ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1649–1663

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ЗАДАЧЕ О ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ ПАССИВНОЙ СКАЛЯРНОЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

*Н. В. Антонов**

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 7 августа 1996 г.

В рамках ренормгруппового подхода к стохастической теории развитой турбулентности рассматривается задача о турбулентном перемешивании пассивной скалярной примеси в случае, когда коэффициент диффузии произвольно зависит от концентрации примеси. Такая задача включает бесконечное число констант связи («зарядов»). Однопетлевой расчет показывает, что в бесконечномерном пространстве зарядов имеется двумерная поверхность неподвижных точек уравнений ренормгруппы. При наличии на ней области ИК-устойчивости в задаче будет наблюдаться масштабная инвариантность (скейлинг) с универсальными критическими размерностями, отвечающими феноменологическим законам Колмогорова и Ричардсона, но с неуниверсальными (зависящими от значения числа Прандтля и явного вида нелинейности в уравнении диффузии) скейлинговыми функциями, амплитудными множителями в степенных законах и значением «эффективного турбулентного числа Прандтля».

1. ВВЕДЕНИЕ

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой вязкой жидкости рассматривается уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой (см. монографии [1, 2] и обзор [3]):

$$\mathscr{D}_t\varphi_i - \nu_0\partial^2\varphi_i + \partial_i p - f_i = 0, \qquad \mathscr{D}_t \equiv \partial_t + (\varphi\cdot\partial)\ . \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{D}_t$ — галилеево-ковариантная производная, φ — поперечное (в силу условия несжимаемости $\partial_i\varphi_i = 0$) векторное поле скорости, p и f — давление и поперечная случайная сила в расчете на единицу массы (все эти величины зависят от $x \equiv t,\mathbf{x}$), ν_0 — кинематический коэффициент вязкости, ∂^2 — лапласиан. Сила f_i считается гауссово-распределенной с нулевым средним и коррелятором:

$$\langle f_i(x)f_j(x')\rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{k}P_{ij}(\mathbf{k})d^{\varphi}(k)e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\ , \tag{2}$$

в котором $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_ik_j/k^2$ - поперечный проектор, $d > 2$ — произвольная (для общности) размерность пространства $\mathbf{x}$, $d^{\varphi}(k)$ — некоторая функция $k \equiv |\mathbf{k}|$ и параметров модели. Она может быть выбрана в виде

$$d^{\varphi}(k) = D_0k^{4-d-2\epsilon}h(m/k),\ \ h(0) = 1,\ \ D_0 \equiv g_0\nu_0^3, \tag{3}$$

*E-mail: antonov@snoopy.phys.spbu.ru

где $g_0 > 0$ — затравочная константа связи («заряд»), h — произвольная достаточно гладкая функция, $m \equiv 1/L$ - обратный внешний масштаб турбулентности, $\epsilon \geq 0$ — параметр ренормгруппового разложения, аналогичный $\epsilon = 4 - d$ в теории критического поведения [4], его логарифмическое значение $\epsilon = 0$. Случайная сила моделирует взаимодействие с крупномасштабными ($k \sim m \equiv 1/L$) движениями, поэтому его физическая область значений есть $\epsilon \geq 2$ (подробнее см., например, в [3, 5]). Для $\epsilon > 2$ возникает задача исследования зависимости корреляционных функций от m, она оказывается крайне нетривиальной из-за присутствия в теории «опасных» составных полей с отрицательными критическими размерностями [5]. Поэтому в дальнейшем мы ограничиваемся областью $0 < \epsilon \leq 2$, считая физическим значением ϵ границу области «ИК-накачки» $\epsilon = 2$, как это и делается в большинстве работ по ренормгрупповой теории турбулентности. Отметим, что для $\epsilon = 2$ функцию (3) можно рассматривать как степенную модель $\delta(\mathbf{k})$-функции.

В работе [6] с помощью метода ренормгруппы было доказано существование в задаче (1)–(3) инфракрасной масштабной инвариантности (скейлинга) с точно известными критическими размерностями:

$$\Delta_\varphi = 1 - 2\epsilon/3, \quad \Delta_{\varphi'} = d - 1 + 2\epsilon/3, \quad \Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + 2\epsilon/3, \quad \Delta_m = 1, \tag{4}$$

совпадающими при $\epsilon = 2$ с известными «колмогоровскими» значениями

$$\Delta_\varphi = -1/3, \quad \Delta_{\varphi'} = d + 1/3, \quad \Delta_t = -\Delta_\omega = -2/3, \quad \Delta_m = 1 \tag{5}$$

(вспомогательное поле φ' возникает в квантово-полевой формулировке задачи, см. разд. 2). «Замораживание» размерностей [6] на их колмогоровских значениях во всей физической области $\epsilon \geq 2$ и независимость корреляционных функций в инерционном интервале от вязкости (вторая гипотеза Колмогорова) были затем доказаны в [5].

В работе [7] аппарат ренормгруппы был применен для изучения турбулентной конвекции пассивной скалярной примеси. В этом случае задача (1)–(3) дополняется уравнением диффузии (в задаче теплопереноса - уравнением теплопроводности) вида [1, 2]

$$\mathscr{D}_t \theta = \partial_i J_i + f^\theta \ , \tag{6}$$

где $\theta \equiv \theta(x)$ — случайная составляющая поля концентрации примеси (температуры). В работе [7] рассматривался упрощенный вариант задачи (6) без случайной силы f^θ, ток J_i выбирался в простейшей форме $J_i = u_0 \nu_0 \partial_i \theta$, где u_0 — обратное число Прандтля. Для такой задачи в [7] было доказано существование ИК-скейлинга, дано обоснование феноменологического «закона 4/3» Ричардсона [1] и получено выражение

$$u_* = (1/2)(-1 + \sqrt{1 + 8(d+2)/d}) + O(\epsilon)$$

для «эффективного обратного числа Прандтля» в ИК-асимптотике. В последующих работах [8–16] результаты [7] были воспроизведены и дополнены, в частности, расчетом константы Бэтчелора в спектре пассивной примеси [8–10], исследованием химически распадающейся примеси [13, 14] и учетом анизотропии [15, 16].

В настоящей работе мы рассмотрим задачу (6) при наличии случайной силы и для тока J_i общего вида.

В силу изотропии $\langle f_i f^\theta \rangle = 0$, а коррелятор

$$\langle f^\theta(x) f^\theta(x')\rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{k}\, d^\theta(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tag{7}$$

будем выбирать в виде (пояснения см. ниже)

$$d^\theta(k) = D_0'\, k^2(k^2+m^2)^{-d/2-\alpha\epsilon}. \tag{8}$$

Показатель степени в (8) выбран таким образом, чтобы при $\epsilon = 0$ обе нелинейности («взаимодействия») в (6) были одновременно логарифмическими (см. разд. 2). В ином случае одно из них было бы с точки зрения ренормгруппы «слабее» другого и определяло бы лишь поправки к ИК-скейлингу, которыми в ведущем порядке ИК-асимптотики следовало бы пренебречь (см. аналогичные соображения в [13, 17]). Наиболее «реалистическим» значением дополнительного нового параметра $\alpha > 0$ следует считать $\alpha = 1/2$, тогда при $\epsilon = 2$ одновременно имеем $d^\varphi, d^\theta \propto k^{-d}$ при $k \gg m$. Параметр m обеспечивает ИК-регуляризацию диаграмм теории возмущений.

Как и сила f_i в уравнении (1), случайный вклад f^θ в (6) моделирует взаимодействие мод $k >> m$ (для которых статистическая модель (1), (6) считается адекватной) с крупномасштабной областью $k \le m$. В данном случае вещество примеси «исчезает» в областях с $f^\theta < 0$ и «возникает» в областях с $f^\theta > 0$, проходя через длинноволновую область $k \le m$. При этом сохранение общего количества примеси (с учетом находящейся в длинноволновой области) обеспечивается условием $d^\theta(k) = 0$ при $k = 0$. Параметры D_0, D_0' в корреляторах случайных сил (3), (8) с помощью точных соотношений могут быть выражены через величины, имеющие непосредственный физический смысл — средние скорости диссипации энергии и концентрации примеси, см. разд. 5. При анализе критических размерностей «лишний» параметр D_0' в (8) можно убрать перерастяжением полей, поэтому в дальнейшем (за исключением разд. 5) полагаем $D_0' = 1$.

Добавим, что выбор коррелятора в виде $\langle f^\theta(t) f^\theta(t')\rangle \propto \delta(t-t')$ типичен в задачах типа броуновского движения и критической динамики, см., например, [4]. Конечно, физика развитой турбулентности далека от критической динамики, но и здесь есть свои аргументы в пользу именно такого выбора: во-первых, он соответствует принципу максимальной энтропии, см. [18], во-вторых, из-за сильных ИК-сингулярностей разновременные корреляционные функции быстро (сверхэкспоненциально) убывают с ростом $t - t'$, причем скорость убывания растет с ростом внешнего масштаба турбулентности L (см., например, [19, 20]), и если не интересоваться их зависимостью от L, их можно заменять на $\delta(t-t')$-функцию.

В разложении $J_i = \partial_i V_0(\theta) + O(\partial^2)$ тока J_i по степеням градиента ∂ вкладами, содержащими более одного ∂, можно сразу пренебречь как ИК-несущественными. По той же причине можно пренебречь ограничением снизу на величину поля θ, вытекающим из положительности полной концентрации примеси. Однако в разложении

$$V_0(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0}\theta^n}{n!} \tag{9}$$

нельзя, как мы увидим в дальнейшем, пренебрегать вкладами со старшими степенями поля θ по сравнению с первым вкладом $V_0 \propto \theta$. Тем самым, соответствующая квантово-полевая модель оказывается «бесконечнозарядной» (роль констант связи, или «зарядов», играют в ней приведенные к безразмерному виду параметры λ_{n0}). Это существенно отличает рассматриваемую задачу от обычных моделей теории критического поведения типа φ^4 [4], где вклады со старшими степенями как производных, так и полей оказываются ИК-несущественными. Подобная бесконечнозарядная задача рассматривалась недавно в работе [21] при ренормгрупповом анализе предложенной в [22] стохастической модели растущей границы раздела сред.

Основным техническим результатом настоящей работы является доказательство мультипликативной ренормируемости квантово-полевой бесконечнозарядной модели, соответствующей задаче (1)–(3), (6)–(9), что позволяет применить ренормгрупповой аппарат для анализа ее ИК-поведения. Константы ренормировки и ренормгрупповые функции найдены явно в однопетлевом приближении с помощью развитой в [21] функциональной техники. Соответствующие β-функции имеют в бесконечномерном пространстве зарядов двумерную поверхность неподвижных точек. При наличии на ней области ИК-устойчивости в задаче будет наблюдаться ИК-скейлинг с универсальными критическими размерностями полей и параметров, совпадающими с [6, 7] и соответствующими колмогоровскому скейлингу и закону Ричардсона при $\epsilon = 2$, но с неуниверсальными (зависящими от выбора неподвижной точки или, иными словами, от значения числа Прандтля и явного вида нелинейности в уравнении диффузии) скейлинговыми функциями, амплитудными множителями в степенных законах (типа константы Бэтчелора в спектре пассивной примеси) и значением «эффективного турбулентного числа Прандтля» u_*.

2. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА. АНАЛИЗ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ

В соответствии с общей теоремой (см., например, [3]) стохастическая задача (1)–(3), (6)–(9) эквивалентна квантовой теории удвоенного набора полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi', \theta, \theta'$ с функционалом действия

$$S(\Phi) = S_\varphi(\varphi, \varphi') + \theta' d^\theta \theta'/2 + \theta'[-\mathscr{D}_t\theta + \partial^2 V_0(\theta)] \ , \tag{10}$$

где $V_0(\theta)$ — функция (9) и $S_\varphi(\varphi, \varphi')$ — функционал действия [6] для жидкости без примеси:

$$S_\varphi(\varphi, \varphi') = \varphi' d^\varphi \varphi'/2 + \varphi'[-\mathscr{D}_t\varphi + \nu_0\partial^2\varphi] \ . \tag{11}$$

Нелокальные вклады случайных сил записаны символически; нужные суммирования по индексам полей и интегрирования по их аргументам $x = (t, \mathbf{x})$ в (10), (11) и аналогичных формулах ниже подразумеваются.

Действие (10) считается неренормированным, его параметры — затравочными; они снабжены индексом «0» в отличие от их ренормированных аналогов (см. ниже). Корреляционные функции (функции Грина) $G_n = \langle\Phi(x_1)...\Phi(x_n)\rangle$ модели (10) представляются функциональными средними с весом $\exp S(\Phi)$. Они имеют стандартные представления диаграммами Фейнмана; роль линий в диаграммах играют затравочные пропагаторы $\langle\Phi\Phi\rangle_0$, определяемые свободной (квадратичной по полям) частью действия (10), старшие по Φ члены $S(\Phi)$ определяют вершины взаимодействия.

Как известно [23], анализ ультрафиолетовых расходимостей связан с анализом канонических размерностей. В динамической модели типа (10) для каждой величины F можно ввести две независимых канонических размерности — импульсную d_F^k и частотную d_F^ω, а по ним — суммарную $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ (см. [3, 24]). По определению,

$d_{\mathbf{x}}^{k} = d_{t}^{\omega} = -1$, $d_{t}^{k} = d_{\mathbf{x}}^{\omega} = 0$, а размерности прочих величин находятся из требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех членов действия (10). Сведения о размерностях приводятся в таблице (в нее включены и параметры ренормированной теории, которые появятся позже).

Таблица

F	φ	φ'	θ	θ'	m, μ	ν, ν_0
d_F^k	-1	$d+1$	$1-\alpha\epsilon$	$d-1+\alpha\epsilon$	1	-2
d_F^ω	1	-1	$-1/2$	$1/2$	0	1
d_F	1	$d-1$	$-\alpha\epsilon$	$d+\alpha\epsilon$	1	0
F	λ_{n0}		λ_n	g_0	g_{n0}	g_n, g
d_F^k	$-(n+1)+(n-1)\alpha\epsilon$		$-(n+1)$	2ϵ	$(n-1)\alpha\epsilon$	0
d_F^ω	$(n+1)/2$		$(n+1)/2$	0	0	0
d_F	$(n-1)\alpha\epsilon$		0	2ϵ	$(n-1)\alpha\epsilon$	0

Из таблицы видно, что все взаимодействия в (10), (11) одновременно становятся логарифмическими ($d_{g_0} = d_{\lambda_{n0}} = 0$) при $\epsilon = 0$, и потому все должны учитываться при анализе ИК-поведения модели.

УФ-расходимости имеют вид полюсов по ϵ в функциях Грина. Суммарная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой диаграммы («формальный индекс расходимости») есть

$$\delta = d + 2 - \sum_{\Phi} d_\Phi N_\Phi$$

с суммированием по всем типам полей, N_Φ — числа соответствующих внешних концов в диаграмме. Контрчлены порождаются «поверхностно расходящимися» 1-неприводимыми диаграммами; диаграмма поверхностно расходится, если ее реальный индекс расходимости (см. ниже) в логарифмической теории (т.е. при $\epsilon = 0$) есть целое неотрицательное число, при этом величина $\delta(\epsilon = 0)$ определяет степень однородности контрчлена по импульсам и частотам. При анализе расходимостей в модели (10), (11) необходимо также учитывать следующие дополнительные соображения, ср. [6, 24]:

(1) В силу пассивности примеси ренормировка функций Грина с участием только полей φ, φ' проводится так же, как для модели без примеси. Известно, что она сводится к добавлению контрчлена вида $\varphi'\partial^2\varphi$ или, что эквивалентно, к введению единственной константы ренормировки Z_ν при соответствующем члене действия (11).

(2) Все 1-неприводимые функции Грина с $N_{\varphi'} = N_{\theta'} = 0$ равны нулю.

(3) Оператор ∂^2 в вершине (10) можно интегрированием по частям перебросить на поле θ'. Поэтому в любой 1-неприводимой диаграмме на каждый внешний конец θ', присоединенный к такой вершине, будет выделяться квадрат соответствующего внешнего импульса, и «реальный индекс расходимости» δ' [24] будет меньше формального δ на соответствующее число единиц. В силу поперечности поля φ производную ∂ в вершине $\theta'(\varphi\partial)\theta$ можно перебросить и на поле θ'. Поэтому на каждый внешний конец θ или θ', присоединенный к такой вершине, будет выделяться один импульс. Тем самым, в любой 1-неприводимой диаграмме на каждый внешний конец θ' выделяется как минимум один импульс, а индекс δ' лежит в пределах $\delta - 2N_{\theta'} \le \delta' \le \delta - N_{\theta'}$.

(4) Из галилеевой инвариантности модели (10), (11) вытекает также инвариантность необходимых контрчленов. В частности, ковариантная производная $\mathscr{D}_t$ должна входить в контрчлены как одно целое.

Учитывая эти соображения, можно проверить, что в рассматриваемой модели поверхностные расходимости в функциях Грина с участием полей примеси возможны лишь в 1-неприводимых диаграммах $\langle\theta'\theta...\theta\rangle$ с любым ненулевым числом полей θ. Для всех этих диаграмм $\delta = 2, \delta' = 0$, причем соответствующие контрчлены обязательно содержат $\partial_i\theta'$ и тем самым всегда сводятся к $\theta'\partial^2\theta^n$ (другие варианты расстановки градиентов или участие $\mathscr{D}_t$ и m запрещены). Тем самым, ренормировка модели (10), (11) порождает в качестве контрчленов лишь структуры, уже присутствующие в функционале действия, что и означает мультипликативную ренормируемость рассматриваемой теории.

3. УРАВНЕНИЯ РЕНОРМГРУППЫ. РАСЧЕТ РЕНОРМГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Из результатов разд. 2 вытекает следующий вид ренормированного действия для модели (10), (11):

$$S_R(\Phi) = S_{\varphi R}(\varphi, \varphi') + \theta' d^\theta \theta'/2 + \theta'[-\mathscr{D}_t\theta + \partial^2 V_R(\theta)] \ , \qquad (12)$$

где

$$V_R(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n \theta^n}{n!} \qquad (13)$$

и $S_{\varphi R}$ — ренормированное действие задачи без примеси:

$$S_{\varphi R}(\varphi, \varphi') = \varphi' d^\varphi \varphi'/2 + \varphi'[-\mathscr{D}_t\varphi + \nu Z_\nu \partial^2\varphi]. \qquad (14)$$

Функционалы (12)–(14) зависят от переменных $\{g, \nu, \lambda_n\}$ — ренормированных аналогов затравочных параметров $\{g_0, \nu_0, \lambda_{0n}\}$, и ренормировочной массы μ — дополнительного произвольного параметра ренормированной теории. Коррелятор d^φ в (14) выражен через g, ν, μ соотношением $g_0\nu_0^3 = g\nu^3\mu^{2\epsilon}$. Затравочные заряды $\{g_{n0}, n = 1, 2, 3, ...\}$ и их полностью безразмерные ренормированные аналоги $\{g_n, n = 1, 2, 3, ...\}$ выражаются через параметры λ_{n0}, λ_n в (9), (13) соотношениями

$$\lambda_{n0} = g_{n0}\nu_0^{(n+1)/2} \ , \ \lambda_n = g_n \nu^{(n+1)/2}\mu^{(n-1)\alpha\epsilon}, \qquad (15)$$

в обозначениях [7] $g_1 \equiv u$. Константы ренормировки Z_ν, Z_n в схеме минимальных вычитаний (MS) зависят от полностью безразмерных зарядов $\{g, g_n\}$ (Z_ν — только от g) и параметров ϵ, α, d.

Действие (12) получается из (10) следующей ренормировкой параметров (ренормировки полей и «массы» $m_0 = m$ не требуется):

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \ g_0 = g\mu^{2\epsilon}Z_g, \ g_{n0} = g_n\mu^{(n-1)\alpha\epsilon}Z_{g_n}. \qquad (16)$$

Константы Z в (12) и (16) связаны соотношениями

$$Z_g = Z_\nu^{-3}, \; Z_{g_n} = Z_n Z_\nu^{-(n+1)/2}, \tag{17}$$

первое равенство — следствие отсутствия ренормировки вклада с d^φ в (12).

Из связи $S(\Phi, e_0) = S_R(\Phi, e, \mu)$ (e_0 — набор всех затравочных переменных, e — ренормированных) для функций Грина $G_n = \langle \Phi...\Phi \rangle$ модели (10) вытекает уравнение ренормгруппы:

$$\mathscr{D}_{RG} G_n = 0, \; \mathscr{D}_{RG} \equiv \mathscr{D}_\mu - \gamma_\nu \mathscr{D}_\nu + \beta_g \partial_g + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{g_n} \partial_{g_n}, \tag{18}$$

где обозначено $\mathscr{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x. Для любой константы ренормировки Z_i соответствующая аномальная размерность γ_i определяется равенством $\gamma_i \equiv \equiv \widetilde{\mathscr{D}}_\mu \ln Z_i$, где $\widetilde{\mathscr{D}}_\mu$ — операция $\mathscr{D}_\mu$ при фиксированных e_0, а β-функции для всех зарядов определяются выражениями

$$\begin{aligned} &\beta_g \equiv \widetilde{\mathscr{D}}_\mu g = g[-2\epsilon + 3\gamma_\nu], \\ &\beta_{g_n} \equiv \widetilde{\mathscr{D}}_\mu g_n = g_n[-(n-1)\alpha\epsilon - \gamma_{g_n}] = g_n[-(n-1)\alpha\epsilon + (n+1)\gamma_\nu/2 - \gamma_n]. \end{aligned} \tag{19}$$

Последние равенства в (19) вытекают из связи констант ренормировки в (17). Отметим, что $\mathscr{D}_{RG}$ в (18) есть операция $\widetilde{\mathscr{D}}_\mu$ в переменных e, μ. Отметим также, что из-за отсутствия ренормировки полей исходные $G_n(e_0)$ и ренормированные $G_{nR}(e, \mu)$ функции Грина совпадают (отличие лишь в выборе переменных) и с равным правом могут использоваться при анализе ИК-асимптотик.

Константа Z_ν и ренормгрупповые функции β_g и γ_ν для задачи без примеси в однопетлевом приближении приведены в [3, 24]:

$$Z_\nu = 1 - \frac{ag}{2\epsilon} + O(g^2), \quad \gamma_\nu(g) = ag + O(g^2), \quad a = \frac{(d-1)}{4(d+2)} \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \tag{20}$$

где $S_d \equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в d-мерном пространстве. Известно [6, 24], что функция β_g в (19) имеет ИК-устойчивую неподвижную точку $g_* = 2\epsilon/3a + O(\epsilon^2)$, в которой $\beta_g(g_*) \equiv 0$, $\beta'_g(g_*) > 0$. Вытекающее из (17) соотношение $\beta_g = g(-2\epsilon + 3\gamma_\nu)$ позволяет определить $\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = 2\epsilon/3$ точно (без поправок ϵ^2, ϵ^3 и т.д.). Критические размерности простых полей и времени выражаются через единственную аномальную размерность γ_ν^* и также определяются точно, их явный вид приведен в (4).

Вычислим константы Z_n в (12) в однопетлевом приближении, используя развитый ранее в [21] метод. В разложении производящего функционала $\Gamma_R(\Phi)$ 1-неприводимых функций модели (12) по числу петель p

$$\Gamma_R(\Phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma^{(p)}(\Phi), \quad \Gamma^{(0)}(\Phi) = S_R(\Phi), \tag{21}$$

беспетлевой («древесный») вклад есть само ренормированное действие (12), а однопетлевой вклад дается выражением (см., например, [25]):

$$\Gamma^{(1)}(\Phi) = -(1/2) \mathrm{Tr} \ln(W/W_0), \tag{22}$$

в котором W — линейная операция с ядром

$$W(x,y) = -\delta^2 S_R(\Phi)/\delta\Phi(x)\delta\Phi(y), \tag{23}$$

а W_0 — аналогичное выражение для свободной (квадратичной по полям) части действия (12). Обе величины W, W_0 — матрицы 4×4 по полям $\Phi \equiv \varphi, \varphi', \theta, \theta'$, обратная к W_0 матрица представляет линии (пропагаторы) в диаграммах модели (12).

Константы Z_n можно найти из требования сокращения УФ-расходимостей (полюсов по ϵ) в выражении (21); при дополнительном условии «$Z = 1+$ только полюсы по ϵ» (схема MS) они определяются однозначно. Для расчета констант Z_n нам достаточно знать матрицу (23) при $\varphi, \varphi' = 0$ (см. ниже); при однопетлевом расчете в (22) следует положить $Z = 1$, а в беспетлевом вкладе (12) нужно учесть члены порядка g в константах Z. Таким образом, для ненулевых элементов матрицы (23) находим (индексы полей и производных для краткости опускаем)

$$\begin{gathered}
W^{(\theta\theta)} = -\partial^2\theta' \cdot V''(\theta), \quad W^{(\theta'\theta')} = -d^\theta, \quad W^{(\theta\theta')} = L^T, \quad W^{(\theta'\theta)} = L, \\
W^{(\varphi\theta)} = \theta'\partial, \quad W^{(\theta\varphi)} = -\partial\theta', \quad W^{(\theta'\varphi)} = \partial\theta, \; W^{(\varphi\theta')} = -\theta\partial, \\
W^{(\varphi\varphi')} = M^T, \quad W^{(\varphi'\varphi)} = M, \quad W^{(\varphi'\varphi')} = -d^\varphi.
\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь d^φ, d^θ — корреляторы (3), (8); функция $V(\theta)$ получается из $V_R(\theta)$ заменой $Z_n \to 1$ (здесь и далее V', V'' обозначают ее производную по единой переменной $\theta(x)$), $L = \partial_t - \partial^2 V'$, $M = \partial_t - \nu\partial^2$, а $L^T = -\partial_t - V'\partial^2$, $M^T = -\partial_t - \nu\partial^2$ — транспонированные операции.

Для нахождения констант Z_n нужно не точное выражение (22), а его расходящаяся часть, имеющая вид (см. разд. 2):

$$\int dx \partial^2\theta'(x) R(\theta(x))$$

с некоторой подобной $V(\theta)$ функцией $R(\theta)$. Отсюда вытекает, что Tr ln матрицы (23) достаточно знать только с точностью до первого порядка по ее элементам $(\theta\theta)$, $(\theta\varphi)$ и $(\varphi\theta)$, линейным по θ', см. (24). Воспользовавшись известной формулой $\delta(\mathrm{Tr}\,\ln K) = \mathrm{Tr}(K^{-1}\delta K)$, из (24) с нужной точностью получим $\mathrm{Tr}\,\ln\,(W/W_0) \simeq -I_1 + 2I_2$, где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int dx\; D^{(\theta\theta)}(x,x) V''(\theta(x)) \partial^2\theta'(x)\;; \\
I_2 &= \int dx \int dy\; \partial_i\theta(x) D^{(\theta'\theta)}(x,y) D^{(\varphi\varphi)}_{ij}(x,y) \partial_j\theta(y),
\end{aligned} \tag{25}$$

$D^{(\Phi\Phi)}$ — соответствующие элементы матрицы W^{-1} при $\varphi, \varphi', \theta = 0$. По смыслу $D^{(\varphi\varphi)}$ — обычный затравочный пропагатор модели (14) с $Z = 1$, $D^{(\theta\theta)}$ и $D^{(\theta'\theta)}$ — пропагатор и функция отклика модели (12) с $Z = 1$ во «внешнем поле» $\theta(x)$.

Для дальнейшего важно, что после вынесения производных ∂ на внешние множители $\theta(x)$, $\theta'(x)$ в $I_{1,2}$ остающиеся выражения расходятся только логарифмически и при вычислении расходящихся частей «диаграмм» (25) все их внешние импульсы можно положить равными нулю (при этом ИК-регуляризация обеспечивается «массой» m). Это означает, что при отборе полюсной по ϵ части в (25) можно пренебречь неоднородностью величин $\partial^2\theta'(x)$, $\theta(x)$ в I_1 и $\partial_i\theta(x)$, $\partial_i\theta'(x)$, $\theta(x)$ в I_2, т. е. их можно считать константами. Тогда необходимые интегралы легко вычисляются переходом к импульсно-частотному представлению:

$$\begin{gathered}
D^{(\theta\theta)}(x,x) = \iint \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d^\theta(k)}{\omega^2 + [k^2V'(\theta)]^2} = \frac{\mu^{-2\alpha\epsilon}}{2\alpha\epsilon}\frac{2a_1V''(\theta)}{V'(\theta)} + \ldots, \\
\int dy D^{(\theta'\theta)}(x,y)D_{ij}^{(\varphi\varphi)}(x,y) = \iint \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{P_{ij}(\mathbf{k})d^\varphi(k)}{(\omega^2+\nu^2k^4)(i\omega + V'(\theta)k^2)} = \\
= \delta_{ij}\frac{\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon}\frac{a_2g\nu^2}{2(\nu+V'(\theta))} + \ldots,
\end{gathered} \tag{26}$$

где обозначено $a_1 \equiv S_d/4(2\pi)^d$, $a_2 \equiv (d-1)S_d/2d(2\pi)^d$.

Подстановка (25) и (26) в (22), после того как производная в I_2 интегрированием по частям переброшена на поле θ', для расходящейся части $\Gamma^{(1)}(\Phi)$ с нужной точностью дает

$$\Gamma^{(1)}(\Phi) = \frac{a_1\mu^{-2\alpha\epsilon}}{2\alpha\epsilon}\int dx F_1(\theta)\partial^2\theta' + \frac{a_2\mu^{-2\epsilon}}{2\epsilon}\int dx F_2(\theta)\partial^2\theta' . \tag{27}$$

Соотношения

$$\begin{gathered}
F_1(\theta) = \frac{V''(\theta)}{V'(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha\epsilon(n+1)}\nu^{(n+1)/2}r_n\theta^n}{n!}, \\
F_2(\theta) = \int_0^\theta d\vartheta \frac{g\nu^2}{(\nu+V'(\vartheta))} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^{\alpha\epsilon(n+1)}\nu^{(n+1)/2}s_n\theta^n}{n!}
\end{gathered} \tag{28}$$

определяют функции $F_{1,2}$ в (27) и полностью безразмерные коэффициенты r_n, s_n (полиномы по зарядам g, g_n). Значение нижнего предела интегрирования в F_2 в действительности несущественно, поскольку коэффициенты r_0, s_0 в (28) не дают, очевидно, вклада в (27). Из сформулированного выше требования сокращения полюсов по ϵ и с учетом (15) получаем

$$Z_n = 1 - \frac{a_1r_n}{2\alpha\epsilon g_n} - \frac{a_2s_n}{2\epsilon g_n} + \ldots . \tag{29}$$

При вычислении по константам ренормировки ренормгрупповых функций следует учесть, что на зависящих только от зарядов g, g_n функциях типа (29) операция $\widetilde{\mathscr{D}}_\mu$ принимает вид

$$\widetilde{\mathscr{D}}_\mu = \beta_g\partial_g + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_{g_n}\partial_{g_n}.$$

В этом выражении при нашей точности достаточно ограничиться первыми членами β-функций (19), что дает

$$\widetilde{\mathscr{D}}_\mu = -2\epsilon\mathscr{D}_g - \alpha\epsilon\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathscr{D}_{g_n}. \tag{30}$$

Тогда для аномальных размерностей $\gamma_n \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_n$ из (29) получаем

$$\gamma_n = (a_1 r_n + a_2 s_n)/g_n,$$

откуда для β-функций (19) находим

$$\beta_{g_n} = g_n[-(n-1)\alpha\epsilon + (n+1)\gamma_\nu/2] - [a_1 r_n + a_2 s_n]. \tag{31}$$

Из определения (28) находим первые коэффициенты r_n, s_n:

$$\begin{aligned} &r_1 = g_3/u - (g_2/u)^2, \quad r_2 = g_4/u - 3g_2g_3/u^2 + (g_2/u)^3, \\ &r_3 = g_5/u - 4g_2g_4/u^2 - 3(g_3/u)^2 + 12g_2^2g_3/u^3 - 6(g_2/u)^4, \\ &s_1 = g/(u+1), \quad s_2 = -gg_2/(u+1)^2, \quad s_3 = -gg_3/(u+1)^2 + 2gg_2^2/(u+1)^3 \end{aligned} \tag{32}$$

и так далее (напомним, что $u \equiv g_1$).

4. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ. ИНФРАКРАСНЫЙ СКЕЙЛИНГ

Неподвижные точки ренормгруппы $\{g_*, g_{n*}\}$ определяются условиями

$$\beta_g(g_*) = \beta_{g_n}(g_*, g_{n*}) = 0$$

для всех $n = 1, 2, 3...$, при этом в (31) должны быть подставлены известные значения $g_*, \gamma_\nu^* = 2\epsilon/3$ для жидкости без примеси, см. текст после формулы (20). Из явного вида функций (31), (32) ясно, что при определении g_{n*} величины $u \equiv g_{1*}$ и g_{2*} можно выбирать произвольно, а все прочие g_{n*} с $n \geq 3$ определяются тогда однозначно из уравнений $\beta_{g_n} = 0$ с $n \geq 1$. Это означает, что уравнения ренормгруппы (18) имеют в бесконечномерном пространстве зарядов g_n двумерную поверхность неподвижных точек g_{n*}, параметризуемую значениями g_{1*} и g_{2*} .

Полностью исследовать устойчивость этих точек затруднительно. По общему правилу (см., например, [4]) точка ИК-устойчива, если вещественные части всех собственных чисел матрицы $\omega \equiv \partial\beta/\partial g$ (для полного набора зарядов и β-функций) для нее положительны. Одно из них в силу блочной треугольности матрицы ω для нашей модели (функция β_g не зависит от зарядов g_n) известно: оно совпадает с диагональным элементом $\partial\beta_g/\partial g = 2\epsilon + O(\epsilon^2)$ и положительно. Необходимым условием ИК-устойчивости является положительность остальных диагональных элементов $\omega_{nn} \equiv \partial\beta_{g_n}/\partial g_n$, которые из (28) можно найти явно для всех n:

$$\omega_{nn} = (1-n)\alpha\epsilon + \frac{(n+1)\epsilon}{3} + \frac{a_2 g_*}{(u_*+1)^2} + \frac{a_1 n(n+1)}{2u_*^2}\left(g_{3*} - \frac{2g_{2*}^2}{u_*}\right), \tag{33}$$

где g_{3*} должно быть выражено через $u \equiv g_{1*}$ и g_{2*} с помощью условия $\beta_{g_1} = 0$:

$$g_{3*} = 2u_*^2\epsilon/3a_1 - a_2 g_* u_*/a_1(u_*+1) + g_{2*}^2/u_*.$$

Анализ выражения (33) показывает, что при $0 < \alpha \leq 1/3$ все ω_{nn} положительны в области $u \geq u_{1*}$ и достаточно малых g_{2*}^2/u_*^3, где

$$u_{1*} = (1/2)(-1 + \sqrt{1 + 8(d+2)/d})$$

— положительный корень уравнения

$$u(u+1) = 2(d+2)/d,$$

совпадающий с асимптотическим значением эффективного числа Прандтля, полученным в [7]. В этой области лежит и точка $u = u_{1*}, g_{n*} = 0, n \geq 2$, отвечающая упрощенной модели с $V(\theta) \propto \theta$, рассматривавшейся в [7–9]. При $\alpha \geq 1/3$ она становится ИК-неустойчивой, но в области $1/3 < \alpha \leq 2/3$, включающей «физическое» значение $\alpha = 1/2$ (см. разд. 1), все ω_{nn} оказываются положительными при $u \geq u_{2*}$ и достаточно малых g_{2*}^2/u_*^3, где u_{2*} — положительный корень уравнения

$$u(u+1) = \frac{2(d+2)}{d(2-3\alpha)}.$$

Хотя это условие лишь необходимое, можно думать, что при $\alpha = 1/2$ на поверхности неподвижных точек есть область ИК-устойчивости. Если это так, то в модели (10) осуществляется скейлинг с теми же, что и для жидкости без примеси, размерностями (4) величин $\varphi, \varphi', \omega, m$ (это — следствие пассивности примеси); в общем случае размерность $\Delta[F] \equiv \Delta_F$ некоторой величины F для динамической модели типа (10) находится из соотношения [3, 24]

$$\Delta[F] \equiv \Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* = d_F - \gamma_\nu^* d_F^\omega + \gamma_F^*, \tag{34}$$

в котором $\gamma_F^* = \gamma_F(g_*) = \widetilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F|_{g=g_*}$ — аномальная размерность величины F, если она ренормируется: $F = Z_F F_R$. Для полей θ, θ' ввиду отсутствия ренормировки имеем: $\gamma_\theta = \gamma_{\theta'} = 0$, откуда с помощью (34) и данных таблицы получаем:

$$\Delta[\theta] = (1/3 - \alpha)\epsilon, \quad \Delta[\theta] + \Delta[\theta'] = d. \tag{35}$$

Как и (4), результат (35) точный, т.е. не имеет поправок порядка ϵ^2, ϵ^3 и т.д.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РЕНОРМГРУППЫ ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРОВ. ЗАКОНЫ РИЧАРДСОНА И КОЛМОГОРОВА

Второе равенство в (35) отвечает эмпирическому «закону 4/3» Ричардсона для скорости расплывания облака примесных частиц в турбулентной атмосфере [1]. Действительно, если поле $\theta(\mathbf{x}, t)$ — концентрация примесных частиц, то эффективный радиус R в момент $t > 0$ облака таких частиц, стартовавших в момент $t' = 0$ из начала координат $\mathbf{x}' = 0$, определяется выражением

$$R^2 = \int d\mathbf{x}\, \mathbf{x}^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta'(\mathbf{0}, 0) \rangle. \tag{36}$$

Из (35) и (36) с учетом $\Delta_R = -1$ находим $\Delta[dR^2/dt] = -2 - \Delta_t$, из (4) при $\epsilon = 2$ имеем $\Delta_t = -2/3$, поэтому $dR^2/dt \propto R^{4/3}$, что и утверждается в законе Ричардсона [1].

Из первого равенства (35) при реальных $\epsilon = 2$, $\alpha = 1/2$ находим $\Delta_\theta = -1/3$, что соответствует феноменологическому «закону 5/3» Колмогорова для спектра пассивной примеси [1]. Чтобы пояснить это, заметим, что критическая размерность произвольной функции Грина в $(t, \mathbf{x})$-представлении равна простой сумме размерностей входящих в нее полей, а в импульсно-частотном получается из формул преобразования Фурье. В частности, для корреляторов

$$D^\theta(\omega, k) = \langle\theta\theta\rangle(\omega, k), \quad D^\theta_{st}(k) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega D^\theta(\omega, k) \tag{37}$$

находим

$$\Delta[D^\theta(\omega, k)] = 2\Delta_\theta - d - \Delta_\omega, \quad \Delta[D^\theta_{st}(k)] = 2\Delta_\theta - d. \tag{38}$$

Обычно обсуждают не сам статический (одновременный) коррелятор $D^\theta_{st}(k)$, а связанный с ним соотношением $E^\theta(k) \propto k^{d-1}D^\theta_{st}(k)$ одномерный спектр пассивной примеси (точнее см. ниже). Для него из формул (35), (38) с учетом $\Delta_\theta = -1/3$ находим $\Delta[E^\theta] = d - 1 + \Delta[D^\theta_{st}] = -5/3$, т.е. $E^\theta(k) \propto k^{-5/3}$, как и утверждается в «законе 5/3».

Критические размерности полей (4), (35) и, как следствие, показатели в степенных законах типа Колмогорова и Ричардсона оказываются в модели (10) универсальными, т.е. не зависящими от выбора неподвижной точки в области ИК-устойчивости или, другими словами, от параметров модели $\{g, g_i\}$. Но скейлинговые функции (и, следовательно, амплитудные множители в степенных законах) будут неуниверсальными, в отличие от упрощенной модели с $V_0 \propto \theta$ в (10). Поясним это на примере константы Бэтчелора в спектре пассивной примеси.

Одномерные спектры энергии $E^\varphi(k)$ и пассивной примеси $E^\theta(k)$ связаны с соответствующими одновременными парными корреляторами $D^\theta_{st}(k)$ из (37) и $\langle\varphi_i\varphi_j\rangle(k) = P_{ij}D^\varphi_{st}(k)$ следующим образом:

$$E^\theta(k) = \frac{S_d}{2(2\pi)^d}\, k^{d-1}\, D^\theta_{st}(k), \qquad E^\varphi(k) = \frac{(d-1)S_d}{2(2\pi)^d}\, k^{d-1}\, D^\varphi_{st}(k) \tag{39}$$

(добавочный множитель $(d-1)$ в E^φ происходит от следа поперечного проектора, которого нет в D^θ_{st}). Феноменологические «законы 5/3» для спектров (39) имеют вид [1]

$$E^\theta(k) = Ba\, N\, W^{-1/3}\, k^{-5/3}, \qquad E^\varphi(k) = K\, W^{2/3}\, k^{-5/3}, \tag{40}$$

где Ba, K — константы Бэтчелора и Колмогорова, W — средняя скорость диссипации энергии, N — средняя скорость диссипации примеси. В статистической модели (1), (6) они связаны с корреляторами случайных сил (3), (8) точными соотношениями (см. [2, 3]):

$$W = \frac{d-1}{2(2\pi)^d}\int d\mathbf{k} d^\varphi(k), \qquad N = \frac{1}{2(2\pi)^d}\int d\mathbf{k} d^\theta(k) \tag{41}$$

(подразумевается УФ-обрезание на величине порядка обратной длины диссипации $k_d \sim l_d^{-1}$). При реальных значениях $\epsilon = 2$, $\alpha = 1/2$ для корреляторов (3), (8) с учетом $k_d/m \gg 1$ получаем

$$W = D_0\,\frac{(d-1)S_d}{2(2\pi)^d}\ln\left(\frac{k_d}{m}\right), \quad N = D_0'\,\frac{S_d}{2(2\pi)^d}\ln\left(\frac{k_d}{m}\right) \tag{42}$$

(мы восстановили множитель D_0' в корреляторе (8) для правильной нормировки поля θ).

Для корреляторов D_{st} из соображений размерности (см. таблицу) в ренормированных переменных имеем

$$D^{\theta}_{st}(k) = D'_0 \nu^{-1} k^{-d-2\alpha\epsilon} R^{\theta}(s, g, g_i, z), \quad D^{\varphi}_{st}(k) = \nu^2 k^{2-d} R^{\varphi}(s, g, z),$$
$$s \equiv k/\mu, \ z \equiv k/m, \tag{43}$$

где R^{θ}, R^{φ} — некоторые функции полностью (импульсно и частотно) безразмерных переменных.

Корреляторы (43) удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям (18), откуда для них вытекает следующее «ренормгрупповое представление»

$$\begin{aligned} D^{\theta}_{st}(k) &= D'_0 (\bar{\nu})^{-1} k^{-d-2\alpha\epsilon} R^{\theta}(1, \bar{g}, \bar{g}_i, z), \\ D^{\varphi}_{st}(k) &= (\bar{\nu})^2 k^{2-d} R^{\varphi}(1, \bar{g}, z), \end{aligned} \tag{44}$$

где «инвариантные переменные» $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$, $\bar{g}_i = \bar{g}_i(s, g, g_k)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ — решения уравнений (18), нормированные при $s = 1$ на g, g_i, ν, соответственно (см., например, [3, 5]). Равенство $\bar{z} = z$ — следствие отсутствия вклада $\mathcal{D}_m$ в операторе $\mathcal{D}_{RG}$ (18). В ИК-асимптотике $s \to 0$ «инвариантные заряды» $\bar{g}$, $\bar{g}_i$ стремятся к некоторой неподвижной точке ренормгруппы в области ИК-устойчивости (см. разд. 4): $\bar{g} \to g_*$, $\bar{g}_i \to g_{i*}$, тогда как для «инвариантной вязкости» имеем

$$\bar{\nu} = (g_0 \nu_0^3 / \bar{g}\, k^{2\epsilon})^{1/3} \to (D_0/g_*)\, k^{-2\epsilon/3}. \tag{45}$$

Отсюда для корреляторов (43) находим

$$\begin{aligned} D^{\theta}_{st}(k) &= D'_0 D_0^{-1/3} k^{-d-2\alpha\epsilon+2\epsilon/3} R^{\theta}(1, g_*, g_{i*}, z)\, g_*^{1/3}, \\ D^{\varphi}_{st}(k) &= D_0^{2/3} k^{2-d-4\epsilon/3} R^{\varphi}(1, g_*, z)\, g_*^{-2/3}. \end{aligned} \tag{46}$$

Из соотношений (40), (42), (43) для отношения констант K, Ba получаем

$$\frac{Ba}{K} = \frac{g_* R^{\theta}(1, g_*, g_{i*}, z)}{R^{\varphi}(1, g_*, z)}. \tag{47}$$

В низшем порядке ϵ-разложения при условии $z \ll 1$ (инерционный интервал) имеем $R^{\varphi} = g_*/2$, $R^{\theta} = 1/2u_*$, подстановка в (47) дает

$$Ba/K = u_* + O(\epsilon). \tag{48}$$

Соотношение $Ba/K = u_*$ непосредственно при $d = 3$, $\epsilon = 2$ было ранее получено другим способом в работе [10] для модели с $V_0 \propto \theta$, но оно считалось в [10] точным, что с учетом (47), очевидно, не может быть верным.

Из (47), в частности, следует, что константа Ba, в отличие от размерностей (4), (35) и константы K, не является универсальной, то есть зависит от выбора неподвижной точки $\{g_{n*}\}$ в области ИК-устойчивости или, другими словами, от значения числа Прандтля и вида нелинейности в исходном уравнении (6). Возможно, именно этим объясняется гораздо бо́льший (по сравнению с K) разброс экспериментальных значений для Ba, см., например, [26]. Выбирая $K = 1.5$ [26] и полагая $u_* \geq u_{1*} = 2.13$ для $\alpha = 1/2$, $d = 3$ (см. разд. 4), получаем оценку $Ba \leq 0.704$ при экспериментальных значениях $Ba = 0.3$–1.2 ($Ba = B^{(1)}_T$ в обозначениях [26]). Это не так уж плохо, если учесть, что (47) — лишь первый член ϵ-разложения при реальном $\epsilon = 2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общий вывод состоит в том, что метод ренормгруппы для задачи о турбулентном перемешивании пассивной скалярной примеси с коэффициентом диффузии, произвольно зависящим от концентрации примеси, указывает на наличие ИК-скейлинга с точно известными универсальными критическими размерностями, отвечающими феноменологическим законам Колмогорова и Ричардсона, и неуниверсальными (зависящими от выбора неподвижной точки в области ИК-устойчивости или, иными словами, от вида нелинейности и значения u_0 в исходном уравнении (6)) значениями «эффективных зарядов» g_{n*}, включая эффективное число Прандтля $u_* \equiv g_{1*}$, амплитуд в скейлинговых законах (типа константы Бэтчелора) и скейлинговых функций. Это отличает рассматриваемую задачу как от случая линейной диффузии, где скейлинговые функции и амплитуды также универсальны [7], так и от задачи о турбулентном перемешивании химически распадающейся примеси, где теория предсказывает небольшие отклонения от закона Ричардсона [14]. Отметим, наконец, отличие от другой подобной бесконечнозарядной задачи — предложенной в [22] модели случайно растущей границы раздела сред. В ней также имеется двумерная поверхность неподвижных точек, но даже критические размерности полей и параметров оказываются неуниверсальными, см. [21]. Это означает, что в бесконечнозарядных задачах могут наблюдаться различные типы критического поведения, несвойственные обычным моделям с конечным числом констант связи типа стандартной модели φ^4 теории критического поведения [4], и ренормгрупповой аппарат может эффективно использоваться для их изучения. В частности, можно надеяться, что развитая выше функциональная техника расчета контрчленов и ренормгрупповых функций окажется полезной при изучении таких интересных бесконечнозарядных задач, как полная U_N-симметричная 4-фермионная модель в размерности $d = 2 + \epsilon$ [27] или задача об «истинных» случайных блужданиях с самоизбеганием [28].

Автор благодарит Л. Ц. Аджемяна, А. Н. Васильева, М. Гнатича и Д. Горвата за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 95-0-5.1-30).

Литература

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Наука, Москва (1967), ч. 2
2. W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Clarendon, Oxford (1990).
3. Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, УФН **166**(12), 1257 (1996).
4. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon, Oxford (1989).
5. Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, ЖЭТФ **95**, 1272 (1989).
6. C. De Dominicis and P. C. Martin, Phys. Rev. A **19**, 419 (1979).
7. Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич, ТМФ **58**, 72 (1984).
8. V. Yakhot and S. A. Orszag, Phys. Rev. Lett. **57**, 1722 (1986); J. Sci. Comp. **1**, 3 (1986).
9. W. P. Dannevik, V. Yakhot, S. A. Orszag, Phys. Fluids **30**, 2021 (1987).
10. V. Yakhot and S. Orszag, Phys. Fluids **30**, 3 (1987).
11. V. Yakhot, Phys. Fluids A **1**, 175 (1989).

12. Э. В. Теодорович, ПММ **52**, 218 (1988).
13. М. Гнатич, ТМФ **83**, 374 (1990).
14. M. Hnatich, *Talk at the Intern. Conf. «Renormalization Group 96»*, JINR, Dubna, August 1996.
15. D. Carati and L. Brenig, Phys. Rev. A **40**, 5193 (1989).
16. Т. Л. Ким, А. В. Сердюков, ТМФ **105**, 412 (1995).
17. Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич, ТМФ **64**, 196 (1985).
18. R. H. Kraichnan, J. Fluid. Mech. **5**, 407 (1959).
19. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **7**, 1723 (1964); S. Chen and R. H. Kraichnan, Phys. Fluids A **1**, 2019 (1989).
20. Н. В. Антонов, ЖЭТФ **105**, 614 (1994).
21. Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, ЖЭТФ **108**, 885 (1995).
22. С. И. Павлик, ЖЭТФ **106**, 553 (1994).
23. Дж. Коллинз, *Перенормировка*, Мир, Москва (1988).
24. Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, ТМФ **57**, 286 (1983).
25. А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Ленинграл (1976).
26. А. М. Яглом, Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмосферы и океана **17**, 1235 (1981).
27. A. Bondi, G. Curci, G. Paffuti, and P. Rossi, Ann. Phys. **199**, 268 (1990); А. Н. Васильев, М. И. Вязовский, С. Э. Деркачёв, К. А. Кивель, ТМФ **107**, 27 (1996).
28. S.É. Derkachov, J. Honkonen, and A. N. Vasil'ev, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 2479 (1990).