ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 4(10), стр. 1396–1408

О РЕЗИСТИВНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*В. П. Силин**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 января 1997 г.

На основании принципа суперпозиции вихревых структур, свойства которых определяются нелинейным взаимодействием вихрей, предложены новые решения одномерной нелокальной джозефсоновской электродинамики, описывающие стационарные и нестационарные вихревые состояния Абрикосова–Джозефсона резистивной модели. Показана устойчивость вольт-амперной характеристики (1.13) и изучен релаксационно-осцилляционный режим установления соответствующего состояния. Рассмотрены закономерности аннигиляции и разбегания взаимодействующих вихрей Абрикосова–Джозефсона.

1. Электродинамика джозефсоновских переходов представляет собой интенсивно развивающийся раздел нелинейной физики. Теория крупномасштабных джозефсоновских вихревых структур с характерным размером много большим лондоновской длины λ обычно основывается на уравнении синус-Гордона или на его обобщении, учитывающем диссипацию (см., например, [1, 2]). Для исследования уравнения синус-Гордона могут применяться мощные общие математические методы (см., например, [3]). Это позволяет получить богатую информацию о крупномасштабных джозефсоновских структурах. Для учета диссипативных процессов и других возмущений в таких структурах проведено много различных численных исследований, а также разработаны приближенные подходы [4].

В последние годы определенное внимание привлекает джозефсоновская электродинамика переходов со сравнительно большой плотностью критического тока j_c, когда выполнено неравенство [5]

$$j_c > j_0[\text{А/см}^2] = \hbar c^2 (16\pi|e|\lambda^3)^{-1} \sim 10^4 \lambda^{-3}[\text{мкм}]. \tag{1.1}$$

Плотность тока j_0 оказывается меньше тока диссоциации куперовских пар для сверхпроводников с большим параметром Гинзбурга–Ландау κ. В условиях выполнения неравенства (1.1) джозефсоновская электродинамика оказывается не только нелинейной, но и нелокальной. На существование такой нелокальности было указано еще в работе [6] (см. также [7]). Следуя работе [8] для бесконечного в плоскости (y, z) джозефсоновского перехода в случае одномерной зависимости от координаты z разности фаз куперовских пар по разные стороны перехода имеем следующее уравнение:

$$\sin\varphi + \frac{\beta}{\omega_j^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{l}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' K_0\left(\frac{|z-z'|}{\lambda}\right)\frac{\partial\varphi(z',t)}{\partial z'}. \tag{1.2}$$

---

*E-mail: silin@sci.lpi.ac.ru

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда,

$$\frac{1}{\omega_j^2} = \frac{\hbar C_s}{2|e|j_c} = \frac{\hbar \varepsilon}{16\pi|e|dj_c}, \quad \frac{\beta}{\omega_j^2} \equiv t_0 = \frac{\hbar}{2|e|j_c R_s} = \frac{\hbar\sigma}{4|e|dj_c}, \quad l = \frac{\lambda_j^2}{\lambda} = \frac{\hbar c^2}{16\pi|e|j_c\lambda^2}, \tag{1.3}$$

$\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света, e — заряд электрона, $2d$ — ширина перехода, которая принимается малой по сравнению с лондоновской длиной, C_s и R_s — соответственно емкость и сопротивление единицы площади туннельного контакта, а ε и σ — соответственно диэлектрическая постоянная и проводимость.

В отличие от обычной локальной джозефсоновской электродинамики в нелокальной теории пока не сформулирован общий математический подход. До сих пор получено описание лишь некоторых вихревых состояний (см. ниже). Поэтому важно проанализировать общие свойства полученных на сегодняшний день результатов нелокальной электродинамики, допускающих возможность поиска новых вихревых состояний. Ниже формулируется принцип нелинейной суперпозиции, согласно которому выражения для разности фаз куперовских пар φ можно представить в виде линейной суперпозиции пространственно-неоднородных и однородных состояний, временная эволюция и стационарные свойства которых определяются нелинейным взаимодействием вихрей.

В настоящем сообщении мы рассмотрим следствия, вытекающие из случая пренебрежимо малой емкости, когда в уравнении (1.2) вторую производную по времени можно не учитывать. Это — так называемая резистивная модель [1], что в англоязычной литературе соответствует термину «resistively shunted junction (RSJ) model» [7]. Эта модель, как известно, наиболее широко применима при температурах вблизи сверхпроводящего фазового перехода. Более того, нас будут интересовать условия (1.1) джозефсоновского перехода с большой плотностью критического тока, когда

$$\lambda \gg \lambda_j. \tag{1.4}$$

В этом случае в соответствии с работой [6] (см. также [9]) в уравнении (1.2) можно воспользоваться асимптотикой

$$K_0\left(\frac{|z-z'|}{\lambda}\right) \simeq -\ln\frac{|z-z'|}{2\lambda}. \tag{1.5}$$

Тогда запишем следующее уравнение:

$$\sin\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \frac{l}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{z'-z}\,\frac{\partial\varphi(z',t)}{\partial z'} = \gamma. \tag{1.6}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения Коши, $\tau = t/t_0$ (1.3), а в правой части (1.6) добавлено по сравнению с (1.2) слагаемое $\gamma = j/j_c$, где j — плотность тока, закорачивающего туннельный переход. Ниже будет считаться, что j не зависит от пространственной координаты. Уже в работе [10] было приведено не зависящее от времени решение этого уравнения при $\gamma = 0$, описывающее единичный вихрь Абрикосова–Джозефсона:

$$\varphi = \pi + 2\,\mathrm{arcth}(z/l). \tag{1.7}$$

Длина l характеризует размер ядра вихря Абрикосова–Джозефсона. Это решение впоследствие независимо было получено в [9]. Релаксационный процесс установления такого вихря во времени (при $\gamma = 0$) описан в работе [11]. В работе [12] получено решение уравнения (1.6) при $\gamma \neq 0$, описывающее движущийся с постоянной скоростью единичный вихрь Абрикосова–Джозефсона:

$$\varphi(z,t) = \pi + \arcsin\gamma + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z+vt}{l/\sqrt{1-\gamma^2}}\right), \tag{1.8}$$

где $v = (\gamma l/t_0\sqrt{1-\gamma^2})$. Релаксационный процесс установления такого нелинейного состояния описан в [13]. Релаксационные процессы установления периодической структуры вихрей Абрикосова–Джозефсона с отличным от нуля средним магнитным полем и размытия вихревой структуры с равным нулю средним магнитным полем рассмотрены также в работе [14]. Наконец, в работе [15] получено зависящее от времени решение уравнения (1.6), описывающее бесконечную цепочку вихрей Абрикосова–Джозефсона с отличным от нуля средним магнитным полем, бегущую с постоянной скоростью:

$$\varphi(z,t) = \theta_0 + \pi + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\left[(z+vt)/2L\right]}{\mathrm{th}[\alpha_0/2]}\right), \tag{1.9}$$

где

$$\sin\theta_0\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 = \gamma, \quad \cos\theta_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 = (l/L), \tag{1.10}$$

$$v = \frac{\omega_j^2 L}{\beta}\left\{\left(\frac{1}{4}\left[\gamma^2 + \frac{l^2}{L^2} - 1\right]^2 + \frac{l^2}{L^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\gamma^2 - \frac{l^2}{L^2} - 1\right]\right\}^{1/2}. \tag{1.11}$$

В отличие от стационарно движущегося одиночного вихря Абрикосова–Джозефсона, могущего существовать лишь при $\gamma^2 < 1$, т. е. при плотности тока меньшего критического значения j_c, решение (1.9) реализуется и при бóльших значениях j. Формулам (1.9) и (1.11) отвечает вольт-амперная характеристика

$$\frac{V^2}{R_s^2} \equiv j_r^2 = j_c^2\left\{\left(\frac{1}{4}\left[\frac{j^2}{j_c^2} + \frac{l^2}{L^2} - 1\right]^2 + \frac{l^2}{L^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\frac{j^2}{j_c^2} - \frac{l^2}{L^2} - 1\right]\right\} \tag{1.12}$$

или в другой форме записи

$$j^2 = j_r^2 + \frac{L^2 j_c^2 j_r^2}{L^2 j_r^2 + l^2 j_c^2}. \tag{1.13}$$

Сравнение аналитически полученной вольт-амперной характеристики (1.12), (1.13) с результатами численных расчетов работы [10] позволяет не только усмотреть определенное сходство, но и установить приближенность результатов [10]. Второе слагаемое формулы (1.13) дает весьма простое аналитическое выражение для избыточного сверхпроводящего тока в омической области, где $j > j_r$. Наконец, так как среднее магнитное поле $\overline{H}$, отвечающее бегущей цепочке вихрей (1.9), связано с параметром L соотношением

$$\overline{H} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda L} \equiv \frac{\hbar c}{4|e|\lambda L}, \tag{1.14}$$

формулы (1.12) и (1.13) дают аналитическую зависимость напряжения и тока от магнитного поля. В то же время до сих пор не решен вопрос об устойчивости бегущей цепочки вихрей (1.9).

Наблюдения за решениями уравнения (1.6) и, в особенности, над теми, которые описывают нестационарные резистивные состояния [11–15], позволяют высказать предположение о том, что среди возможных нелинейных решений резистивной нелокальной джозефсоновской электродинамики имеется такой класс решений, которые можно назвать суперпозиционными. При этом нелинейное состояние, характеризуемое разностью фаз куперовских пар, описывается линейной комбинацией фаз, каждая из которых внешне сходна с отдельным нелинейным решением уравнения (1.6). В то же время зависимость параметров, характеризующих такие отдельные состояния, оказывается взаимозависимой и определяется взаимодействием вихревых состояний. Такое взаимодействие определяет, в частности, временную эволюцию нелинейной системы взаимодействующих вихрей. Ниже демонстрируется реализация такого суперпозиционного подхода. Прежде всего в рамках резистивной (RSJ) модели выявлен релаксационно-колебательный закон установления стационарно бегущей цепочки вихрей (1.9).

Другой вопрос динамики вихрей Абрикосова–Джозефсона, рассмотренный ниже, связан с изучением взаимодействия вихря и антивихря — флуксона и антифлуксона. (В случае локальной джозефсоновской электродинамики ср. [16].) В режиме отсутствия тока j ($\gamma = 0$) выявлена возможность аннигиляции вихрей и возможность их разбегания при наличии стационарной фазы в линейной суперпозиции решений, описывающих взаимодействующие вихри. Наличие пространственно-однородного и постоянного тока j ($\gamma = \mathrm{const}$), как показано ниже, приводит к возможности существования стационарных состояний, отвечающих линейной суперпозиции флуксона и антифлуксона, а также линейной суперпозиции бесконечной цепочки вихрей и антивихрей. Эти новые стационарные пространственно-неоднородные токовые состояния отвечают известному участку вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода, для которого при равном нулю напряжении ($V = 0$) имеется отличный от нуля сверхпроводящий ток с плотностью меньшей критической $j < j_c$. Иными словами эти пространственно-неоднородные решения следует рассматривать наряду с пространственно-однородными решениями уравнения (1.6) (а более точно (1.2)) $\varphi = \theta(t)$:

$$\sin\theta + \frac{d\theta}{d\tau} = \gamma, \tag{1.15}$$

когда в стационарном случае, отвечающем равному нулю напряжению ($V = 0$), имеется известное решение

$$\theta = \arcsin\gamma, \quad \gamma^2 < 1. \tag{1.16}$$

Рассмотрена динамика точных решений резистивной модели, представляющих линейную суперпозицию пространственно-однородной фазы, подчиняющейся уравнению (1.15), флуксона и антифлуксона. Нелинейность резистивной модели проявляется в нелинейной связи фазы $\theta(t)$ с координатой центров флуксона и антифлуксона $z_0(t)$ и с характерным размером вихрей $\rho(t)$. Как и в отсутствие тока, возможен как режим аннигиляции, так и режим разбегания вихрей. Для вихревых цепочек также установлена возможность подобной линейной суперпозиции решений. Также установлен закон течения во времени процесса аннигиляции цепочек вихрей и антивихрей сопровождающегося сравнительно медленным размытием отдельных вихрей цепочек.

2. Наше изложение результатов резистивной динамики вихрей Абрикосова–Джозефсона начнем со случая релаксационного решения уравнения (1.6), описывающего установление бегущей цепочки вихрей (1.9). Соответствующее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$\varphi(z,\tau)=\theta(\tau)+\pi+2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{z+z_0(\tau)}{2L}\right)}{\mathrm{th}\left(\alpha(\tau)/2\right)}\right]. \tag{2.1}$$

Если при этом использовать следующее преобразование Гильберта ($\alpha>0$, $A>0$) [14]:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-y}\,\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos Ax}=\frac{\sin Ay}{\cos Ay-\mathrm{ch}\,\alpha}, \tag{2.2}$$

то легко убедиться в том, что (2.1) удовлетворяет уравнению (1.6), если функции θ, z_0 и α удовлетворяют следующим обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\gamma-\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha, \tag{2.3}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau}=\frac{l}{L}-\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{L}\frac{dz_0}{d\tau}=\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha. \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.3), (2.4) определяет взаимное влияние пространственно-однородной фазы θ и вихревой бесконечной цепочки, описываемой функцией арктангенс, что выражается в нелинейной дифференциальной связи θ и α. Помимо этого уравнение (2.5) также характеризует нелинейное воздействие поля пространственно-однородной фазы на смещение вихревой цепочки с течением времени $z_0(\tau)$. Бегущая цепочка вихрей Абрикосова–Джозефсона работы [15] получена при условии $\gamma=\mathrm{const}$. В этом случае система уравнений (2.3) и (2.4) отвечает автономной динамической системе. Это позволяет усмотреть закономерность эволюции во времени нестационарной цепочки вихрей (2.1) с помощью анализа фазового портрета в плоскости (α,θ) уравнения

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{(l/L)-\mathrm{sh}\,\alpha\cos\theta}{\gamma-\mathrm{ch}\,\alpha\sin\theta}. \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что в фазовой плоскости (α,θ) уравнение (2.6) имеет лишь одну особую (стационарную) точку, отвечающую формуле (1.10). Иными словами, (1.9) является единственным стационарным решением автономной системы (2.3), (2.4). Отвечающее стационарной точке (1.10) решение уравнения (2.5) $z_0 = \tilde{v}\tau$, где $\tilde{v} = L \operatorname{sh}\alpha_0 \sin\theta_0$, после перехода к размерному времени $t = \tau t_0$ дает выражение постоянной скорости (1.11).

Вблизи стационарной точки (1.10), когда $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, а $\Delta\alpha$ и $\Delta\theta$ малы, уравнение (2.6) сводится к следующему:

$$\frac{d\Delta\theta}{d\Delta\alpha} = \frac{\sin\theta_0 \operatorname{sh}\alpha_0 \Delta\alpha + \cos\theta_0 \operatorname{ch}\alpha_0 \Delta\theta}{\cos\theta_0 \operatorname{ch}\alpha_0 \Delta\alpha - \sin\theta_0 \operatorname{sh}\alpha_0 \Delta\theta}. \tag{2.7}$$

В соответствии с обычной классификацией особых точек (см. [17,18]) согласно уравнению (2.7) стационарная точка (1.10) является фокусом. То что фокус оказывается устойчивым, непосредственно можно видеть из зависимости $\Delta\alpha$ и $\Delta\theta$ от времени по закону

$$\exp(-\tau\cos\theta_0 \operatorname{ch}\alpha_0)\cos(\tau\sin\theta_0 \operatorname{sh}\alpha_0 + \mathrm{const}). \tag{2.8}$$

Следовательно, можно утверждать, что в рамках резистивной модели решение (1.9) является устойчивым, а релаксационный процесс установления бегущей с постоянной скоростью цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона описывается нестационарным решением (2.1). В соответствии с формулами (1.10) имеем для частоты $\Omega = t_0^{-1}\sin\theta_0 \operatorname{sh}\alpha_0$ и декремента затухания $\Gamma = t_0^{-1}\cos\theta_0 \operatorname{ch}\alpha_0$ следующие выражения:

$$\Omega = \frac{1}{t_0}\left\{\frac{1}{2}\left[\gamma^2 - 1 - \frac{l^2}{L^2}\right] + \left(\frac{1}{4}\left[\gamma^2 + \frac{l^2}{L^2} - 1\right]^2 + \frac{l^2}{L^2}\right)^{1/2}\right\}^{1/2}, \tag{2.9}$$

$$\Gamma = \frac{1}{t_0}\left\{\frac{1}{2}\left[1 - \gamma^2 + \frac{l^2}{L^2}\right] + \left(\frac{1}{4}\left[\gamma^2 + \frac{l^2}{L^2} - 1\right]^2 + \frac{l^2}{L^2}\right)^{1/2}\right\}^{1/2}, \tag{2.10}$$

характеризующие релаксационные колебания. Имея в виду вольт-амперную характеристику в форме (1.12), легко видеть, что формула (2.9) может быть записана в виде

$$\Omega = \frac{2|e|V}{\hbar}. \tag{2.11}$$

Эта закономерность, как известно, подтверждается на опыте при переменном эффекте Джозефсона [1]. В то же время следует подчеркнуть, что только при

$$\gamma^2 - 1 \gg (l/L)^2 \tag{2.12}$$

формула (2.9) переходит в известную формулу Асламазова и Ларкина [19]

$$\Omega = \frac{2|e|R_s}{\hbar}\sqrt{j^2 - j_c^2}. \tag{2.13}$$

При этом для декремента затухания имеем

$$\Gamma = \frac{c^2 R_s}{8\pi\lambda^2 L} = \frac{cR_s\overline{H}|e|}{2\pi\lambda\hbar}. \tag{2.14}$$

Очевидно, что соотношение (2.11) является общим, отвечающим энергии $\hbar\Omega = 2|e|V$ куперовской пары в поле статической разности потенциалов V.

Согласно формулам (2.9) и (2.10) частота и декремент затухания связаны простым соотношением

$$\Gamma^2 = \Omega^2 - \left(\gamma^2 - 1 - \frac{l^2}{L^2}\right)\frac{1}{t_0^2}. \tag{2.15}$$

Отсюда, в частности, видно, что при $(j/j_c)^2 = \gamma^2 = 1 + (l/L)^2$ декремент затухания равен частоте. При бóльших значениях плотности тока j декремент затухания меньше частоты. Можно записать следующую общую зависимость декремента затухания от напряжения:

$$\Gamma = \frac{R_s c^2}{8\pi\lambda^2 L}\left\{1 + \left[\frac{l^2}{L^2} + \frac{V^2}{R_s^2 j_c^2}\right]^{-1}\right\}^{1/2}. \tag{2.16}$$

Это позволяет получить следующее простое соотношение:

$$\frac{\Gamma}{\Omega} = \frac{R_s j_c}{V}\frac{l}{L}\sqrt{1 + \left[\frac{l^2}{L^2} + \frac{V^2}{R_s^2 j_c^2}\right]^{-1}}. \tag{2.17}$$

В частности, если

$$V \gg R_s j_c l/L, \tag{2.18}$$

то

$$\frac{\Gamma}{\Omega} = \frac{R_s j_c}{V}\frac{l}{L}\sqrt{1 + \frac{R_s^2 j_c^2}{V^2}}. \tag{2.19}$$

Последняя формула позволяет видеть возможность реализации слабозатухающих релаксационных колебаний и поэтому указывает на возможность эффективного возбуждения таких колебаний с частотой, превышающей $\Omega_0 = (2|e|R_s j_c/\sqrt{l/L}\,\hbar)$ в джозефсоновском переходе с бегущей цепочкой вихрей Абрикосова–Джозефсона (1.9).

В пределе противоположном (2.18) декремент затухания не зависит от напряжения $\Gamma(V = 0)$. Если при этом $l \ll L$, то $\Gamma = (2|e|/\hbar)R_s j_c$ и декремент затухания оказывается много больше частоты.

3. Переходя теперь к рассмотрению состояний, отвечающих линейной суперпозиции вихрей и антивихрей, остановимся прежде всего на случае отсутствия закорачивающего тока ($\gamma = 0$). В этом случае запишем решение уравнения (1.6) в виде

$$\varphi(z,\tau) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{z + z_0(\tau)}{\rho(\tau)}\right] - 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{z - z_0(\tau)}{\rho(\tau)}\right]. \tag{3.1}$$

Используя преобразование Гильберта ([20], с. 173, 15.2.10)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x - y}\,\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{a(y^2 + x^2)}, \quad a > 0, \tag{3.2}$$

нетрудно убедиться, что (3.1) является решением уравнения (1.6), если функции $z_0(\tau)$ и $\rho(\tau)$ подчиняются уравнениям

$$\frac{dz_0}{d\tau} = -\frac{\rho^2 z_0}{\rho^2 + z_0^2}, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = l - \frac{\rho z_0^2}{\rho^2 + z_0^2}. \tag{3.3}$$

Формула (3.1) соответствует суперпозиции флуксона (2π-кинка) и антифлуксона (антикинка), несущих единичные кванты магнитного потока с противоположными знаками, находящимися друг от друга на расстоянии $2z_0(\tau)$. Функция $\rho(\tau)$ характеризует размер вихрей. Магнитное поле, отвечающее решению (3.1) (ср. [21]), представляет собой линейную суперпозицию двух вихрей:

$$H_y(x,z,\tau) = \frac{\hbar c \rho(\tau)}{2\pi e\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^2+\rho^2(\tau)} \times$$
$$\times \left\{ K_0\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{[z+z_0(\tau)-\xi]^2+x^2}\right) - K_0\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{[z-z_0(\tau)-\xi]^2+x^2}\right)\right\}. \quad (3.4)$$

На расстояниях много больших размера ядра $\rho(\tau)$ вихрей, $(z\pm z_0)^2+x^2 \gg \rho^2$,

$$H_y(x,z,t) = \frac{\hbar c}{2e\lambda}\left\{K_0\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{(z+z_0)^2+x^2}\right) - K_0\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{(z-z_0)^2+x^2}\right)\right\}, \quad (3.5)$$

что представляет собой по форме поле вихря и антивихря Абрикосова и отвечает соответствующей комбинации вихря и вихря Абрикосова–Джозефсона на достаточно больших расстояниях. Напротив, если $(z\pm z_0)^2+x^2 \ll \rho^2$, из формулы (3.4) имеем

$$H_y(x,z,t) = \frac{\hbar c}{4e\lambda^2}\ln\frac{(|x|+\rho)^2+(z-z_0)^2}{(|x|+\rho)^2+(z+z_0)^2}. \quad (3.6)$$

Из уравнений (3.3) следует, что с ростом времени z_0^2 уменьшается, что, согласно формулам (3.5) и (3.6), соответствует уменьшению магнитного поля. При этом если $z_0^2 \gg \rho^2$, то характерный масштаб (ядро) вихря стремится к значению l так, что $\rho - l \sim \exp(-\tau)$, а z_0^2 уменьшается по линейному закону $2l^2\tau$. Если же кинк и антикинк достаточно сблизились, так что $z_0^2 \ll \rho^2$, то согласно уравнениям (2.3) характерный масштаб вихря увеличивается по линейному закону $\rho \sim l\tau$, а расстояние между вихрем и антивихрем быстро убывает по экспоненциальному закону $\exp(-\tau)$. Эти закономерности отвечают аннигиляции двух вихрей Абрикосова–Джозефсона, магнитное поле которых согласно (3.4) исчезает при обращении в нуль z_0.

Приведем теперь еще одно решение уравнения (1.6) при $\gamma = 0$:

$$\varphi(z,\tau) = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z+z_0(\tau)}{\rho(\tau)} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z-z_0(\tau)}{\rho(\tau)}, \quad (3.7)$$

которое, как и решение (3.1), описывается флуксон и антифлуксон. При этом магнитное поле линейной суперпозиции (3.7) описывается, как и в случае (3.1), формулой (3.4). Единственное отличие решения (3.7) от (3.1) заключается в наличии постоянной фазы π в формуле (3.7). Однако это отличие приводит к нелинейному изменению обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию расстояния между вихрями в (3.7) и временную эволюцию ядра $\rho(\tau)$ вихрей. Именно подстановка выражения (3.7) в уравнение (1.6) и использование преобразования (2.2) дает в отличие от (3.3) следующие уравнения:

$$\frac{dz_0}{d\tau} = \frac{z_0\rho^2}{z_0^2+\rho^2}, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = l + \frac{z_0^2\rho}{z_0^2+\rho^2}. \quad (3.8)$$

Отсюда с очевидностью следует, что расстояние между кинком и антикинком в (3.7) увеличивается с ростом времени. Иными словами, решение (3.7), в отличие от аннигиляционного решения (3.1), описывает разбегание двух вихрей с одновременным их расплыванием.

4. Продолжая обсуждение нелинейного проявления свойств вихрей в свойствах решений уравнения (1.6), представляющих линейные суперпозиции вихрей, обратимся теперь к случаю отличного от нуля закорачивающего тока ($\gamma \neq 0$). Здесь, прежде всего, укажем на не зависящее от времени решение, описывающее покоющуюся пару флуксона (2π-кинка) и антифлуксона (антикинка):

$$\varphi(z) = \arcsin\gamma + 2\,\mathrm{arctg}\left(\left[\frac{z}{l} + \frac{1}{\gamma}\right]\sqrt{1-\gamma^2}\right) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\left[\frac{z}{l} - \frac{1}{\gamma}\right]\sqrt{1-\gamma^2}\right). \tag{4.1}$$

Интегральное преобразование (2.2) легко позволяет убедиться в том, что (4.1) удовлетворяет уравнению (1.6). С другой стороны, решение (4.1) вполне аналогично соответствующему известному решению статического аналога уравнения (1.6), которое было получено в теории дислокаций Пайерлса–Набарро [22]. Магнитное поле, отвечающее паре вихрь–антивихрь (4.1), дается формулами (3.4)–(3.6), в которых характерный размер ядра вихря $\rho = (l/\sqrt{1-\gamma^2})$, а расстояние между вихрями $2z_0 = 2l/\gamma$. С уменьшением тока расстояние между стационарными вихрями (4.1) растет, а структура магнитного поля каждого вихря приближается к структуре изолированного вихря, поскольку ρ приближается к l.

Нестационарное обобщение решения (4.1), отвечающее нелинейному состоянию двух взаимодействующих вихрей Абрикосова–Джозефсона при $\gamma \neq 0$, может быть представлено в виде

$$\varphi(z,t) = \theta(\tau) + 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{z + z_0(\tau)}{\rho(\tau)}\right] - 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{z - z_0(\tau)}{\rho(\tau)}\right]. \tag{4.2}$$

При этом функция $\theta(\tau)$ удовлетворяет уравнению (1.15). Поэтому формулу (4.2) можно трактовать как описывающую линейную суперпозицию двух вихрей на фоне пространственно-однородного токового состояния. Магнитное поле снова описывается формулами (3.4)–(3.6). Однако функции ρ и z_0 теперь подчиняется следующей системе нелинейных обыкновенных уравнений:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = l - \frac{\rho z_0}{z_0^2 + \rho^2}\left[\rho\sin\theta + z_0\cos\theta\right], \tag{4.3}$$

$$\frac{dz_0}{d\tau} = \frac{\rho z_0}{z_0^2 + \rho^2}\left[z_0\sin\theta - \rho\cos\theta\right]. \tag{4.4}$$

В частных случаях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, отвечающих стационарному решению уравнения (1.15), имеем формальный переход этих уравнений соответственно в уравнения (3.3) и (3.8).

В случае постоянного тока, когда $\gamma^2 < 1$ и имеется решение (1.16) уравнения (1.5), система уравнений отвечает автономной динамической системе второго порядка. Соответственно из уравнений (4.3) и (4.4) следует

$$\frac{d\rho}{dz_0} = \frac{z_0^2(l - \rho\cos\theta) + \rho^2(l - z_0\sin\theta)}{\rho z_0(z_0\sin\theta - \rho\cos\theta)}. \tag{4.5}$$

Это уравнение позволяет видеть на фазовой плоскости (ρ, z_0) одну особую (стационарную) точку динамической системы

$$\rho \cos\theta = l, \quad z_0 \sin\theta = l. \tag{4.6}$$

Этой точке соответствует стационарное состояние двух взаимодействующих вихрей, описываемое формулой (4.1). Вблизи стационарной точки, когда

$$\rho = (l/\cos\theta) + \Delta\rho, \quad z_0 = (l/\sin\theta) + \Delta z_0,$$

а $\Delta\rho$ и Δz_0 мало, уравнение (4.5) дает

$$\frac{d(\Delta\rho\cos\theta)}{d(\Delta z_0 \sin\theta)} = \frac{\Delta z_0 \sin\theta + \operatorname{ctg}^2\theta(\Delta\rho\cos\theta)}{\Delta\rho\cos\theta - \Delta z_0 \sin\theta}. \tag{4.7}$$

Согласно обычной классификации особых точек на фазовой плоскости [17, 18] стационарная точка (4.6), как это следует из уравнения (4.7), является седловиной. Стационарная точка (4.7) оказывается неустойчивой. Вдали от особой точки можно видеть два качественно различных режима. Во-первых, если вихрь и антивихрь находятся достаточно близко друг к другу, так что $\rho\sin\theta \gg z_0\cos\theta$ и $\rho\cos\theta \gg z_0\sin\theta$, то дальнейшая происходящая при этом эволюция сближения вихрей определяется законом $z_0 \sim \exp(-\tau\sqrt{1-\gamma^2})$. При этом, если $z_0\sin\theta < l$, сравнительно медленное расползание вихря происходит по закону $\rho \sim l\tau$. Видно, что наличие отличного от нуля тока ($\gamma \neq 0$) замедляет аннигиляцию вихрей. Во-вторых, когда вихрь и антивихрь достаточно сильно удалены ($z_0\cos\theta \gg \rho\sin\theta$, $\rho\cos\theta \ll z_0\sin\theta$), происходит дальнейшее разбегание вихрей. При этом эволюция взаимодействующих вихря и антивихря определяется тем, что размер их ядер стремится к $(l/\sqrt{1-\gamma^2})$, а расстояние между ними изменяется по закону $(2\gamma l/\sqrt{1-\gamma^2})\tau$. Иными словами, асимптотический режим разбегания отвечает

$$\varphi_{ass}(z,t) = \arcsin\gamma + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{z+vt}{l}\sqrt{1-\gamma^2}\right) - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{z-vt}{l}\sqrt{1-\gamma^2}\right), \tag{4.8}$$

где асимптотическая скорость разбегания вихрей равна

$$v = \frac{2|e|R_s jl}{\hbar\sqrt{1-(j/j_c)^2}} = \frac{c^2 R_s}{8\pi\lambda^2}\frac{j}{\sqrt{j_c^2 - j^2}}, \tag{4.9}$$

что соответствует скорости равномерного движения единичного вихря Абрикосова–Джозефсона (1.8).

5. Рассмотрим еще один класс решений уравнения (1.6) при $\gamma \neq 0$, который позволяет видеть линейную суперпозицию пространственных структур, количественные характеристики которых, а также временная эволюция носят существенно нелинейный характер. Укажем, прежде всего, статическое решение, отвечающее двум наложенным периодическим цепочкам вихрей и антивихрей на фоне пространственно-однородной фазы (1.16), при выполнении условия $\gamma^2 < 1$ определяющейся током,

$$\begin{aligned}\varphi(z) = \arcsin\gamma \pm \\ \pm 2\operatorname{arctg}\left\{\left[\frac{L}{l}\sqrt{1-\gamma^2} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2}(1-\gamma^2) - 1}\right]\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2L} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{l}{\gamma L}\right)\right\} \mp \\ \mp 2\operatorname{arctg}\left\{\left[\frac{L}{l}\sqrt{1-\gamma^2} + \sqrt{\frac{L^2}{l^2}(1-\gamma^2) - 1}\right]\operatorname{tg}\left(\frac{z}{2L} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{l}{\gamma L}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Отметим здесь, что это токовое решение, так же как и стационарное решение (4.1) и решение (1.16), отвечает равному нулю напряжению на вольт-амперной характеристике джозефсоновского перехода. В отличие от (1.16) решения (5.1) и (4.1) являются существенно пространственно-неоднородными. Формула (5.1) может рассматриваться как линейная суперпозиция, что следует из вида магнитного поля. В то же время пространственно-однородная фаза существенно нелинейным образом влияет на свойства пространственно-неоднородных периодических цепочек вихрей.

Очевидно также нелинейное влияние взаимодействующих вихрей в случае нестационарного аналога решения (5.1):

$$\varphi(z,\tau) = \theta(\tau) + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\left[\dfrac{z+z_0(\tau)}{2L}\right]}{\mathrm{th}\left[\alpha(\tau)/2\right]}\right) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\left[\dfrac{z-z_0(\tau)}{2L}\right]}{\mathrm{th}\left[\alpha(\tau)/2\right]}\right). \tag{5.2}$$

При этом функция $\theta(\tau)$ определяется уравнением (1.15). Поэтому можно сказать, что цепочки вихрей и антивихрей, отвечающие остальным двум слагаемым формулы (5.2), не влияют на пространственно-однородную фазу θ. Напротив, влияние фазы θ на пространственно-периодические цепочки вихрей существенно и является нелинейным, что видно из уравнений, которым подчиняются функции z_0 и α:

$$\frac{1}{L}\frac{dz_0}{d\tau} = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L}\left[\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L} - \cos\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\dfrac{z_0}{L}\right]}{\mathrm{ch}^2\alpha - \cos^2(z_0/L)}, \tag{5.3}$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{l}{L} - \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sin(z_0/L)}{\mathrm{ch}^2\alpha - \cos^2(z_0/L)}\left[\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\frac{z_0}{L} + \cos\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\frac{z_0}{L}\right]. \tag{5.4}$$

Если ток j не зависит от времени и $\gamma^2 < 1$, то уравнения (5.3), (5.4) отвечают автономной динамической системе, анализ свойств которой может быть проведен на фазовой плоскости (α, z_0) с помощью уравнения

$$L\frac{d\alpha}{dz_0} = \frac{\dfrac{l}{L}\left[\mathrm{ch}^2\alpha - \cos^2\dfrac{z_0}{L}\right] - \mathrm{sh}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L}\left[\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\dfrac{z_0}{L} + \cos\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L}\right]}{\mathrm{sh}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L}\left[\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\dfrac{z_0}{L} - \cos\theta\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\dfrac{z_0}{L}\right]}. \tag{5.5}$$

Отсюда, в частности, следует, что стационарная (особая) точка имеет место при

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{L\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \frac{z_0}{L} = \mathrm{arctg}\,\frac{l}{\gamma L}, \tag{5.6}$$

что соответствует стационарному решению (5.1).

С другой стороны, система уравнений (5.3), (5.4) позволяет проследить процесс аннигиляции цепочки вихрей и антивихрей, которому отвечает уменьшение расстояния между цепочками $2z_0$ с ростом времени. В частности, когда вихревые цепочки оказываются достаточно сильно сближены, $z_0 \ll L$, уравнения (5.3) и (5.4) принимают вид

$$\frac{dz_0}{d\tau} = -z_0\cos\theta, \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{l}{L} - \frac{z_0}{L}\sin\theta. \tag{5.7}$$

Эти уравнения подобны описывающим эволюцию пары вихрь–антивихрь. Из них следует экспоненциально быстрое убывание z_0 с ростом времени, а при $z_0 \sin\theta \ll l$ происходит более медленное размытие вихря, когда размер его ядра растет по линейному закону.

6. Подводя итог всему изложенному выше, следует прежде всего подчеркнуть, что наблюдение над уже известными ранее решениями резистивной модели как для отдельных вихрей Абрикосова–Джозефсона (1.7), (1.8), так и для цепочки этих вихрей (1.9) позволяет представить использованное в нашей статье свойство суперпозиции как в виде пространственно-однородной и неоднородной фаз в случае (1.7)–(1.9), (2.1), так и неоднородных фаз (3.1), (3.7), (4.1), (4.2), (4.8), (5.1), (5.2). Во всех рассмотренных случаях нелинейный характер вихревых структур определяется теми нелинейными закономерностями, которые определяют пространственные размеры структур и которые в нестационарных случаях определяют временную эволюцию взаимодействующих вихрей.

Среди выявленных закономерностей отметим аннигиляцию вихрей Абрикосова–Джозефсона, их разбегание и расплывание как в случае отдельных вихрей, так и в случае периодических структур. Отметим также установленное выше положение об устойчивости бегущей цепочки вихрей (1.9) с вольт-амперной характеристикой (1.12), (1.13), а также о релаксационно-колебательных свойствах установления такой бегущей цепочки.

В связи с возможным экспериментальным проявлением свойств нелокальной джозефсоновской электродинамики сделаем следующее замечание. Если условие (1.4) (или отвечающее ему в развернутой форме условие (1.1)) в случае туннельного перехода между массивными сверхпроводниками может требовать для своей реализации экстремальных значений критической плотности тока Джозефсона, то ситуация упрощается для джозефсоновского перехода в тонкой пленке. Действительно, если толщина пленки D оказывается меньше лондоновской длины ($D \ll \lambda$), роль эффективной глубины мейсснеровской экранировки играет $\lambda_e = \lambda^2/D$. Тогда, как известно (см., например, [9, 10]), для реализации ярко выраженного предела нелокальной джозефсоновской электродинамики необходимо выполнение условия $\lambda_j \ll \lambda_e$. Это приводит к уменьшению величины критической плотности джозефсоновского тока, требующего использования нелокального подхода, по сравнению с j_0 формулы (1.1), в (D/λ) раз [9], что расширяет область экспериментального изучения обсуждаемых эффектов.

Однако и без такого расширения на случай тонких пленок наше рассмотрение свойств переходов между массивными сверхпроводниками открывает возможность описания режима достаточно сильных магнитных полей. Так, вольт-амперная характеристика (1.12), (1.13) в соответствии с формулой (1.14) пригодна, в частности, когда $\overline{H} > H_0 = \phi_0/4\pi\lambda^2$, т. е. тогда, когда масштаб периодической неоднородности бегущей цепочки вихрей Абрикосова–Джозефсона оказывается меньше лондоновской длины. Если последняя составляет $10^{-5} \div 10^{-4}$ см, то $H_0 \sim 160 \div 1.6$ Э. Иными словами, для сверхпроводников с достаточно большими лондоновскими длинами проявление закономерностей нелокальной джозефсоновской электродинамики возможно при сравнительно небольших магнитных полях, которые, однако, оказываются настолько сильными, что запрещают использование обычной локальной электродинамики джозефсоновских переходов. В случае пленок соответствующие магнитные поля могут быть еще более слабыми.

Работа выполнена при поддержке Научного совета по ВТСП (проект «АД» № 95008) и в рамках проекта № 96-02-17303 Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987), с. 520.
2. И. О. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1976), с. 276.
3. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977), с. 622.
4. Yu. S. Kivshar and B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61**(4), 763 (1989).
5. Yu. M. Aliev, G. L. Alfimov, K. N. Ovchinnikov, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, Low Temp. Phys. **22**(6), 477 (1996).
6. Г. М. Лапир, К. К. Лихарев, Л. А. Маслова, В. К. Семенов, ФНТ **1**(10), 1235 (1975).
7. K. K. Likharev, Rev. Mod. Phys. **51**(1), 101 (1979).
8. Ю. А. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Сверхпроводимость: физика, химия, техника **5**(2), 228 (1992).
9. A. Gurevich, Phys. Rev. B **46**, 3187 (1992).
10. М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев, А. К. Семенов, ФНТ **2**(6), 706 (1976).
11. Ю. А. Алиев, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Письма в ЖЭТФ **57**(3), 187 (1993).
12. A. Gurevich, Phys. Rev. B **48**, 12857 (1993).
13. A. Gurevich, Physica C **243**, 191 (1995).
14. Г. Л. Алфимов, В. П. Силин, ЖЭТФ **106**(2), 691 (1994).
15. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ **60**(6), 442 (1994).
16. B. A. Malomed and A. V. Ustinov, Phys. Rev. B **49**, 13024 (1994).
17. В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, ГОНТИ, М.-Л. (1939), с. 384.
18. Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, Москва (1976), с. 496.
19. Л. Г. Асламазов, А. И. Ларкин, Письма в ЖЭТФ **9**, 150 (1969).
20. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 2, Наука, Москва (1970), с. 327.
21. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ **104**(1), 2526 (1993).
22. A. Seeger, in *Handbuch der Physik*, v. 7, part 1, Kristallphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955), p. 383.