ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 4(10), стр. 1499–1509

СТРУКТУРА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ H_{c2} ПРИ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ κ БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

Ю. Н. Овчинников

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 апреля 1997 г.

Показано, что вблизи температуры перехода T_c коэффициенты при втором и третьем членах в разложении свободной энергии по степеням $(H_{c2} - B)$ (B — индукция магнитного поля внутри сверхпроводника) обращаются в нуль одновременно при значении параметра Гинзбурга–Ландау $\kappa = 1$. Тем самым структура смешанного состояния вблизи H_{c2} при значениях параметра κ близких к единице определяется температурной поправкой к коэффициенту при третьей степени и коэффициентом при четвертой степени в разложении свободной энергии по степеням $(H_{c2} - B)$. Значения этих коэффициентов зависят от типа вихревой решетки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Смешанное состояние сверхпроводников было исследовано в работе Абрикосова [1]. Величина магнитного поля внутри сверхпроводника $H(\mathbf{r})$ и, в частности, магнитная индукция $B = \langle H(\mathbf{r})\rangle$, была им найдена из уравнения для векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. также [2–4]). Фактически же величина индукции $\mathbf{B}$ не может быть найдена из уравнений для параметра порядка Δ и векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, поскольку в термодинамическом пределе эта система уравнений имеет огромное число решений порядка eHR^2 (R — характерный поперечный размер сверхпроводника). Величина индукции B определяется из условия минимума свободной энергии относительно площади элементарной ячейки (или индукции B) при заданном значении внешнего магнитного поля H_0 [5]. Физически такая неоднозначность связана с возможностью протекания поверхностных токов, создающих полный магнитный момент того же порядка, что и объемные вихревые токи.

Ниже мы покажем, что вблизи температуры перехода T_c, коэффициенты при втором и третьем членах разложения свободной энергии по степеням $(H_{c2}-B)$ обращаются в нуль одновременно при значении параметра Гинзбурга–Ландау $\kappa = 1$. Следовательно, имеются три малых параметра: $1 - T/T_c$, $\kappa^2 - 1$ и $(1 - B/H_{c2})$. В результате структура смешанного состояния зависит от температурной поправки $\sim (1 - T/T_c)$ к коэффициенту при третьей степени и величины коэффициента при четвертой степени разложения свободной энергии по степеням $(H_{c2} - B)$. Таким образом, уравнение для B есть полином третьей степени. В общем случае у него имеются три корня. Следует ожидать, что коэффициент при члене $(H_{c2} - B)^4$ в разложении свободной энергии по степеням $(H_{c2} - B)$ положителен. В этом случае свободная энергия как функция B имеет два локальных минимума и один максимум. Мы исследуем три типа решеток: треугольную с одним и двумя квантами потока в ячейке и квадратную с одним квантом потока в ячейке. Одновременное обращение в нуль двух коэффициентов при $\kappa = 1$ происходит для всех трех типов решеток.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ H_{c2}

Вблизи температуры перехода T_c свободную энергию F_S сверхпроводника во внешнем магнитном поле H_0 можно представить в виде [6]

$$F_S - F_N = \nu \int d^3\mathbf{r} \left\{ -\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) |\Delta|^2 + \frac{\pi D}{8T_c} |\partial_- \Delta|^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2 T_c^2} |\Delta|^4 \right\} + \\ + \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} (\mathrm{rot}^2 \mathbf{A} - 2H_0 \,\mathrm{rot}\, \mathbf{A} + \mathbf{H}_0^2), \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $\partial_- = \partial/\partial\mathbf{r} - 2ie\mathbf{A}$, $\nu = mp_0/2\pi^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми. Коэффициент D зависит от транспортной длины свободного пробега электронов l_{tr} и равен

$$D = D_{\mathrm{dif}}\eta; \quad D_{\mathrm{dif}} = \frac{vl_{tr}}{3}; \quad \eta = 1 - \frac{8T\tau_{tr}}{\pi} \left(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau_{tr}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right), \\ l_{tr} = v\tau_{tr}. \tag{2}$$

В формуле (2) v — скорость электронов на поверхности Ферми, $\psi(x)$ — ψ-функция Эйлера. Ниже мы покажем, что для полного исследования состояний сверхпроводника при значениях параметра Гинзбурга–Ландау κ вблизи единицы необходимо дополнить выражение (1) для свободной энергии членами следующего по $(1 - T/T_c)$ порядка малости. Эта задача выходит за рамки данной статьи и не будет здесь рассматриваться.

Варьируя свободную энергию (1) по Δ и $\mathbf{A}$, получаем систему уравнений Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\pi D}{8T_c} \partial_-^2 \Delta + \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \Delta - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} |\Delta|^2 \Delta = 0, \\ \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \mathbf{j}; \quad j = \frac{i\pi e\nu D}{4T_c} (\Delta \partial_+ \Delta^* - \Delta^* \partial_- \Delta). \tag{3}$$

Как было показано в работе [6], в точке H по магнитному полю

$$H = H_{c2} = \frac{4T_c}{\pi e D} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \tag{4}$$

линеаризованная система уравнений (3) имеет решения вида

$$\Delta = \exp\left(2ieHx_1 y - eH(x - x_1)^2\right) \tag{5}$$

при произвольном значении параметра x_1. При получении выражения (5) использована калибровка

$$\mathbf{A} = (0; Hx; 0). \tag{6}$$

Во внешнем магнитном поле $H_0 < H_{c2}$ будем искать решения системы уравнений (3) такие, что все физические величины $|\Delta|^2$, $H(x,y)$, j суть периодические функции координат. Предположим, что $\mathbf{a}_{1,2}$ — векторы элементарной ячейки, т. е.

$$|\Delta(\mathbf{r} + N\mathbf{a}_1 + M\mathbf{a}_2)|^2 = |\Delta(\mathbf{r})|^2 . \tag{7}$$

Из условия периодичности плотности тока и $|\Delta|^2$ находим

$$\oint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{r}} - 2e\mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = 0, \tag{8}$$

где Γ — замкнутый контур, идущий вдоль ребер элементарной ячейки, χ — фаза параметра порядка. Поскольку параметр порядка — однозначная функция координат, уравнение (7) приводит к условию квантования магнитного потока ϕ через элементарную ячейку

$$\phi = \frac{\pi}{e} N, \quad N = 1, 2... \tag{9}$$

Это точное соотношение существенно упрощает поиск решений системы уравнений (3).

В магнитном поле H_0 близком к H_{c2} решение системы уравнений (3) ищем в виде ряда по степеням $(H_{c2} - B)$

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0) + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + ...,$$

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + ...,$$

$$\Delta_0 = \sum_N C_N \exp\left(2ieBNx_1y - eB(x - Nx_1)^2\right), \tag{10}$$

где B — индукция магнитного поля внутри сверхпроводника ($B = \langle H(\mathbf{r}) \rangle$), векторы $\mathbf{A}_k$ имеют две ненулевые компоненты (1, 2) и пропорциональны $(H_{c2} - B)^k$. Величины $|\Delta_k|^2 \sim (H_{c2} - B)^{2k+1}$, $C_N^2 \sim H_{c2} - B$. Ниже мы будем использовать калибровку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. В этой калибровке все величины $\mathbf{A}_k$ — периодические функции координат. В калибровке, использованной в работе [1], величины A_k — растущие функции x, что приводит к дополнительным трудностям при решении системы уравнений (3).

Из уравнений (1), (10) следует, что плотность свободной энергии $(F_S - F_N)/V$ представима в виде ряда по степеням $(H_{c2} - B)$:

$$\frac{F_S - F_N}{V} = \frac{1}{8\pi} \left\{ (B - H_0)^2 + P_1 (H_{c2} - B)^2 + \frac{P_2}{H_{c2}} (H_{c2} - B)^3 + \frac{P_3}{H_{c2}^2} (H_{c2} - B)^4 + ... \right\}. \tag{11}$$

Коэффициенты P_k в уравнении (11) определяются типом вихревой решетки и величиной параметра Гинзбурга–Ландау κ.

Индукция B находится из условия минимума свободной энергии (1), (11) относительно B при заданном значении величины H_0 внешнего магнитного поля [5]

$$\frac{\partial (F_S - F_N)}{\partial B} = 0. \tag{12}$$

Наша задача — найти коэффициенты P_1, P_2 в разложении (11). Для того чтобы сделать это, необходимо найти величины Δ_0, Δ_1 и $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$.

Условия периодичности (7) накладывают жесткие ограничения на значения коэффициентов C_N (уравнение (10)). Для различных типов решеток находим:

$$C_N = C_0 \exp\left(-\frac{i\pi}{2} N^2\right) \tag{13а}$$

— треугольная решетка с одним квантом потока,

$$C_{N+1} = C_N = C_0 \tag{13б}$$

— квадратная решетка с одним квантом потока,

$$C_{N+1} = C_N = C_0 \tag{13в}$$

— треугольная решетка с двумя квантами потока. Коэффициент C_0 во всех случаях может быть положен вещественным.

Для построения функций Δ_1, Δ_2... нам понадобится базис из собственных функций оператора $\hat{L}$

$$\hat{L} = -\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - 2ieBx\right)^2\right], \quad \hat{L} f_n = \lambda_n f_n. \tag{14}$$

Оператор $\hat{L}$ хорошо изучен. Все его собственные значения λ_n даются выражением

$$\lambda_n = 4eB(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2... \tag{15}$$

Каждое собственное значение бесконечнократно вырождено

$$f_n \equiv f_n(x_1, \mathbf{r}) = \exp(2ieBx_1 y) D_n\left(2\sqrt{eB}\,(x - x_1)\right), \tag{16}$$

где x_1 — произвольное вещественное число, D_n — функция параболического цилиндра [7]:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} \exp(-z^2/4) H_n\left(z/\sqrt{2}\right). \tag{17}$$

В уравнении (17) H_n — полином Эрмита. Поправка Δ_1 к параметру порядка может быть представлена в виде

$$\Delta_1 = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} Q_N^M \exp(2ieBNx_1 y) D_M\left(2\sqrt{eB}(x - Nx_1)\right). \tag{18}$$

Из условия периодичности (7) для всякого типа решетки находим

$$Q_N^M = \alpha_M C_N, \tag{19}$$

где α_M — не зависящее от M комплексное число. В дальнейшем для удобства положим

$$\Delta_1^M = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N \exp(2ieBNx_1y)D_M\left(2\sqrt{eB}(x-Nx_1)\right),$$

$$M = 1, 2... \tag{20}$$

С помощью формулы (20) выражение для поправки к параметру порядка Δ_1 принимает вид

$$\Delta_1 = \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M \Delta_1^M. \tag{21}$$

В рассматриваемом приближении система уравнений (3) принимает вид

$$\frac{\pi eD}{4T_c}H_{c2}(\Delta_0+\Delta_1) - \frac{\pi D}{4T_c}\times$$
$$\times\left[eB\Delta_0 + 2eB\sum_{M=1}^{\infty}\left(M+\frac{1}{2}\right)\alpha_M\Delta_1^M + 2ieA_1\partial_-\Delta_0\right] - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}|\Delta_0|^2\Delta_0 = 0,$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2) = 4\pi\mathbf{j},$$

$$j = -\frac{\pi e\nu D}{4T_c}\left(\frac{\partial}{\partial y};\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)|\Delta_0|^2+$$

$$+\frac{i\pi e\nu D}{4T_c}\left[4ieA_1|\Delta_0|^2 + \Delta_1\partial_+\Delta_0^* + \Delta_0\partial_+\Delta_1^* - \Delta_0^*\partial_-\Delta_1 - \Delta_1^*\partial_-\Delta_0\right], \tag{22}$$

где

$$\partial_\pm = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y} \pm 2ieBx\right). \tag{23}$$

Из системы уравнений (22) с учетом ортогональности функций Δ_0, Δ_1 находим

$$H_1(r) = -\frac{\pi^2 e\nu D}{T_c}\left(|\Delta_0|^2 - \langle|\Delta_0|^2\rangle\right), \quad \mathbf{H}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1,$$

$$\frac{\pi eD}{4T_c}(H_{c2}-B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \frac{1}{4\pi\nu}\langle H_1^2(r)\rangle - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}\langle|\Delta_0|^4\rangle = 0,$$

$$\frac{\pi eBDM}{2T_c}\alpha_M\langle\Delta_1^M\Delta_1^{M*}\rangle = -\frac{i\pi eD}{4T_c}\langle A_1(\Delta_1^{M*}\partial_-\Delta_0 - \Delta_0\partial_+\Delta_1^{M*})\rangle - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}\langle|\Delta_0|^2\Delta_0\Delta_1^{M*}\rangle,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{A}_1 = \frac{\pi^2 e\nu D}{T_c}\left(\frac{\partial}{\partial y};\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)|\Delta_0|^2. \tag{24}$$

Выражение (1) для плотности свободной энергии $(F_S-F_N)/V$ с помощью формул (10), (20), (21), (22), (24) приводится к довольно простому виду:

$$\frac{F_S - F_N}{V} = \frac{1}{8\pi}(B - H_0)^2 + \frac{7\zeta(3)\nu}{16\pi^2 T_c^2}\left(\langle|\Delta_0|^4\rangle\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}{\kappa^2}\right) -$$
$$- \frac{\pi e\nu D}{4T_c}(H_{c2} - B)\langle|\Delta_0|^2\rangle + \frac{\pi e^2\nu D}{2T_c}\langle A_1^2|\Delta_0|^2\rangle -$$
$$- \frac{\pi eB}{2T_c}\sum_{M=1}^{\infty} M|\alpha_M|^2\langle\Delta_1^M\Delta_1^{M*}\rangle. \tag{25}$$

Из первых двух уравнений в формулах (24) находим

$$\langle|\Delta_0|^2\rangle = \frac{2\pi^3 eDT_c}{7\zeta(3)}\,\frac{H_{c2} - B}{\beta - (\beta - 1)/\kappa^2}, \tag{26}$$

где

$$\beta = \frac{\langle|\Delta_0|^4\rangle}{\langle|\Delta_0|^2\rangle^2}, \quad \kappa = \frac{1}{\pi^2 eD}\left(\frac{7\zeta(3)}{2\pi\nu}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к разложению в ряды Фурье функций $|\Delta_0|^2$, $\mathbf{A}_1, \ldots$ В изотропном сверхпроводнике следует ожидать, что $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$ и угол между векторами $\mathbf{a}_{1,2}$ равен $\pi/3$ или $\pi/2$. Предположим, что $\mathbf{K}_{1,2}$ — элементарные векторы обратной решетки. Параметр порядка $|\Delta_0|^2$ в этом случае может быть представлен в виде

$$|\Delta_0|^2 = \sum_{N,M=-\infty}^{\infty} C_{NM}\exp\left(i(N\mathbf{K}_1 + M\mathbf{K}_2)\mathbf{r}\right). \tag{28}$$

Дальнейшие вычисления зависят от типа решетки.

Для треугольной решетки с одним квантом потока в ячейке находим

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}x_1}(0,1), \quad \mathbf{K}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}x_1}\left(\sqrt{3}; -1\right),$$

$$2\sqrt{3}Bx_1^2 = \pi, \quad C_N = C_0\exp\left(-\frac{i\pi}{2}N^2\right),$$

$$C_{NM} = C_0^2 3^{1/4}\exp\left(-i\pi NM - \frac{\pi}{\sqrt{3}}(N^2 + M^2 - NM)\right). \tag{29}$$

Для квадратной решетки с одним квантом потока в ячейке получаем

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi}{x_1}(0,1), \quad \mathbf{K}_2 = \frac{2\pi}{x_1}(1,0),$$

$$eBx_1^2 = \pi, \quad C_{N+1} = C_N = C_0,$$

$$C_{NM} = \frac{C_0^2}{\sqrt{2}}(-1)^{NM}\exp\left(-\frac{\pi}{2}(N^2 + M^2)\right). \tag{30}$$

Приведем также выражение для величин, характеризующих треугольную решетку с двумя квантами потока в ячейке

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}x_1}(0,1), \quad \mathbf{K}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}x_1}\left(\sqrt{3}, -1\right),$$

$$\sqrt{3}Bx_1^2 = \pi, \quad C_{N+1} = C_N = C_0, \quad C_{N,2K+1} = 0,$$

$$C_{N,2K} = \frac{C_0^2 3^{1/4}}{\sqrt{2}} \exp\left(i\pi K(N-K) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(N^2 + 4K^2 - 2NK)\right). \tag{31}$$

Используя уравнение (20) для явного вида функций Δ_1^M, находим что

$$\langle \Delta_1^M \Delta_1^{M*} \rangle = \langle |\Delta_0|^2 \rangle M! \tag{32}$$

Для вычисления величин α_M нам понадобится следующее соотношение:

$$\Delta_1^M \partial_+ \Delta_0^* - \Delta_0^* \partial_- \Delta_1^M = i\left(\frac{\partial}{\partial y};\ -\frac{\partial}{\partial x}\right)|\Delta_0|^2 - 2\sqrt{eB}M\Delta_0^*\Delta_1^{M-1}(1;\ -i). \tag{33}$$

Явный вид векторного потенциала $\mathbf{A}_1$ легко находится из уравнений (24), (28):

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{i\pi^2 e\nu D}{T_c} \sum_{\mathbf{K}_{NM} \neq 0} C_{NM}\left((\mathbf{K}_{NM})_y; -(\mathbf{K}_{NM})_x\right) \exp(i\mathbf{K}_{NM}\mathbf{r})/\mathbf{K}^2_{NM}. \tag{34}$$

Представим теперь функцию $\Delta_0^*\Delta_1^M$ в виде ряда Фурье

$$\Delta_0^*\Delta_1^M = \sum_{N_1 K} C_{NK}^M \exp(i\mathbf{K}_{NM}\mathbf{r}). \tag{35}$$

Коэффициенты C_{NK}^M зависят от типа решетки:

$$C_{NK}^M = C_{NK}(-1)^M \times$$
$$\times \begin{cases} \left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^{M/2}\left(N - \dfrac{K}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}K\right)^M, & \text{треугольная, один квант потока,} \\ \pi^{M/2}(N+iK)^M, & \text{квадратная, один квант потока;} \end{cases}$$

треугольная, два кванта потока:

$$C_{N,2K+1}^M = 0,$$
$$C_{N,2K}^M = C_{N,2K}(-1)^M\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{M/2}\left(N - K + i\sqrt{3}K\right)^M. \tag{36}$$

Используя формулы (34)–(36), находим следующее выражение для корреляторов $i\langle \mathbf{A}_1(1;-i)\Delta_0^*\Delta_1^{M-1}\rangle$, определяющих значение коэффициентов α_M:

$$i\langle \mathbf{A}_1(1;-i)\Delta_0^*\Delta_1^{M-1}\rangle =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{e\nu}D}{2T_c\sqrt{B}} \sum_{N,K} C_{NK} C_{NK}^{M} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}(N^2 + K^2 - NK)^{-1} \\ (N^2 + K^2)^{-1} \\ \sqrt{3}(N^2 + K^2 - NK)^{-1} \end{cases} \tag{37}$$

В формуле (37) справа от фигурной скобки верхняя строчка соответствует треугольной решетке с одним квантом потока, средняя — квадратной решетке с одним квантом потока и нижняя — треугольной решетке с двумя квантами потока.

Из формул (24), (26), (35)–(37) находим следующее выражение для коэффициентов α_M:

$$\alpha_M = -\frac{(-1)^M}{2M \cdot M!} \frac{H_{c2} - B}{B\left(\beta - (\beta - 1)/\kappa^2\right)} D_M, \tag{38}$$

где коэффициенты D_M зависят от типа решетки:

$$D_M = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^{M/2} \sum_{N^2+K^2\neq 0} \left(\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{M\sqrt{3}}{2\pi\kappa^2} \frac{1}{N^2 + K^2 - NK}\right) \times$$
$$\times \left(N - \frac{K}{2} - \frac{i\sqrt{3}K}{2}\right)^M \exp\left(-\frac{2\pi(N^2 + K^2 - NK)}{\sqrt{3}}\right),$$
$$D_M = \pi^{M/2} \sum_{N^2+K^2\neq 0} \left(\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{M}{\pi\kappa^2} \frac{1}{N^2 + K^2}\right) (N - iK)^M \exp\left(-\pi(N^2 + K^2)\right), \tag{39}$$
$$D_M = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{M/2} \sum_{N^2+4K^2-2NK\neq 0} \left(\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{M\sqrt{3}}{\pi\kappa^2} \frac{1}{N^2 + 4K^2 - 2NK}\right) \times$$
$$\times \left(N - K - i\sqrt{3}K\right)^M \exp\left(-\frac{\pi(N^2 + 4K^2 - 2NK)}{\sqrt{3}}\right).$$

Распределение строчек в формуле (39) по типам решеток то же самое, что и в формуле (37).

И наконец, с помощью формул (34)–(39) выражение (25) для плотности свободной энергии приводится к виду

$$\frac{F_S - F_N}{V} = \frac{1}{8\pi}(B - H_0)^2 - \frac{(H_{c2} - B)^2}{8\pi\kappa^2\left(\beta - (\beta - 1)/\kappa^2\right)} -$$
$$- \frac{(H_{c2} - B)^3}{8\pi\kappa^2 B\left(\beta - (\beta - 1)/\kappa^2\right)^3} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{D_M^2}{MM!} + \frac{(H_{c2} - B)^3}{8\pi\kappa^6 B\left(\beta - (\beta - 1)/\kappa^2\right)^3} G. \tag{40}$$

В формуле (40) коэффициент G зависит от типа решетки, и мы приведем его значение для трех типов решеток в том же порядке, что и в формуле (37):

$$G = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} \sum \frac{NN_1 + KK_1 - 0.5(N_1K + K_1N)}{(N^2 + K^2 - NK)(N_1^2 + K_1^2 - N_1K_1)} (-1)^{N_1K + NK_1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(N^2 + K^2 + N_1^2 + K_1^2 - NK - N_1K_1 - NN_1 - KK_1 + 0.5(N_1K + K_1N)\right)\right),$$

$$G = \frac{1}{\pi}\sum \frac{NN_1 + KK_1}{(N^2 + K^2)(N_1^2 + K_1^2)}(-1)^{N_1K+NK_1} \times$$
$$\times \exp\left(-\pi(N^2 + K^2 + N_1^2 + K_1^2 - NN_1 - KK_1)\right), \tag{41}$$
$$G = \frac{1}{\pi}\sqrt{3}\sum \frac{NN_1 + 4KK_1 - N_1K - K_1N}{(N^2 + 4K^2 - 2NK)(N_1^2 + 4K_1^2 - 2N_1K_1)}(-1)^{K_1N+KN_1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(N^2+4K^2+N_1^2+4K_1^2-2NK-2N_1K_1-NN_1-4KK_1+N_1K+NK_1\right)\right).$$

Суммы в формуле (37) берутся по значениям $N; N_1; K; K_1$ таким, что оба сомножителя в знаменателе отличны от нуля.

Из формулы (39) следует, что зависимость от κ^2 суммы в третьем члене формулы (40) дается выражением

$$\sum_{M=1}^{\infty} \frac{D_M^2}{MM!} = \frac{\gamma_0}{\kappa^4} + \frac{\gamma_1}{\kappa^2}\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) + \gamma_2\left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right)^2. \tag{42}$$

Прямое вычисление показывает, что для всех трех рассмотренных типов решеток выполняется соотношение

$$G = \gamma_0. \tag{43}$$

Соотношение (43), по-видимому, является точным. Результаты численного счета для коэффициентов γ_i, β и G приведены в таблице.

Тип решетки	Треугольная, один квант потока	Квадратная, один квант потока	Треугольная, два кванта потока
G	$3.661705 \cdot 10^{-2}$	$5.145751 \cdot 10^{-2}$	0.1803918
γ_0	$3.661705 \cdot 10^{-2}$	$5.145751 \cdot 10^{-2}$	0.1803918
γ_1	$4.361318 \cdot 10^{-2}$	0.0687983	0.2520449
γ_2	$1.299969 \cdot 10^{-2}$	$2.338158 \cdot 10^{-2}$	$9.405005 \cdot 10^{-2}$
β	1.15952	1.18034	1.33897

Треугольная решетка с одним квантом потока обладает осью симметрии шестого порядка, квадратная — осью четвертого порядка. В треугольной решетке с двумя квантами потока существует симметрия относительно замены $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$. В результате отличны от нуля только коэффициенты D_M с $M = K(6;4;2)$, $K = 1, 2, \ldots$

С учетом формул (42), (43) выражение (40) для плотности свободной энергии приводится к виду

$$\frac{F_S - F_N}{V} = \frac{1}{8\pi}\left[(H_{c2} - H_0)^2 - 2(H_{c2} - H_0)(H_{c2} - B) + (H_{c2} - B)^2\right] -$$
$$-\frac{(H_{c2}-B)^2}{8\pi\kappa^2\left(\beta-(\beta-1)/\kappa^2\right)} - \frac{(H_{c2}-B)^3}{8\pi\kappa^2 B\left(\beta-(\beta-1)/\kappa^2\right)^3}\left(\frac{\gamma_1}{\kappa^2}\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right) + \gamma_2\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)^2\right). \tag{44}$$

Отметим еще раз, что в приближении Гинзбурга–Ландау (выражение (1) для свободной энергии) при значении $\kappa = 1$ одновременно обращаются в нуль коэффициенты при

$(H_{c2}-B)^2$ и $(H_{c2}-B)^3$ в разложении свободной энергии по степеням $(H_{c2}-B)$ (уравнение (44)). С учетом следующих членов по $(1-T/T_c)$ это явление исчезнет и в точке равенства нулю коэффициента при $(H_{c2}-B)^2$ коэффициент при члене $(H_{c2}-B)^3$ будет равен $\tilde{C}(1-T/T_c)/8\pi H_{c2}$, $\tilde{C} \sim 1$. Отметим также, что коэффициенты $\gamma_{0,1,2}$ численно малы для треугольной и квадратной решеток с одним квантом потока. Это связано с высокой симметрией таких решеток. По-видимому численно мал будет также и коэффициент при $(H_{c2}-B)^4$. Ожидать численную малость коэффициента $\tilde{C}$ нет оснований.

Таким образом, структура смешанного состояния при значениях параметра κ^2 близких к единице определяется полиномом четвертого порядка по $(H_{c2}-B)$. В результате модуль параметра $|\Delta|$ и индукция B резко меняются при малом изменении величины внешнего магнитного поля H_0.

Существует область по параметрам $(H_{c2}-H_0)/H_{c2}$, κ^2-1, $1-T/T_c$, в которой свободная энергия как функция B имеет три экстремальных точки для данного типа вихревой решетки. Одна из этих точек соответствует максимуму, две других — локальному минимуму.

3. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ M_V, СОЗДАННЫЙ ОБЪЕМНЫМИ ТОКАМИ

Полный магнитный момент **M** единицы объема сверхпроводящего цилиндра определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{M}. \tag{45}$$

Магнитный момент **M** создается как объемными токами, так и поверхностными

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_V + \mathbf{M}_S. \tag{46}$$

И оба эти вклада, вообще говоря, одного порядка.

С помощью формул (22), (26), (28) магнитный момент M_V единицы объема сверхпроводника, создаваемый объемными токами, записывается в виде

$$M_V = \frac{1}{2S}\int\limits_S [\mathbf{rj}]_z d^2\mathbf{r} = \frac{\pi e\nu D}{8T_c}\frac{1}{S}\int\limits_S d^2\mathbf{r}\left(x\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial x} + y\frac{\partial|\Delta_0|^2}{\partial y}\right) = $$
$$= -\frac{\pi e\nu D}{4T_c}\langle|\Delta_0|^2\rangle\tilde{\alpha} = -\frac{\tilde{\alpha}(H_{c2}-B)}{4\pi\kappa^2(\beta-(\beta-1)/\kappa^2)}. \tag{47}$$

В формуле (47) интегрирование проводится по площади элементарной ячейки S.

Константа $\tilde{\alpha}$ зависит от типа решетки:

$$\tilde{\alpha} = \left(\sum_{M\neq 0} C_{0M}(-1)^{M+1} + \sum_{N\neq 0} C_{N0}(-1)^{N+1}\right)/2C_{00}, \tag{48}$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} 0.324654 & \text{— треугольная решетка, один квант потока} \\ 0.412025 & \text{— квадратная решетка, один квант потока} \\ 0.404058 & \text{— треугольная решетка, два кванта потока} \end{cases}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что во внешнем магнитном поле H_0 свободная энергия сверхпроводника разлагается в ряд по степеням $H_{c2} - B$, где B — индукция магнитного поля внутри сверхпроводника. Ожидаемый радиус сходимости ряда порядка H_{c2} и остается конечным при $\kappa \to 1$. Из-за наличия поверхностных токов существует огромное число решений (порядка eHR^2, R — характерный поперечный размер сверхпроводящего цилиндра) системы уравнений Гинзбурга–Ландау. Часть из них соответствует локальному минимуму, часть — седловым точкам. Поверхностные токи создают объемный магнитный момент того же порядка, что и объемные токи. Для сверхпроводящего цилиндра достаточно большого поперечного размера поверхностная энергия мала по сравнению с объемной и индукция B может быть найдена из условия минимума объемной части свободной энергии относительно индукции B в заданном внешнем магнитном поле H_0. В выражении (11) для свободной энергии единственное место, куда входит внешнее магнитное поле H_0, — первый член.

Мы показали также, что в приближении Гинзбурга–Ландау возникает уникальная ситуация — в точке $\kappa = 1$ одновременно обращаются в нуль коэффициенты при квадратичном и кубическом членах разложения $(F_S - F_N)/V$ по степеням $(H_{c2} - B)$. Тем самым, в окрестности точки $\kappa = 1$ свободная энергия есть полином четвертой степени по $(H_{c2} - B)$, причем коэффициент при члене $(H_{c2} - B)^3$ содержит малый параметр $1 - T/T_c$. Для его вычисления необходимо выйти за рамки свободной энергии в приближении Гинзбурга–Ландау.

В результате для заданного типа вихревой решетки существуют, вообще говоря, три экстремальных точки у свободной энергии как функции индукции B. Скорее всего, две из них — локальные минимумы и одна — максимум.

Величины $\gamma_{0,1,2}$, возникающие при вычислении кубического члена, численно малы для треугольной и квадратной решеток с одним квантом потока. Эта малость есть результат высокой симметрии этих решеток. По-видимому, численно мал будет также коэффициент при четвертой степени $(H_{c2} - B)$. Детальное исследование структуры вихревой решетки, возникающей в области параметров

$$(\kappa^2 - 1) \ll 1, \quad (1 - H_0/H_{c2}) \ll 1, \quad 1 - T/T_c \ll 1,$$

является предметом отдельного рассмотрения.

Работа поддержана CRDF (грант RP1-194) и контрактом с NAVAL Research Lab (N00173-97-P-3488).

Литература

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. *Superconductivity*, ed. by R. D. Parks, Marcell Dekker INC, New York (1969).
3. P. G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, W. A. Benjamin, INC, New York–Amsterdam (1966).
4. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
5. Ю. Н. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **65**, 600 (1997).
6. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, Физматгиз., Москва (1962).