)$ и $\alpha_T(t)$ для двух моделей турбулентности с узким спектром энергии. Процесс численного моделирования траекторий жидких частиц доводился до времен $t = 4t_0$, где $t_0 = R_0/u_0 = 1/u_0\rho_0$ — время обращения жидкого вихря. Вычисления подтвердили близость D_T к коэффициенту турбулентности диффузии скалярной примеси для значений параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 = u_0\tau_0\rho_0 \leq 1$. Для случая «замороженной» и спиральной турбулентности, когда $\tau_0 \gg t_0$ ($\xi_0 = \tau_0/t_0 \rightarrow \infty$), начиная с $t \cong 3t_0$ значения D_T оказались отрицательными. Наши вычисления (см. ниже), проведенные в эйлеровом представлении, всегда приводят к положительным D_T . Случай $\xi_0 \rightarrow \infty$ наиболее труден для численного моделирования, и видимо поэтому в [10] получился этот неверный результат.

Формулы (9) и (10) требуют знания лагранжевых скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ в турбулентной среде, в то время как обычно измеряются корреляторы компонент эйлеровых скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Переход от $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ к $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ связан с решением системы дифференциальных уравнений, и до сих пор в общем случае эта проблема не решена. Поэтому необходимо иметь точные формулы для вычисления D_T и α_T в эйлеровом представлении. Впервые такие формулы для стационарной, однородной и изотропной турбулентности были получены в работах [11, 12].

Для коэффициента турбулентной диффузии D_T скалярной примеси в сжимаемой среде имеем [12]

$$D_T(t_1) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{R} \int_0^{t_1} dt_2 [\langle u_i(1)G(1,2)u_i(2) \rangle - \langle \mathbf{R}\mathbf{u}(1)G(1,2)\text{div}\mathbf{u}(2) \rangle]. \quad (11)$$

Здесь и далее мы будем использовать удобные обозначения:

$$f(1) = f(\mathbf{r}_1, t_1), \quad f(1-2) = f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2), \quad dn = d\mathbf{r}_n dt_p, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \tau = t_1 - t_2$$

и т.д. $G(1, \dot{2}) = G(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ — функция Грина уравнения (3). Ее формальное выражение в лагранжевых обозначениях имеет вид

$$G(1, 2) = \frac{D(\mathbf{a}, t_2)}{D(\mathbf{a}, t_1)} \delta \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \int_{t_2}^{t_1} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \right). \quad (12)$$

Подставляя это выражение, а также соотношение $\text{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \dot{D}(\mathbf{a}, t)/D(\mathbf{a}, t)$ в формулу (11), вновь получаем формулу (8) для коэффициента турбулентной диффузии D_T скалярной примеси в сжимаемой среде.

Выражения для D_T и α_T в эйлеровом представлении выведены в работе [12]:

$$D_T(t_1) = \frac{1}{6} \int d\mathbf{R} \int_0^{t_1} dt_2 [\langle u_i(1)G_{ss}(1,2)u_i(2) \rangle - \langle u_s(1)G_{is}(1,2)u_i(2) \rangle + \\ + \langle R_s u_n(1)G_{in}(1,2)(\nabla_i u_n(2)) \rangle - \langle R_s u_i(1)G_{sn}(1,2)(\nabla_i u_n(2)) \rangle], \quad (13)$$

$$\alpha_T(t_1) = e_{ipt} \frac{1}{3} \int d\mathbf{R} \int_0^{t_1} dt_2 \langle u_i(1) G_{pn}(1, 2) (\nabla_i u_n(2)) \rangle. \quad (14)$$

Тензорная функция Грина уравнения индукции (4) может быть представлена в виде

$$G_{ij}(1, 2) = D_{is}(\mathbf{a}, t_1) D_{sj}^{-1}(\mathbf{a}, t_2) \delta \left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \int_{t_2}^{t_1} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{a}, \tau) \right]. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в (13) и (14), а также используя при этом связь

$$D_{sp}^{-1}(\mathbf{a}, t) \partial v_p(\mathbf{a}, t) / \partial a_j = -\dot{D}_{sj}^{-1}(\mathbf{a}, t)$$

(см. (7)), вновь получаем формулу (9) (но без последнего члена!) и формулу (10).

Таким образом, чтобы вычислить D_T и α_T для ансамбля эйлеровых скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, надо знать функцию Грина $G_{ij}(1, 2)$ в эйлеровом представлении и ее корреляторы с компонентами скорости. Тензор $G_{ij}(1, 2)$ является функционалом от $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и, в отличие от лагранжева представления (15), не может быть найден в явном аналитическом виде. В работах [11, 12] предложена процедура перенормировки интегрального уравнения для G_{ij} . Подстановка итераций перенормированного уравнения для G_{ij} в основные формулы (13) и (14) приводит к асимптотически хорошо сходящимся рядам для D_T и α_T . Усреднение ряда итераций для правого члена в уравнении индукции (4) приводит к иерархии нелинейных уравнений непосредственно для усредненной функции Грина $\langle G_{ij}(1, 2) \rangle \equiv g_{ij}(1 - 2)H(t_1 - t_2)$ (здесь $H(\tau) = 1$ для $\tau > 0$ и $H(\tau) = 0$ для $\tau < 0$). Первое из уравнений иерархии, имеющее квадратичную нелинейность, получило в литературе название уравнения в Direct Interaction Approximation — *DIA-equation*. Для скалярной примеси *DIA*-уравнение было предложено в работе [13]. Исследование скалярного *DIA*-уравнения (см. [14–17]) показало, что оно позволяет вычислить D_T для всех значений параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0$ ($0 \leq \xi_0 < \infty$). Отличие *DIA*-значения D_T от точного значения монотонно растет от 0% для $\xi_0 \rightarrow 0$ до $\cong 10\%$ при $\xi_0 \rightarrow \infty$ (случай замороженной турбулентности). *DIA*-уравнение для тензора $\langle G_{ij}(1, 2) \rangle$ в изотропной среде сводится к системе двух нелинейных уравнений. Крайчнан [8] пессимистически оценивал возможность численного решения этой нелинейной системы.

В данной работе мы впервые численно решим эту систему уравнений и получим *DIA*-выражения для стационарных значений ($t \rightarrow \infty$) коэффициентов D_T и α_T . Наши значения D_T всегда положительны (возможность отрицательных D_T возникает в *DIA*-решениях для чисто сжимаемой потенциальной турбулентности, когда $u_i(\mathbf{r}, t) = \nabla_i \varphi(\mathbf{r}, t)$). В настоящее время вычисления D_T и α_T на основе *DIA*-уравнения представляются самыми точными и надежными. Мы также подробно исследуем зависимость D_T и α_T от степени спиральности и ее пространственно-временных масштабов. Полученные закономерности позволят более правильно выбрать величины D_T и α_T даже в тех случаях, когда корреляторы скорости среды известны лишь приближенно и даже выбор характерных параметров R_0 и τ_0 затруднен.

2. ИЕРАРХИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕГО ТЕНЗОРА ГРИНА И ПЕРЕХОД К ДИФFUЗИОННОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Используя метод получения нелинейных уравнений для функций Грина $G(1, 2)$, изложенный в [11, 12, 17], получим для первых трех членов иерархии (напомним, что $\langle G_{ij}(1, 2) \rangle \equiv G_{ij}(1 - 2)$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - D_m \nabla_1^2 \right) G_{ij}(1 - 2) = & \delta_{ij} \delta(\mathbf{R}) \delta(\tau) + \int d3 \langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1 - 3) \hat{L}_{ms}(3) \rangle G_{sj}(3 - 2) + \\ & + \int d3 \int d4 \langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1 - 3) \hat{L}_{ms}(3) G_{sr}(3 - 4) \hat{L}_{rt}(4) \rangle G_{tj}(4 - 2) + \\ & + \int d3 \int d4 \int d5 \left[\langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1 - 3) \hat{L}_{ms}(3) G_{sr}(3 - 4) \hat{L}_{rt}(4) G_{tq}(4 - 5) \hat{L}_{qf}(5) \rangle - \right. \\ & - \langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1 - 3) \langle \hat{L}_{ms}(3) G_{sr}(3 - 4) \hat{L}_{rt}(4) \rangle G_{tq}(4 - 5) \hat{L}_{qf}(5) \rangle - \\ & \left. - \langle \hat{L}_{in}(1) G_{nm}(1 - 3) \hat{L}_{ms}(3) \rangle G_{sr}(3 - 4) \langle \hat{L}_{rt}(4) G_{tq}(4 - 5) \hat{L}_{qf}(5) \rangle \right] G_{fj}(5 - 2) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь тензорный оператор $\hat{L}_{nm}(3) \equiv \nabla_m^{(3)} u_n(3) - \delta_{nm} \nabla_s^{(3)} u_s(3)$ действует на все находящиеся справа от него функции от \mathbf{r}_3, t_3 . Для гауссовских ансамблей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ второй интегральный член обращается в нуль, а третий сводится к одному члену с коррелятором перекрестного (во времени) типа, в котором $L_{in}(1)$ усредняется с $L_{rt}(4)$, а $L_{ms}(3)$ усредняется с $L_{qf}(5)$. Отбрасывание всех членов иерархии, кроме второго интегрального, приводит к DIA-уравнению. Используя равенство

$$\langle B_i(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t) \rangle B_j^{(0)}(\mathbf{r}'), \quad (17)$$

получаем из (16) интегро-дифференциальное уравнение для среднего магнитного поля $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$ в стационарной, однородной и изотропной среде, которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2 \right) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ = \text{rot} \int d\mathbf{R} \int_0^t d\tau \left[\alpha(\mathbf{R}, \tau) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, t - \tau) \rangle - D(\mathbf{R}, \tau) \text{rot} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, t - \tau) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Сама форма этого выражения носит общий характер, не зависящий от способа обрыва иерархии уравнений для $\langle G_{ij} \rangle$.

Формальное решение уравнения (18) легко получить, используя фурье-преобразование по \mathbf{r} и преобразование Лапласа по времени t :

$$\langle \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}, s) \rangle = \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt \exp(-st) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (19)$$

Получаем, учитывая соленоидальность магнитного поля $\mathbf{p} \tilde{\mathbf{B}}^{(0)}(\mathbf{p}) = 0$,

$$\langle \tilde{B}_i(\mathbf{p}, s) \rangle \equiv \langle \tilde{G}_{ij}(\mathbf{p}, s) \rangle \tilde{B}_j^{(0)}(\mathbf{p}) = \tilde{G}_0(p, s) \tilde{B}_i^{(0)}(\mathbf{p}) - ie_{iej} p_e \tilde{G}_1(\mathbf{p}, s) \tilde{B}_j^{(0)}(\mathbf{p}), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\mathbf{p}, s) &= \frac{1}{2} (\tilde{G}_- + \tilde{G}_+), \quad \tilde{G}_1 = \frac{1}{2p} (\tilde{G}_+ - \tilde{G}_-), \\ \tilde{G}_\mp(\mathbf{p}, s) &= (s + \tilde{D}(\mathbf{p}, s)p^2 \mp \tilde{\alpha}(\mathbf{p}, s)p)^{-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Выражения для $\tilde{D}(\mathbf{p}, s)$ и $\tilde{\alpha}(\mathbf{p}, s)$ в *DIA*-приближении имеют вид

$$\tilde{D}(\mathbf{p}, s) = -ip_t [\tilde{T}_{iti} - \tilde{T}_{tii} + ip_n (\tilde{S}_{timn} - \tilde{S}_{itm n})] / 2p^2, \tag{22}$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{p}, s) = -e_{ims} p_s p_t [\tilde{T}_{itm} - \tilde{T}_{tim} + ip_n (\tilde{S}_{timn} - \tilde{S}_{itm n})] / 2p^2, \tag{23}$$

где

$$T_{itm}(\mathbf{R}, \tau) = \langle u_i(1) \langle G_{tn}(1, 2) \rangle \nabla_m^{(2)} u_n(2) \rangle, \quad S_{tinm}(\mathbf{R}, \tau) = \langle u_t(1) \langle G_{im}(1, 2) \rangle u_n(2) \rangle. \tag{24}$$

Корреляторы (24) являются острыми функциями $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\tau = t_1 - t_2$ на масштабах $\sim R_0$ и временах $\sim \tau_0$ (или $\sim t_0 = R_0/u_0$ для замороженной турбулентности, когда $\tau_0 \gg \gg t_0$). Для неоднородной турбулентной среды функции $\alpha(\mathbf{R}, \tau)$ и $D(\mathbf{R}, \tau)$ параметрически зависят от среднего положения $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ в среде.

Выражения (18)–(24) имеют место и в общем случае, не связанном с *DIA*-приближением. В этом общем случае в (24) надо заменить $\langle G_{tn} \rangle$ на неусредненную функцию Грина G_{tn} и взять неприводимую часть. Напомним, что приводимые выражения содержат молекулярную функцию Грина, разделяющую какие-либо усредненные части, т. е. выражения типа (см. подробнее [11, 12, 17])

$$\int d3 \int d4 \langle A(1, 3) \rangle G_m(3 - 4) \langle B(4, 2) \rangle.$$

Уравнение диффузии получается из (18), если считать $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$ достаточно гладкой функцией и разложить под интегралом $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, t - \tau) \rangle$ в ряд по степеням \mathbf{R} и τ , оставив члены нулевого и первого порядков. В итоге получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_m \nabla^2 \right) \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \alpha_T(t) \text{rot} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle - \\ &- D_T^{(0)}(t) \text{rot rot} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle - \beta_T(t) \text{rot} \frac{\partial \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} D_T^{(0)}(t) &= \int d\mathbf{R} \int_0^t d\tau D(\mathbf{R}, t) \rightarrow D_T^{(0)}(\infty) (1 - \exp(-t/\tau_0)), \\ \alpha_T(t) &= \int d\mathbf{R} \int_0^t d\tau \alpha(\mathbf{R}, t) \rightarrow \alpha_T(\infty) (1 - \exp(-t/\tau_0)), \\ \beta_T(t) &= \int d\mathbf{R} \int_0^t d\tau \tau \alpha(\mathbf{R}, t) \rightarrow \alpha_T(\infty) [-t \exp(-t/\tau_0) + \tau_0 (1 - \exp(-t/\tau_0))]. \end{aligned} \tag{26}$$

Выражения за стрелками соответствуют модели, когда $D(\mathbf{R}, t) \propto \exp(-t/\tau_0)$ и $\alpha(\mathbf{R}, t) \propto \exp(-t/\tau_0)$. Легко проверить, что $D_T^{(0)}(t)$ и $\alpha_T(t)$ совпадают с (13) и (14). Ситуация с членом, содержащим $\beta_T(t)$, более сложная. Член первого порядка малости $\alpha_T(t) \operatorname{rot}(\mathbf{V}(\mathbf{r}, t))$ является главным в правой части (25) по сравнению с оставшимися членами второго порядка малости. Поэтому Моффат [2, 7] и Крайчнан [8] заменили $\partial(\mathbf{V}(\mathbf{r}, t))/\partial t$ в правой части на приближенное выражение

$$\frac{\partial(\mathbf{V}(\mathbf{r}, t))}{\partial t} \cong \alpha_T(t) \operatorname{rot}(\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) \quad (27)$$

и получили диффузионное уравнение в обычной форме (1), где коэффициент турбулентной диффузии

$$D_T(t) = D_T^{(0)}(t) + \alpha_T(t)\beta_T(t). \quad (28)$$

В лагранжевом представлении, которое только и использовали Моффат и Крайчнан, подстановка (27) приводит к несколько другому выражению:

$$D_T(t) = D_T^{(0)}(t) + \alpha_T(t) \int_0^t d\tau \alpha_T(\tau). \quad (29)$$

Эта формула совпадает с более общим выражением (28) при малых временах $t \ll \tau_0$ (или $t \ll t_0$ для замороженной турбулентности).

Из формул (26) видно, что для малых времен $D_T^{(0)} \approx D_T^{(0)}(\infty)t/\tau_0$, $\alpha_T \approx \alpha_T(\infty)t/\tau_0$ и $\beta_T(t) \approx \alpha_T(\infty)t^2/2\tau_0$, т. е. дополнительный член $\alpha_T(t)\beta_T(t)$ в (28) много меньше основного $D_T^{(0)}(t)$. С другой стороны, для больших времен ($t \gg \tau_0$ или $t \gg t_0$ для случая $\tau_0 \gg t_0$) точное решение (21) переходит в диффузионное с коэффициентом диффузии $D_T(\infty) = D_T^{(0)}(\infty)$, что противоречит приближенному выражению (28) (или (29)).

Мы видим, что диффузионное уравнение хорошо представляет решения точного интегро-дифференциального уравнения (18), только если положить $\beta_T(t) \equiv 0$, т. е. при выводе правильного диффузионного уравнения надо брать в интегральном члене (18) $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, t - \tau) \rangle \cong \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle - (\mathbf{R}\nabla)\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle$. По-видимому, это тот часто встречающийся случай, когда в асимптотическом разложении функции имеет смысл удерживать только первый член разложения. Заметим, что аналогичное разложение по τ в правой части уравнений иерархии (16) и учет члена $\tau \partial G_{ij} / \partial \tau$ приводит к нарушению важного условия нормировки функции Грина ($\tilde{G}_{ij}(p, \tau = 0) = \delta_{ij}$). Таким образом, член, квадратичный по $\alpha_T(t)$ в (9) и (29), и аналогичный член в (28) следует опустить.

3. DIA-УРАВНЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ D_T И α_T

Точные формулы (13) и (14) для коэффициентов D_T и α_T в эйлеровом представлении содержат корреляторы компонент скорости $u_i(\mathbf{r}, t)$ и производных $\nabla_n u_m(\mathbf{r}, t)$ с тензорной функцией Грина $G_{nm}(1, 2)$. Как уже говорилось во Введении, использование вместо точной функции Грина $G(1, 2)$ решения DIA-уравнения для усредненной функции Грина $\langle G(1, 2) \rangle$ приводит к хорошим результатам при вычислении коэффициента турбулентной диффузии D_T скалярной примеси. Важно, что DIA-решения позволяют получить D_T для любых возможных значений параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 \equiv u_0\rho_0\tau_0$

($0 \leq \xi_0 < \infty$). Коэффициент D_T для скалярной примеси определяется чисто конвективными движениями газа или жидкости, деформации и вращения элементов жидкости вклада не дают. Диффузия векторного магнитного поля определяется, кроме конвективных движений, также деформациями и вращениями элементов жидкости. Эти движения носят более локальный характер, описываются сложными корреляторами тензора $\nabla_n u_m(\mathbf{r}, t)$ и, очевидно, дают гораздо меньший вклад в D_T , чем далекие конвективные движения, т. е. в отсутствие спиральности среды коэффициенты турбулентной диффузии D_T магнитного поля и скалярной примеси должны быть близки друг другу. Эти качественные соображения позволяют надеяться, что DIA -уравнение в случае переноса магнитного поля также даст главный вклад при вычислении D_T , а возможно, и при вычислении коэффициента усиления α_T . В данной работе мы ограничимся вычислением стационарных DIA -значений коэффициентов $D_T(t)$ и $\alpha_T(t)$, что соответствует $t \gg \tau_0$ или $t \gg t_0 = R_0/u_0$ в случае $\tau_0 \gg t_0$.

Фурье-преобразование по \mathbf{R} и преобразование Лапласа по τ функции $\langle G_{nm}(1, 2) \rangle \equiv H(\tau)g_{nm}(R, \tau)$ в случае изотропной турбулентной среды имеет вид

$$\tilde{g}_{nm}(p, s) = \delta_{nm}\tilde{g}_0(p, s) + ie_{nmk}pk\tilde{g}_1(p, s) + p_n p_m \tilde{g}_2(p, s). \tag{30}$$

Функция $\tilde{g}_2(p, s)$ выражается через $\tilde{g}_0(p, s)$ и $\tilde{g}_1(p, s)$ и в силу соленоидальности магнитного поля ($\mathbf{pV}(p) = 0$) нигде себя не проявляет. DIA -уравнение для $\langle G_{nm}(1, 2) \rangle$ сводится к системе зацепляющихся нелинейных уравнений для $\tilde{g}_0(p, s) \equiv (\tilde{g}_-(p, s) + \tilde{g}_+(p, s))/2$ и $\tilde{g}_1(p, s) \equiv (\tilde{g}_+(p, s) - \tilde{g}_-(p, s))/2p$. Удобно эту систему записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{g}_+(p, s) &= \left\{ s + D_m p^2 + \frac{p}{4} \int_0^\infty dq \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \exp(-s\tau) [pE(q, \tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) - \right. \\ &\quad - pE_h(q, \tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) + (p^2 + q^2 - pq\mu)E(q, \tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) - \\ &\quad \left. - E_h(q, \tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau)] \right\}^{-1}, \\ \tilde{g}_-(p, s) &= \left\{ s + D_m p^2 + \frac{p}{4} \int_0^\infty dq \int_0^\infty d\tau \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \exp(-s\tau) [pE(q, \tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) - \right. \\ &\quad - pE_h(q, \tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) - (p^2 + q^2 - pq\mu)E(q, \tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) + \\ &\quad \left. + E_h(q, \tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau)] \right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $p\mathbf{q} = pq\mu = pq \cos \theta$ — скалярное произведение векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} , выражение $\tilde{f}(p, \tau)$ обозначает фурье-преобразование функции $f(\mathbf{R}, \tau)$ по \mathbf{R} . Обобщенные спектры энергии $E(p, \tau)$ и спиральности $E_h(p, \tau)$ определяются формулами

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle \equiv \int_0^{\infty} dp E(p, \tau),$$

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle \equiv \int_0^{\infty} dp E_h(p, \tau). \quad (32)$$

Для малых $p \ll p_0 = 1/R_0$ и $s\tau \ll 1$ формулы (31) переходят в диффузионные выражения:

$$\tilde{g}_{\mp}^{diff}(p, s) = \left[s + D_m p^2 + D_T^{(0)} p^2 \mp \alpha_T^{(0)} p \right]^{-1}, \quad (33)$$

где DIA -стационарные коэффициенты турбулентной диффузии $D_T^{(0)}$ и коэффициент $\alpha_T^{(0)}$ выражаются формулами

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} d\tau [E(p, \tau) \tilde{g}_0(p, \tau) - E_h(p, \tau) \tilde{g}_1(p, \tau)],$$

$$\alpha_T^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} d\tau [p^2 E(p, \tau) \tilde{g}_1(p, \tau) - E_h(p, \tau) \tilde{g}_0(p, \tau)]. \quad (34)$$

Для нахождения нестационарных $D_T(t)$ и $\alpha_T(t)$ в (34) надо поставить t для верхнего предела в интеграле по времени τ .

В обратном случае малых расстояний и времен ($p \gg p_0 = 1/R_0$ и $s\tau_0 \gg 1$) имеет место асимптотическая формула

$$\tilde{g}_{\mp} = \tilde{g}_0(p, s) \pm p \tilde{g}_1(p, s) \cong 2 \left\{ s + D_m p^2 + [(s + D_m p^2)^2 + 4(p^2 u_0^2 \mp p H_0)/3]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (35)$$

где

$$u_0^2 = \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad H_0 = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

В пределе $s \rightarrow 0$ и $D_m = 0$ из (35) следует, что

$$\tilde{g}_0(p, 0) \cong \sqrt{3}/u_0 p, \quad \tilde{g}_1(p, 0) \cong \sqrt{3} H_0 / 2p^3 u_0^3.$$

Если турбулентная среда не обладает спиральностью ($E_h(p, \tau) = 0$), то $\tilde{g}_1(p, s) \equiv 0$ и система (31) превращается в одно нелинейное уравнение для $\tilde{g}_0(p, s)$:

$$\tilde{g}_0(p, s) = \left[s + D_m p^2 + \frac{p^2}{4} \int_0^{\infty} dq \int_0^{\infty} d\tau \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \exp(-s\tau) E(q, \tau) \tilde{g}_0(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \tau) \right]^{-1}, \quad (36)$$

которое совпадает с DIA -уравнением для скалярной примеси [11, 16]. В этом случае $\alpha_T^{(0)} \equiv 0$, а $D_T^{(0)}$ совпадает с DIA -коэффициентом турбулентной диффузии скалярной примеси. Это подтверждает наши предыдущие качественные рассуждения относительно близости магнитного D_T к значению D_T для примесных частиц. Следует отметить,

что DIA-уравнение для скалярной примеси не зависит от спиральности и влияние спиральности на значения D_T определялось из рассмотрения члена иерархии уравнений, содержащего члены четвертого порядка по скоростям $u(r, t)$ (в предположении гауссова ансамбля скоростей). Наличие спиральности увеличивает коэффициент диффузии D_T скалярной примеси [10, 16]. В 100%-спиральной среде (когда $E_h(p, \tau) = pE(p, \tau)$) коэффициент D_T может увеличиться вплоть до 50% (при $\xi_0 \rightarrow \infty$) от значения в отсутствие спиральности. По-видимому, наличие одинакового числа правых и левых спиральных движений в среде увеличивает вероятность развала этих вихревых движений по сравнению со случаем, когда в среде существуют спиральные движения какого-либо одного типа. Это качественно поясняет эффект усиления турбулентной диффузии спиральностью.

Прежде чем приводить результаты вычислений по формуле (34), приведем оценки значений D_T и α_T в предельных случаях $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 \ll 1$ и $\xi_0 \gg 1$. Значения $\xi_0 \ll 1$ соответствуют квазилинейному приближению [4]. В этом случае хорошим приближением для функции Грина является $\tilde{g}_0(p, \tau) \approx \tilde{g}_m(p, \tau) = \exp(-p^2 D_m \tau)$ и $\tilde{g}_1(p, \tau) = 0$. Мы далее примем $D_m = 0$ и подставим эти функции в (34). В итоге получаем для $\xi_0 \ll 1$ следующие формулы:

$$D_T^{(0)} \cong \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau E(p, \tau) \cong \frac{u_0^2 \tau_0}{3} \equiv \frac{u_0}{p_0} \frac{\xi_0}{3},$$

$$\alpha_T^{(0)} \cong -\frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau E_h(p, \tau) \cong -\frac{H_0 \tau_1}{3} \equiv \left(-\frac{H_0}{u_0 p_1}\right) \frac{\xi_0 \eta}{3\gamma},$$

$$\eta = p_1/p_0, \quad \gamma = \tau_0/\tau_1.$$

Здесь τ_0, p_0 и τ_1, p_1 — характерные времена жизни и волновые числа спектров $E(p, \tau)$ и $E_h(p, \tau)$.

Для случая замороженной турбулентности, когда $E(p, \tau) \equiv E(p)$, $E_h(p, \tau) \equiv E_h(p)$ ($\tau_0 \gg t_0 = R_0/u_0 = 1/u_0 p_0$ или $\xi_0 \gg 1$), можно использовать для оценок асимптотическую формулу (35):

$$D_T^{(0)} \cong \frac{1}{\sqrt{3} u_0} \int_0^\infty \frac{dp E(p)}{p} \cong \left(\frac{u_0}{p_0}\right) \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\alpha_T^{(0)} = \frac{H_0}{2\sqrt{3} u_0^3} \int_0^\infty dp \frac{E(p)}{p} - \frac{1}{\sqrt{3} u_0} \int_0^\infty dp \frac{E_h(p)}{p} \cong \text{const}(\eta) \left(-\frac{H_0}{u_0 p_1}\right).$$

Функция $\text{const}(\eta)$, как показывают расчеты, весьма слабо зависит от η . Согласно теореме Хинчина–Бохнера [3] выполняется неравенство $|E_h(p, \omega)| \leq pE(p, \omega)$. Это означает, что безразмерные параметры a, η и γ удовлетворяют неравенствам

$$a = \frac{H_0}{u_0^2 p_0} \leq 1, \quad \eta = \frac{p_1}{p_0} \geq 1, \quad \gamma = \frac{\tau_0}{\tau_1} \geq 1.$$

Поскольку асимптотики (35) вблизи $p = p_0$ и $p = p_1$ нарушаются, формулы (38), в отличие от (37), имеют полуколичественный характер. Из оценок (37) и (38) следует,

что удобно ввести безразмерные величины \bar{D}_T и $\bar{\alpha}_T$ согласно определениям

$$D_T = \frac{u_0}{p_0} \bar{D}_T(\xi_0, a, \eta, \gamma), \quad \alpha_T = \left(-\frac{H_0}{u_0 p_1} \right) \bar{\alpha}_T(\xi_0, a, \eta, \gamma). \quad (40)$$

Для исследования зависимости \bar{D}_T и $\bar{\alpha}_T$ от параметров ξ_0 , a , η и γ мы выбрали несколько моделей турбулентности:

$$E(p, \tau) = u_0^2 \delta(p - p_0) e^{-\tau/\tau_0}, \quad E_h(p, \tau) = H_0 \delta(p - p_1) e^{-\tau/\tau_1}, \quad (41)$$

$$E(p, \tau) = \frac{u_0^2}{p_0} \frac{0.65159}{1 + x^{17/3}} x^4 e^{-\tau/\tau_0}, \quad E_h(p, \tau) = a u_0^2 \frac{0.65159}{1 + x^{17/3}} x^5 e^{-\tau/\tau_1}. \quad (42)$$

Здесь и далее $x = p/p_0$, a — степень спиральности. При $p \gg p_0$ спектр (42) имеет колмогоровский вид $\propto p^{-5/3}$. Спектры (41) и (42) являются примерами предельных типов зависимости от p : пикообразного и с медленным спадом для $p \rightarrow \infty$.

Кроме того, проводились вычисления для спектров промежуточного вида:

$$E(p, \tau) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{u_0^2}{p_0} x^4 e^{-x^2} e^{-\tau/\tau_0}, \quad E_h(p, \tau) = a u_0^2 \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^5 e^{-x^2} e^{-\tau/\tau_1}, \quad (43)$$

$$E(p, \tau) = \frac{1}{24} \frac{u_0^2}{p_0} x^4 e^{-x} e^{-\tau/\tau_0}, \quad E_h(p, \tau) = \frac{a u_0^2}{p_0} x^5 e^{-x} e^{-\tau/\tau_1}. \quad (44)$$

Кроме вычислений *DIA*-значений (34) стационарных коэффициентов $D_T^{(0)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(0)}(\xi_0)$ мы приведем также так называемые самосогласованные значения $D_T^{(s)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(s)}(\xi_0)$. Эти значения вычисляются из (34), если там вместо точных *DIA*-значений для $\tilde{g}_0(p, \tau)$ и $\tilde{g}_1(p, \tau)$ брать значения этих функций в диффузионном приближении (33) с неизвестными пока коэффициентами $D_T^{(s)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(s)}(\xi_0)$. При этом формулы (34) становятся нелинейными уравнениями для нахождения искомых величин $D_T^{(s)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(s)}(\xi_0)$. Такая процедура для скалярного поля впервые была предложена в работе [18]. Самосогласованные значения можно найти также и для нестационарных значений $D_T^{(s)}(t)$ и $\alpha_T^{(s)}(t)$:

$$\begin{aligned} D_T^{(s)}(t) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^t d\tau \exp \left(-p^2 \int_0^\tau d\tau' D_T^{(s)}(\tau') \right) \times \\ &\times \left[E(p, \tau) \operatorname{ch} \left(p \int_0^\tau d\tau' \alpha_T^{(s)}(\tau') \right) + E_h(p, \tau) \operatorname{sh} \left(p \int_0^\tau d\tau' \alpha_T^{(s)}(\tau') \right) p^{-1} \right], \\ \alpha_T^{(s)}(t) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty dp \int_0^t d\tau \exp \left(-p^2 \int_0^\tau d\tau' D_T^{(s)}(\tau') \right) \times \\ &\times \left[E(p, \tau) \operatorname{sh} \left(p \int_0^\tau d\tau' \alpha_T^{(s)}(\tau') \right) + E_h(p, \tau) \operatorname{ch} \left(p \int_0^\tau d\tau' \alpha_T^{(s)}(\tau') \right) \right]. \quad (45) \end{aligned}$$

Выражения $D_T^{(s)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(s)}(\xi_0)$, соответствующие использованию (33), получаются из (45), если там положить $t \rightarrow \infty$ и считать $D_T^{(s)}(t; \xi_0) \equiv D_T^{(s)}(\xi_0)$ и $\alpha_T^{(s)}(t; \xi_0) \equiv \alpha_T^{(s)}(\xi_0)$.

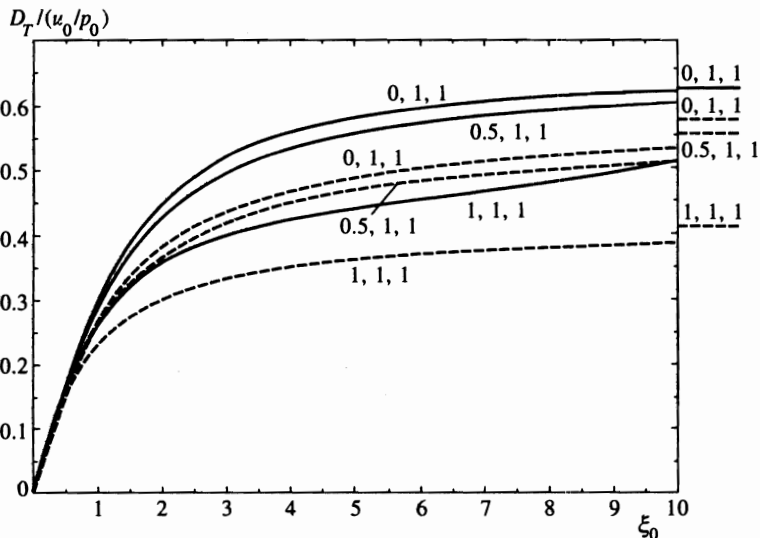


Рис. 1. Значения безразмерного коэффициента турбулентной диффузии $\bar{D}_T = D_T(u_0/p_0)^{-1}$ для случая модели (41) с δ -образными спектрами турбулентной энергии и спиральности. Сплошными линиями обозначены DIA-значения, штрихами — результаты вычислений по самосогласованной формуле. Цифры у кривых дают значения параметров a, γ, η . Уровни справа представляют соответствующие коэффициенты при $\xi_0 = 100$. Значения \bar{D}_T для случаев (0, 5, 1), (0, 1, 5), (0, 5, 5), (1, 1, 5), (1, 5, 1), (1, 5, 5) практически совпадают с представленным случаем (0, 1, 1)

Более естественный, но и более сложный путь — вычислять нестационарные значения (45) до тех времен, пока не получатся постоянные значения для $D_T^{(s)}(t)$ и $\alpha_T^{(s)}(t)$. Мы, в основном, будем использовать первый, более простой, способ. Использование обоих способов для вычисления $D_T^{(s)}(\xi_0)$ в случае скалярной примеси показало [17], что первый способ приводит к заниженным значениям $D_T(\xi_0)$, а второй — к завышенным и что их полусумма весьма удовлетворительно аппроксимирует истинное значение коэффициента $D_T(\xi_0)$. При наличии спиральности ситуация усложняется, но качественно все остается по-прежнему.

Вычисления показывают, что самосогласованные значения $\bar{D}_T^{(s)}(t)$ и $\bar{\alpha}_T^{(s)}(t)$ всегда положительны. Для предельного случая 100%-спиральности $|E_h(p, \tau)| = pE(p, \tau)$ при $E(p, \tau) = u_0^2 \delta(p - p_0) f(\tau)$ формулы (45) дают $\bar{D}_T^{(s)}(t) = \bar{\alpha}_T^{(s)}(t) > 0$. Так как значения кинетических коэффициентов D_T и α_T , в основном, определяются крупномасштабными турбулентными движениями, которые хорошо описываются функциями Грина в диффузионном приближении, самосогласованный способ дает сравнительно удовлетворительные значения D_T и α_T , качественно соответствующие DIA-значениям.

Результаты вычислений стационарных DIA-значений $\bar{D}_T(\xi_0)$ и $\bar{\alpha}_T(\xi_0)$ представлены на рис. 1–8. Прежде всего замечаем, что наличие спиральности ($a \neq 0$) приводит к уменьшению коэффициента диффузии D_T , а не к увеличению, как в случае диффузии скалярной примеси. Впервые этот эффект был отмечен в работе [10]. Причиной этого уменьшения является наличие α -эффекта, т. е. усиления магнитного поля спиральными движениями, что замедляет диффузионное затухание поля.

Второй интересной особенностью является нелинейная зависимость коэффициента

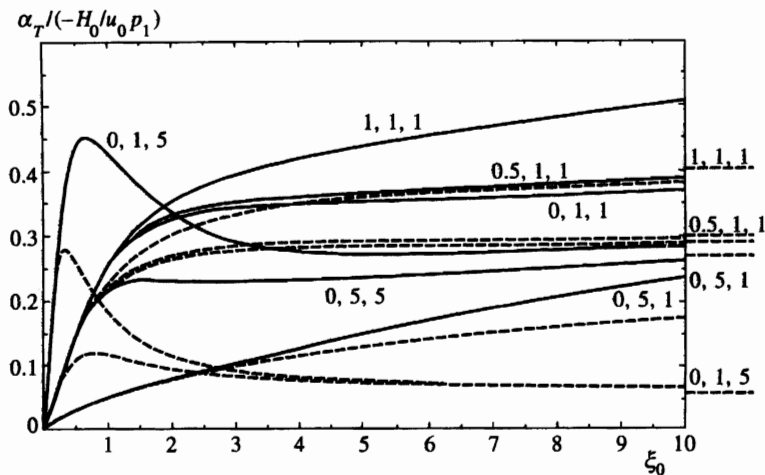


Рис. 2. Значения безразмерного коэффициента $\bar{\alpha}_T = \alpha_T (-H_0 / u_0 p_1)^{-1}$ для модели (41). Обозначения те же, что и на рис. 1. Практически совпадают случаи (0, 1, 5) с (1, 1, 5), (0, 5, 1) с (1, 5, 1) и (0, 5, 5) с (1, 5, 5)

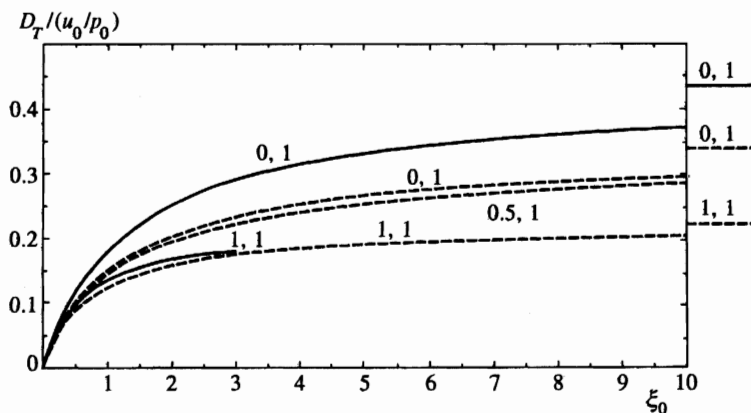


Рис. 3. Значения безразмерного коэффициента турбулентной диффузии \bar{D}_T для модели (42) с колмогоровским спектром энергии в инерционном интервале. Здесь $p_0 = p_1$ и цифры у кривых обозначают параметры a и γ . Сплошной уровнем справа дает \bar{D}_T для $\xi_0 \rightarrow \infty$, а штриховые соответствуют $\xi_0 = 100$

\bar{D}_T от степени спиральности $a = H_0 / u_0^2 p_0$. Для $0 < a < 0.5$ эта зависимость очень слаба. Практически в этом интервале значений параметра a можно использовать предельные значения \bar{D}_T , соответствующие $a = 0$. По-видимому, реальные турбулентные движения редко имеют степень спиральности $a > 0.5$, так что отмеченная особенность позволяет сократить число независимых параметров.

Если спиральные движения мелкомасштабные ($\eta = p_1 / p_0 \gg 1$) или (и) короткокоррелированные ($\gamma = \tau_0 / \tau_1 \gg 1$), то коэффициент турбулентной диффузии D_T практически не зависит от степени спиральности a и совпадает с DIA-коэффициентом диффу-

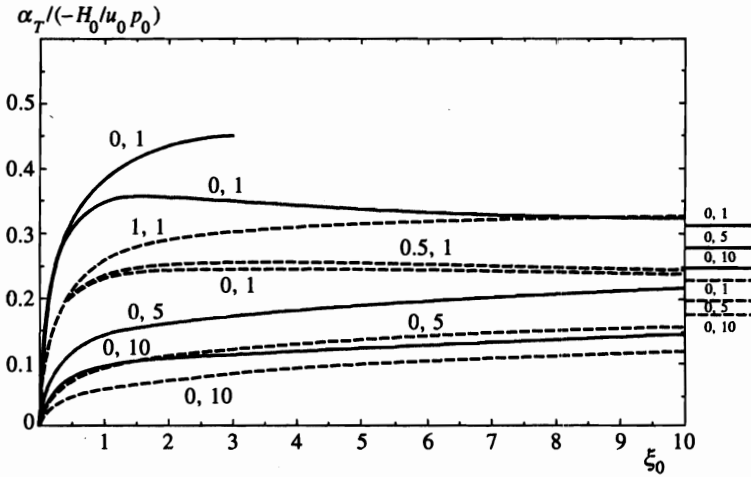


Рис. 4. Значения безразмерного коэффициента $\bar{\alpha}_T = \alpha_T(-H_0/u_0 p_0)^{-1}$ для модели (42). Обозначения те же, что и на рис. 3. Все уровни справа соответствуют $\xi_0 = 50$. Случай (0, 5) практически совпадает с (1, 5), а (0, 10) — с (1, 10)

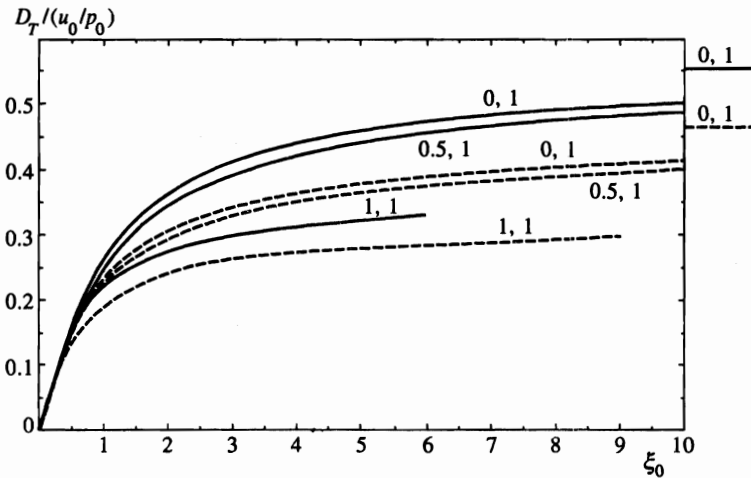


Рис. 5. Значения безразмерного коэффициента турбулентной диффузии \bar{D}_T для модели (43). Обозначения те же, что и на рис. 3. Все уровни справа соответствуют $\xi_0 = 100$. Случай (0, 5) практически совпадает с (1, 5)

зии для скалярной примеси. В этом случае различие коэффициентов D_T для магнитного поля и скалярной примеси определяется различным вкладом в эти коэффициенты от корреляторов четвертого и выше порядков. Для скалярной примеси максимальный и всегда отрицательный вклад такой поправки (в отсутствие спиральности) составляет величину $< 10\%$ при $\xi_0 \rightarrow \infty$. При $\xi_0 \rightarrow 0$ эта поправка стремится к нулю. Вычислить поправку к D_T для случая диффузии магнитного поля чрезвычайно трудно из-за очень громоздкого выражения для этой поправки. Возможно, что эта поправка так-

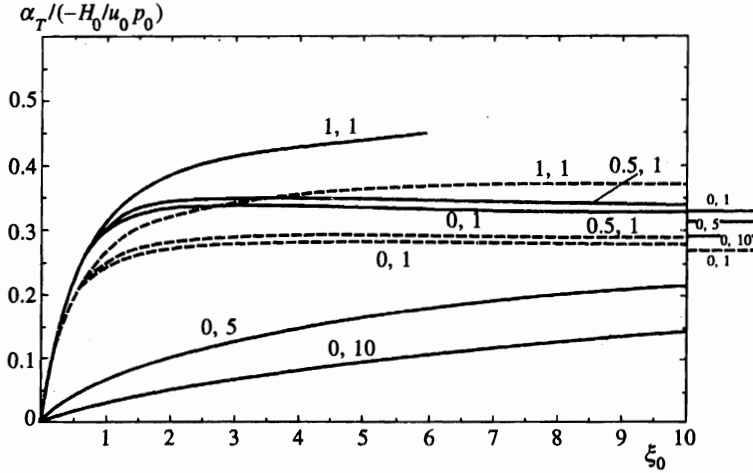


Рис. 6. Значения безразмерного коэффициента $\bar{\alpha}_T = \alpha_T (-H_0 / u_0 p_0)^{-1}$ для модели (43). Обозначения те же, что и на рис. 3. Случай (0, 5) практически совпадает с (1, 5), а (0, 10) — с (1, 10)

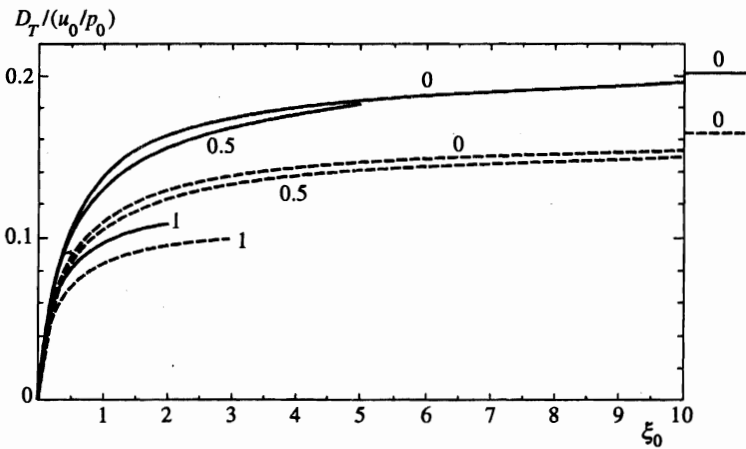


Рис. 7. Значения безразмерного коэффициента турбулентной диффузии \bar{D}_T для модели (44). Обозначения те же, что и на рис. 3

же невелика по величине; во всяком случае, при $\xi_0 \rightarrow 0$ она также стремится к нулю, как и поправка к D_T скалярной примеси. Практически уже при $p_1/p_0 > 5$ (или) $\tau_0/\tau_1 > 5$ можно пренебречь влиянием спиральности на значение D_T магнитного поля. Физически это вполне понятно, если вспомнить, что эти случаи соответствуют мелко-масштабным и (или) короткокоррелированным во времени спиральным движениям на фоне неспиральных крупномасштабных движений с большим временем корреляции.

Сравнение DIA-значений D_T с самосогласованными значениями $D_T^{(s)}$ показывает их хорошее согласие для $\xi_0 \leq 1$ и качественное согласие для $\xi_0 \gg 1$. Отметим, что всегда $D_T^{(s)} < D_T$. Это происходит оттого, что в области малых масштабов и времен

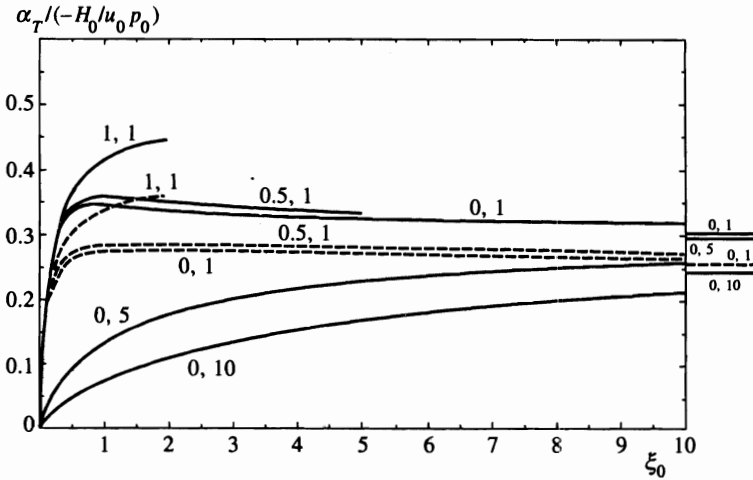


Рис. 8. Значения безразмерного коэффициента $\bar{\alpha}_T = \alpha_T(-H_0/u_0p_0)^{-1}$ для модели (44). Обозначения те же, что и на рис. 3

($p \gg p_0, s\tau_0 \gg 1$) реальная функция Грина $\tilde{g}_0(p, s)$ имеет большее значение, чем ее приближенное диффузионное выражение.

Зависимость безразмерного $\bar{\alpha}_T$ -коэффициента от степени спиральности a качественно та же самая, что и для \bar{D}_T : для $a < 0.5$ различие коэффициентов $\bar{\alpha}_T$ очень маленькое даже для $p_1 \cong p_0$ и $\tau_1 \cong \tau_0$, а для $p_1/p_0 > 5$ и (или) $\tau_0/\tau_1 > 5$ зависимость от параметра a практически исчезает. Это означает, что размерный α_T -коэффициент в этих случаях линейно зависит от величины характерной спиральности H_0 (благодаря наличию размерного множителя в (40)).

Увеличение параметра $\gamma = \tau_0/\tau_1$ приводит при любых значениях ξ_0 к уменьшению величины α_T и физически соответствует уменьшению α -эффекта для более короткоживущих спиральных движений. Степень уменьшения, однако, зависит от значения параметра ξ_0 и при $\xi_0 \rightarrow \infty$ зависимость α_T от γ исчезает. Это соответствует оценке (38).

Зависимость $\bar{\alpha}_T$ от параметра $\eta = p_1/p_0$ была исследована на примере модели (41) и представлена на рис. 2. Обращает внимание пикообразный вид $\bar{\alpha}_T$ при $\xi_0 < 1$ для случая $\eta = 5$ и $\gamma = 1$. Максимум пика соответствует значению $\xi_0 = \xi_*$, которое качественно можно оценить из условия, что за время жизни спирали τ_1 сама она успевает развалиться, т. е. $D_T\tau_1 \approx R_1^2$ при $D_T \cong u_0^2\tau_0/3$, которое имеет место для случая $\xi_0 < 1$ (см. оценку (37)). Такая оценка дает

$$\xi_* \cong \text{const} \sqrt{\tau_0/\tau_1} (p_0/p_1) \cong \text{const} \sqrt{\gamma/\eta}$$

при условии, что получающиеся $\xi_* < 1$. Подставляя это значение ξ_* в оценку (37), получаем, что $\bar{\alpha}_T \text{max} \cong (1/3)\text{const}/\sqrt{\gamma}$ и не зависит от параметра η . Условие $\xi_* < 1$ (или $\sqrt{\gamma/\eta} < 1$) выполняется для сравнительно долгоживущих и мелкомасштабных спиральных движений ($\eta \gg 1$), т. е. когда эти спиральные образования можно считать своего рода «примесными частицами». Казалось бы, аналогичную оценку величины ξ_* можно получить и для другого предельного случая $\xi_0 \gg 1$, где $D_T \cong \text{const}(u_0/p_0)$. Это дало бы $\xi_* \cong \text{const}\gamma/\eta^2$ при условии $\xi_* \gg 1$. Однако вычисленные значения $\bar{\alpha}_T(\xi_0)$,

как в *DIA*-приближении, так и самосогласованные, не показывают для $\xi_0 \gg 1$ существования каких-либо пиков. В действительности же такая оценка для области $\xi_0 \gg 1$ бессмысленна, так как сам характер турбулентных движений с $\xi_0 \gg 1$ не позволяет считать спиральные образования какой-либо примесью, подверженной диффузионному разрушению за время своей жизни τ_1 . При $\xi_0 \gg 1$ турбулентные движения носят вихревой характер с временем обращения $t_0 \cong 1/u_0 p_0$ много меньшим времени жизни вихря τ_0 : $\xi_0 \equiv \tau_0/t_0 \gg 1$. Спиральные движения в этом случае являются неотъемлемой частью этих вихрей. При $\tau_1 \ll t_0$ происходит многократное обращение спиральных образований в вихре. В этом случае усредненный α -эффект перестает зависеть от параметра $\gamma = \tau_0/\tau_1$. Зависимость же α_T от $\eta = p_1/p_0$, в основном, определяется размерным множителем в (40): $\alpha_T \propto 1/\eta$.

Как видно из рисунков, самосогласованные значения $\bar{\alpha}_T^{(s)}$ численно близки к *DIA*-значениям $\bar{\alpha}_T$ при $\xi_0 \ll 1$ и сильно занижены для $\xi_0 \gg 1$. При увеличении параметра $\eta = p_1/p_0 \equiv R_0/R_1$ это различие еще более увеличивается. Следует отметить, что самосогласованный способ при вычислении α_T дает гораздо худшие результаты, чем при вычислении коэффициента турбулентной диффузии D_T .

Вычисление поправки $\alpha_T^{(1)}$, зависящей от четырех точечных корреляторов скорости (для гауссова ансамбля и спектра (41)) показало, что эти поправки растут по величине от 0% для $\xi_0 \rightarrow 0$ до $\leq 4\%$ при $p_0 = p_1$ и $\tau_0 = \tau_1$ для $\xi_0 = 10$. Для мелкомасштабной и (или) короткокоррелированной спиральности вместо 4% имеем 20% для случая $\gamma = 5$, 25% для случая $\eta = 5$ и 30% при $\gamma = 5$, $\eta = 5$. Поправка практически не зависит от степени спиральности a . Она отрицательна для $\xi_0 \leq 1$ и положительна при $\xi_0 \gg 1$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ $D_T(t)$ И $\alpha_T(t)$ САМОСОГЛАСОВАННЫМИ СПОСОБАМИ

На рисунке 9 представлены результаты вычислений $D_T(t)$ и $\alpha_T(t)$ для модели (41) при 100%-спиральности ($|E_h(p, \tau)| = pE(p, \tau)$). В этом случае $\gamma = 1$, $\eta = 1$, $a = 1$ и $\bar{D}_T^{(s)}(t) = \bar{\alpha}_T^{(s)}(t) > 0$. Сплошные кривые представляют результаты вычислений по формуле (45), а штриховые — по упрощенному варианту этой формулы, когда в интегральных членах в качестве $D_T^{(s)}(\tau)$ и $\alpha_T^{(s)}(\tau)$ брались стационарные значения $D_T^{(s)}(\infty)$ и $\alpha_T^{(s)}(\infty)$, также вычисленные по упрощенному варианту (45). Штриховые кривые дают заниженные значения, а сплошные — несколько завышенные. Рассмотренный случай был вычислен в работе [10] по лагранжевым формулам (9) и (10) в результате численного моделирования траекторий. При $t > 3t_0$ в этой работе получились отрицательные значения коэффициента диффузии $D_T(t)$, а для α_T — положительные. Наши вычисления хорошо согласуются со стационарными *DIA*-значениями для D_T и α_T и надежно свидетельствуют, что коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля в случае несжимаемой среды положителен.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные выводы, вытекающие из анализа результатов вычислений.

1. Безразмерный коэффициент турбулентной диффузии $\bar{D}_T = D_T(u_0/p_0)^{-1}$ магнитного поля в несжимаемой среде положителен и монотонно растет с ростом параметра

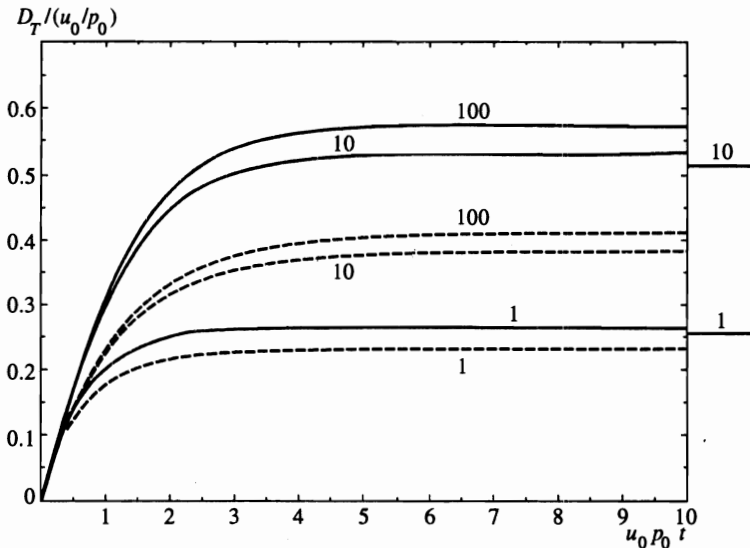


Рис. 9. Значения нестационарных безразмерных коэффициентов $\bar{D}_T = \bar{\alpha}_T$ для модели (41) с $a = 1, \gamma = 1, \eta = 1$. Сплошные кривые представляют вычисления по самосогласованной формуле (45), а штриховые — вычисления по упрощенному варианту этой формулы, когда под знаками интегралов ставятся постоянные значения коэффициентов $D_T^{(s)}$ и $\alpha_T^{(s)}$. Цифры у кривых дают значения параметра ξ_0 . Уровни справа дают DIA-значения \bar{D}_T при $\xi_0 = 10$

$\xi_0 = u_0 p_0 \tau_0$, асимптотически приближаясь к своему предельному значению при $\xi_0 \rightarrow \infty$. Наличие спиральности в среде уменьшает D_T , причем для малой степени спиральности $a = H_0 / u_0^2 p_0 < 0.5$ этот эффект весьма слаб. Мелкомасштабная и (или) короткокоррелированная спиральность с $\eta = p_1 / p_0 \geq 5$ и (или) $\gamma = \tau_0 / \tau_1 \geq 5$ практически не изменяет значение D_T даже при $a = 1$.

2. Безразмерный коэффициент, описывающий α -эффект, $\bar{\alpha}_T = \alpha_T (-H_0 / u_0 p_1)^{-1}$ для крупномасштабной ($\eta \approx 1$) спиральности монотонно растет с ростом параметра ξ_0 . Для $a < 0.5$ величина $\bar{\alpha}_T$ практически от степени спиральности a не зависит.

3. Для мелкомасштабной и короткокоррелированной спиральности ($\eta = p_1 / p_0 \geq 5$ и (или) $\gamma = \tau_0 / \tau_1 \geq 5$) коэффициент $\bar{\alpha}_T$ практически от a не зависит.

4. Для мелкомасштабной спиральности с $\sqrt{\gamma} / \eta < 1$ величина $\bar{\alpha}_T(\xi_0)$ имеет пикообразный вид с максимумом при $\xi_* \approx \text{const} \sqrt{\tau_0 / \tau_1} (p_0 / p_1) \equiv \text{const} \sqrt{\gamma} / \eta$ и величиной $\bar{\alpha}_{T \max} \approx (1/3) \text{const} / \sqrt{\gamma}$.

5. При $\xi_0 \rightarrow \infty$ величина $\bar{\alpha}_T(\xi_0)$ стремится к предельному значению, слабо зависящему от η и не зависящему от γ .

Литература

1. P. H. Roberts, *An introduction to magnetohydrodynamics*, Elsevier, New York, London (1967).
2. H. K. Moffatt, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press, Cambridge (1978).

3. F. Krause and K.-H. Raedler, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*, Akademie Verlag, Berlin (1980).
4. E. N. Parker, *Cosmical magnetic fields*, Clarendon Press, Oxford (1979).
5. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967).
6. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, ЖЭТФ **88**, 487 (1985).
7. H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **65**, 1 (1974).
8. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **75**, 657 (1976).
9. G. I. Taylor, *Proc. Lond. Math. Soc. A* **20**, 196 (1921).
10. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **77**, 753 (1976).
11. Н. А. Силант'ев, ЖЭТФ **101**, 1216 (1992).
12. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **63**, 139 (1992).
13. P. H. Roberts, *J. Fluid Mech.* **11**, 257 (1961).
14. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluid* **13**, 22 (1970).
15. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **81**, 385 (1977).
16. N. A. Silant'ev, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **75**, 183 (1994).
17. Н. А. Силант'ев, ЖЭТФ **111**, 871 (1997).
18. R. Phythian and W. D. Curtis, *J. Fluid Mech.* **89**, 241 (1978).