ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1664–1674

О ФЛУКТУАЦИОННОМ ФОНЕ НЕСЖИМАЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛАМИНАРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Г. Д. Чагелишвили, Г. Р. Худжадзе*

Абастуманская астрофизическая обсерватория Академии наук Грузии
380060, Тбилиси, Грузия
Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 октября 1996 г.

Исследован несжимаемый флуктуационный фон в ламинарных сдвиговых течениях с гладким профилем скорости. Конкретные расчеты проведены на примере параллельного течения Куэтта с использованием немодального анализа линейной динамики возмущений. Немодальный анализ позволил уловить явления, которые ускользали из виду в ранних исследованиях, и, тем самым, дал возможность представить флуктуационный фон в совершенно новом свете: в несжимаемых сдвиговых течениях пространственная спектральная плотность энергии флуктуационного фона является анизотропной, кроме того, в определенных областях пространства волновых чисел ее уровень намного превышает уровень теплового шума. В работе также выявлено, что в исследуемой неравновесной системе в стационарном состоянии существует новый, косвенный канал термализации энергии среднего течения — идет постоянная перекачка энергии среднего течения к пространственным фурье-гармоникам вихревых возмущений, а в конечном итоге — в тепловую энергию. Перечисляются возможные проявления описанного в работе флуктуационного фона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Каноническое исследование линейных процессов — спектральное разложение во времени возмущений с дальнейшим анализом собственных значений — в сдвиговых течениях затрудняет осмысление протекающих в них энергоемких процессов [1–4]. Более того, оно оставляет вне поле зрения некоторые явления первостепенной важности (которые будут перечислены ниже). В 90-е годы математически строго описаны причины этих затруднений [1], суть которых заключается в следующем: при каноническом (модальном) анализе линейных процессов в сдвиговых течениях операторы, фигурирующие в уравнениях, являются несамосопряженными и, как следствие этого, собственные функции задачи неортогональны друг другу — они сильно интерферируют между собой. В результате информация, полученная из анализа отдельных мод (собственных функций и собственных значений), является далеко не полной. Эти обстоятельства для корректного описания явлений делают необходимым точный расчет результатов интерференции собственных функций, что порой представляет собой проблему непреодолимой сложности.

Существует и другой, так называемый [2] немодальный, анализ линейных процессов в сдвиговых течениях, который берет свое начало со времен Кельвина [5] и Орра [6]. При этом подходе решается начальная задача с помощью прослеживания за эволюцией

*E-mail: georgech@mx.iki.rssi.ru

во времени пространственных фурье-гармоник возмущений [7–23]. Действенность второго подхода подтверждается тем прогрессом, который с его помощью был достигнут за последние годы в понимании многообразия процессов в сдвиговых течениях: получено много новых, неожиданных результатов, касающихся эволюции как вихревых [7–13], так и звуковых [14] возмущений. Этот метод с успехом используют и для изучения МГД-волн [15–18]; сформулирована новая концепция турбулизации сдвиговых течений [13, 19–22]; открыт новый механизм линейной трансформации волн в сдвиговых течениях [18, 23, 24]. Одним словом, немодальный подход, выявляя новые черты при изучении разных аспектов линейной динамики сдвиговых течений, инициировал переосмысление этих аспектов. Этот опыт подсказывает целесообразность использования немодального анализа для изучения гидродинамических флуктуаций в сдвиговых течениях. Действительно, первые шаги в этом направлении, проделанные в данной работе, представили флуктуационный фон несжимаемых (вихревых) возмущений в ламинарном течении Куэтта в совершенно новом свете, а именно:

1) пространственная спектральная плотность энергии несжимаемых флуктуаций в ламинарном течении Куэтта (ПК) является существенно анизотропной, и в определенных областях **k**-пространства ее уровень намного превосходит уровень теплового шума;

2) в исследуемой неравновесной системе в стационарном состоянии существует новый, косвенный, канал термализации энергии среднего течения — при неизменном флуктуационном фоне идет постоянная перекачка энергии среднего течения к пространственным фурье-гармоникам, а в итоге — в тепловую энергию.

Вышеперечисленные особенности флуктуационного фона объясняются тем, что при его формировании, помимо случайных (ланжевеновских) и диссипативных сил, определяющими являются еще два физических явления, неадекватно описываемые (или же вообще ускользающие из виду) при модальном анализе: а) линейный дрейф пространственных фурье-гармоник в **k**-пространстве; б) обмен энергией между средним течением и пространственными фурье-гармониками.

Работа построена следующим образом: в разд. 2, опираясь на работы [7–9, 13], феноменологически мы описываем явления а и б. В разд. 3, учитывая ланжевеновские и диссипативные силы в уравнениях несжимаемой гидродинамики, с помощью немодального анализа получаем динамическое уравнение для ПК. Расчеты проводим для двумерных возмущений в линейном приближении. Простота и наглядность полученного уравнения позволяют детально осмыслить процесс формирования флуктуационного фона, что мы и делаем в разд. 4. Помимо этого в разд. 4 приводим результаты расчетов ПК в трехмерном случае. В заключительном разд. 5 обсуждаем новый, косвенный, канал термализации энергии среднего течения, а также указываем на возможные проявления описанного в работе флуктуационного фона.

2. ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФУРЬЕ-ГАРМОНИК

Процессы а и б хорошо осмыслены в работах, культивирующих немодальный анализ, и их суть заключается в следующем:

а) В течении Куэтта волновое число пространственной фурье-гармоники вдоль оси ортогональной течению (т. е. вдоль сдвига скорости) меняется во времени. Можно сказать, что в линейном приближении существует «дрейф» пространственных фурье-гармоник в **k**-пространстве.

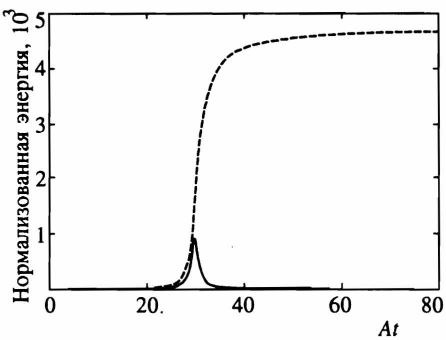

Рис. 1. Эволюции нормализованной (на начальное значение) энергии двумерных и трехмерных фурье-гармоник. Сплошная кривая соответствует двумерной фурье-гармонике (с параметрами $k_y(0)/k_x = 30$, $k_z = 0$). Штриховая кривая соответствует трехмерной фурье-гармонике (с параметрами $k_y(0)/k_x = 30$, $k_z/k_x = 1$, $\tilde{v}_z(0)/\tilde{v}_y(0) = -20$)

Действительно (см. [5–24]), в параллельных течениях с линейным сдвигом скорости (течении Куэтта)

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0(Ay, 0, 0) \tag{1}$$

(A — параметр сдвига, который будем считать положительным) возмущения не имеют форму простой волны из-за поворота ее гребня, обусловленного неоднородным характером течения. В таком случае волновое число пространственной фурье-гармоники зависит от времени [7–24]: если в начальный момент времени возмущена пространственная фурье-гармоника с волновыми числами k_x, $k_y(0)$ и k_z, т. е.

$$v_x(0) = \tilde{v}_x(k_x, k_y(0), k_z, 0) \exp\left[ik_x x + ik_y(0)y + ik_z z\right], \tag{2}$$

то при $t > 0$ эволюция ее фазы определяется уравнениями

$$v_x(t) \propto \exp\left[ik_x x + ik_y(t)y + ik_z z\right], \quad k_y(t) = k_y(0) - k_x At, \tag{3}$$

которые и описывают «линейный дрейф» фурье-гармоники в пространстве волновых чисел. Значения пространственных характеристик $(k_x, k_y(t), k_z)$ во многом определяют интенсивность обмена энергией между пространственными фурье-гармониками и сдвиговым течением. Следовательно, линейный дрейф приводит к изменению интенсивности этого обмена.

б) Не все пространственные фурье-гармоники могут черпать энергию сдвига и усиливаться. Усиливаются только те, которые находятся в определенной области **k**-пространства (именуемой в дальнейшем областью усиления). При этом каждая из гармоник усиливается в течение ограниченного промежутка времени, пока она не покинет область усиления в результате линейного дрейфа. К тому же нахождение пространственных фурье-гармоник в этой области в основном накладывает условия на направление их волнового вектора. Следовательно, процесс обмена энергией между вихревыми возмущениями и сдвиговым течением имеет ярко выраженный анизотропный характер в **k**-пространстве.

Итак, вихревые несжимаемые пространственные фурье-гармоники на линейной стадии эволюции могут черпать энергию сдвига и усиливаться в течение лишь ограниченного промежутка времени, испытывая временный рост. Есть существенная разница в динамике двумерных ($k_z = 0$) и трехмерных ($k_z \neq 0$) фурье-гармоник, которая хорошо прослеживается при сравнении эволюции их энергии (см. рис. 1). Рассмотрены пространственные фурье-гармоники, которые в начальный момент времени удовлетворяют неравенству $k_y(0)/k_x = 30 \gg 1$. Из-за линейного дрейфа со временем $k_y(t)$ начинает уменьшаться. Но пока $k_y(t) \gg k_x$, энергообмен между течением и пространственными фурье-гармониками невелик. А для времен, когда уже $k_y(t) \approx k_x$, как двумерные, так и трехмерные фурье-гармоники начинают интенсивно черпать энергию сдвига и усиливаться. Усиление двумерных гармоник прекращается в момент времени, когда $k_y(t) = 0$ (на рис. 1, когда $At = 30$); а затем, при $k_y(t)/k_x < 0$, они возвращают энергию обратно среде (нижняя кривая на рис. 1). Что касается трехмерных фурье-гармоник, то они и при $k_y(t)/k_x < 0$ продолжают усиливаться. Реально это усиление длится до времен, пока $k_y(t) \approx -k_x$ (штриховая кривая на рис. 1), т. е. область усиления в $\mathbf{k}$-пространстве для трехмерных фурье-гармоник шире, чем для двумерных. Более того, энергия трехмерных гармоник, в отличие от энергии двумерных, после прохождения области усиления не уменьшается (трехмерные фурье-гармоники не возвращают энергию обратно течению), а насыщается и стремится к величине, которая намного больше начального значения. Эти рассуждения справедливы при неучете вязких и случайных сил. Легко можно понять, что в действительности с увеличением $|k_y(t)|$ (когда $|k_y(t)| \to \infty$) вязкая диссипация становится существенной и превращает энергию трехмерных фурье-гармоник в тепло.

3. ВЫВОД ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПК

Несколько опережая события, скажем, что в полученном в данном разделе динамическом уравнении ПК наглядно представлены базовые процессы (случайные и диссипативные) теории Ландау–Лифшица, а также процессы а и б. Именно поэтому это уравнение позволяет достаточно глубоко осмыслить физику формирования флуктуационного фона в сдвиговых течениях. А конкретно, оно позволяет разграничить те области в $\mathbf{k}$-пространстве, в которых действие каждого из этих процессов является доминантным; позволяет понять, что процессы а и б более чем значимы при формировании флуктуационного фона, что именно эти процессы определяют его пекулярный характер.

В неравновесных системах (коими являются неоднородные течения) для расчета гидродинамических флуктуаций предпочтительно опираться на теорию Ландау–Лифшица [25] — на флуктуационно-диссипационную теорию. Рассуждение об этом см. в [26]. Для простоты рассмотрим параллельное несжимаемое течение Куэтта (см. (1)). При этом ограничимся докритическими значениями числа Рейнольдса, когда еще сохраняется ламинарный характер течения. В таком случае флуктуации считаются настолько малыми, что можно ограничиться линейными динамическими уравнениями [26]. Нелинейные члены становятся важными, лишь когда состояние среды близко к критической точке, после чего течение турбулизуется (подробное см. в [27]). Для достижения цели данного раздела (вывода динамического уравнения ПК) сделаем еще одно ограничение — рассмотрим двумерные возмущения. Флуктуационный фон трехмерных возмущении обсудим в следующем параграфе.

Итак, наше исследование базируем на флуктуационно-диссипационной теории, рассматриваем несжимаемые возмущения и ограничиваемся линейным приближением по ним. Тогда в двумерном случае можно стартовать со следующих уравнений [25, 28, 29]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}\right)v_x + Av_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v_x + \frac{1}{\rho_0}f_x, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Ay\frac{\partial}{\partial x}\right)v_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v_y + \frac{1}{\rho_0}f_y, \tag{6}$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность, p, v_x, v_y — возмущения давления и компонент скорости соответственно, ν — кинематическая вязкость среды. Компоненты случайной силы f_x и f_y определяются тензором спонтанного напряжения $S_{ij}(\mathbf{r}, t)$:

$$f_i = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i, j = x, y. \tag{7}$$

Рассматривая двумерные возмущения, считаем, что они не зависят от координаты z. Статистические свойства тензора спонтанного напряжения в соответствии с флуктуационно-диссипационной теорией описываются следующей корреляционной функцией [25, 28, 29]:

$$\langle S_{ij}(t, \mathbf{r})S_{kl}(t', \mathbf{r}')\rangle = 2T\rho_0\nu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \tag{8}$$

Для простоты рассматриваются жидкости, коэффициент второй вязкости ξ которых равен нулю. В (8) и ниже угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Действуя в духе немодального подхода, проведем фурье-разложение возмущений лишь по пространственным координатам:

$$\left\{\begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ p \\ S_{ij} \end{array}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \left\{\begin{array}{c} \tilde{v}_x(k_x, k_y, t) \\ \tilde{v}_y(k_x, k_y, t) \\ \tilde{p}(k_x, k_y, t) \\ \tilde{S}_{ij}(k_x, k_y, t) \end{array}\right\} \exp(ik_x x + ik_y y), \tag{9}$$

затем проследим за эволюцией во времени ПК ($e_{\mathbf{k}}(t)$). Последняя с усредненной энергией возмущения ($\langle e\rangle$) связана с помощью следующей цепочки уравнений:

$$\langle e\rangle = \left\langle\rho_0\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}\int dk_x dk_y\left[\rho_0(|\tilde{v}_x|^2 + |\tilde{v}_y|^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int dk_x dk_y\left(\rho_0\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_y^2}|\tilde{v}_x|^2\right) \equiv \int dk_x dk_y e_{\mathbf{k}}(t). \tag{10}$$

Подставляя (9) в уравнения (4)–(8), после громоздких, но несложных преобразований для $e_{\mathbf{k}}(t)$ получаем следующее динамическое уравнение:

$$\frac{\partial e_{\mathbf{k}}}{\partial t} = Ak_x\frac{\partial e_{\mathbf{k}}}{\partial k_y} + \frac{2Ak_xk_y}{k_x^2 + k_y^2}e_{\mathbf{k}} - 2\nu(k_x^2 + k_y^2)e_{\mathbf{k}} + 2\nu(k_x^2 + k_y^2)T. \tag{11}$$

Четыре члена в правой части (11) соответствуют тем четырем процессам, которые принимают участие в формировании ПК. Первый из них ответствен за «линейный дрейф» пространственных фурье-гармоник в $\mathbf{k}$-пространстве, т. е. за процесс а, описываемый формулой (3); второй член ответствен за процесс обмена энергией между средним течением и пространственными фурье-гармониками (б). Третий и четвертый члены описывают действие диссипативных и случайных сил соответственно.

4. ФИЗИКА ФОРМИРОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИОННОГО ФОНА

При отсутствии сдвига ($A = 0$) первые два члена уравнения (11) тождественно равны нулю, и поэтому два последних члена остаются единственными формирующими флуктуационный фон. В таком (равновесном) случае в стационарном пределе ($\partial e_{\mathbf{k}}/\partial t = 0$), как и следовало ожидать (см., например, [25, 28, 29]), диссипативные и случайные силы приводят к белому шуму:

$$e_{\mathbf{k}} = T. \tag{12}$$

Для описания ПК при $A \neq 0$ удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\frac{e_{\mathbf{k}}}{T} \equiv E_{\mathbf{K}}, \quad At \equiv \tau, \quad k_\nu \equiv \sqrt{\frac{V_0}{L_0 \nu}} \equiv \sqrt{\frac{A}{\nu}}, \quad \frac{k_x}{k_\nu} \equiv K_x, \quad \frac{k_y}{k_\nu} \equiv K_y, \quad K_x^2 + K_y^2 \equiv K^2, \tag{13}$$

где в выражении для k_ν учтена связь параметра сдвига A с шириной канала течения Куэтта L_0 и перепадом скорости течения V_0 ($A \equiv V_0/L_0$). В обозначениях (13) уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial E_{\mathbf{K}}}{\partial \tau} = K_x \frac{\partial E_{\mathbf{K}}}{\partial K_y} + 2\frac{K_x K_y}{K^2} E_{\mathbf{K}} - 2K^2 E_{\mathbf{K}} + 2K^2. \tag{14}$$

Из последнего уравнения легко можно понять, что при формировании $E_{\mathbf{K}}$ наблюдается разная эффективность действия этих четырех процессов в разных областях $\mathbf{K}$-пространства. Действие двух последних членов становится доминирующим для пространственных фурье-гармоник с большими волновыми числами ($K \geq 1$), а при $K < 1$ доминирующими являются два первых члена. При этом эффективность процесса б больше при умеренных значениях отношения K_y/K_x. Последнее обстоятельство и определяет пекулярный характер исследуемого флуктуационного фона — его анизотропию в $\mathbf{K}$-пространстве и сильное отклонение $E_{\mathbf{K}}$ от белого шума.

В стационарном пределе ($\partial E_{\mathbf{K}}/\partial \tau = 0$) решение (13) показано на рис. 2 и 3 (для наглядности представлены графики функции $\lg E_{\mathbf{K}}$). Графики, как и на последующих рисунках, построены для положительных K_x. Для отрицательных K_x графики строятся в соответствии с тождеством $E_{-\mathbf{K}} \equiv E_{\mathbf{K}}^*$, которое следует из условия действительности возмущений ($\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$). На рис. 2 представлены эквиконтуры $\lg E_{\mathbf{K}}$ на полуплоскости $K_x K_y$ при $K_z = 0$. Как видно из него, при малых K_x и K_y эквиконтуры симметричны. Максимальное (пиковое) значение $\lg E_{\mathbf{K}} = 1.8$ достигается в окрестности $K_y = 0$. На рис. 3 также визуализуется зависимость $\lg E_{\mathbf{K}}$ от K_x и K_y при $K_z = 0$.

Можно предположить, что минимальное значение волнового числа флуктуационного фона определяется шириной канала ($k_{min} \sim 1/L_0$). Причем это минимальное значение относится только к величине волнового числа вдоль оси x, так как k_y из-за линейного дрейфа (см. (3)) легко «проходит» и через нулевое значение. Следовательно, в

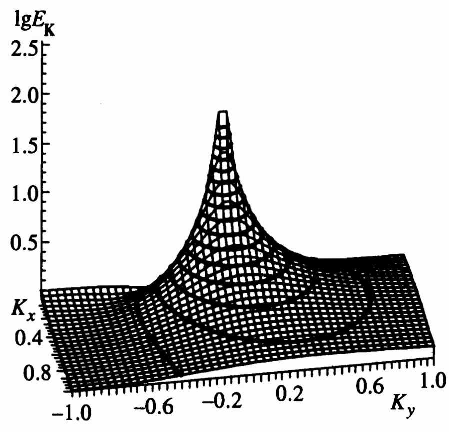

Рис. 2

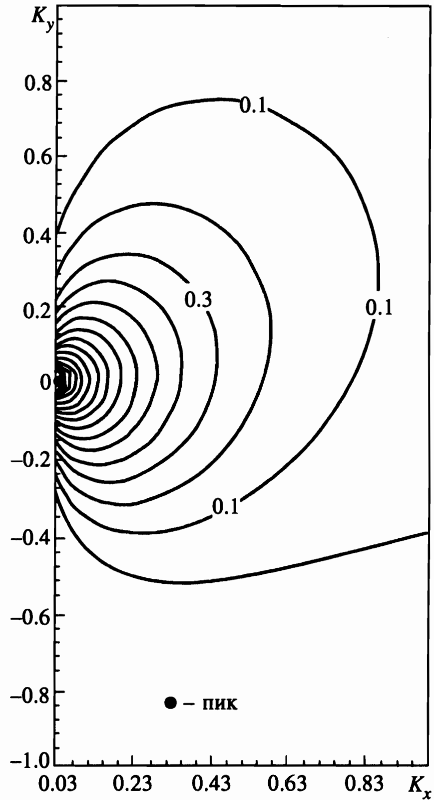

Рис. 3

Рис. 2. Эквиконтуры $\lg E_K$ (для двумерного флуктуационного фона $K_z = 0$) на плоскости K_xK_y для $K_x > 0$. Максимальное (пиковое) значение $\lg E_K = 1.8$ достигается в окрестности $K_y = 0$

Рис. 3. Зависимость $\lg E_K$ от K_x и K_y для двумерного флуктуационного фона ($K_z = 0$) на плоскости K_xK_y для $K_x > 0$

соответствии с (13) в безразмерных единицах можно написать

$$|K_x| > K_{x,min} \sim \sqrt{\frac{\nu}{V_0 L_0}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathscr{R}}}, \qquad (15)$$

где $\mathscr{R}$ — число Рейнольдса.

Опишем физику формирования флуктуационного фона на примере двумерных фурье-гармоник. Для наглядности приведем качественный рис. 4. На этом рисунке в горизонтально заштрихованной области, в которой выполняется условие $K \geq 1$, случайные и диссипативные силы за довольно короткий промежуток времени ($\tau' \approx 1/K^2 \approx 1$) формируют спектр пространственных фурье-гармоник, близкий к белому шуму ($E_K \approx 1$). Эти гармоники служат исходным «материалом» для формировании спектра в области $K < 1$. Действительно, из-за «линейного дрейфа» (процесса а) пространственные

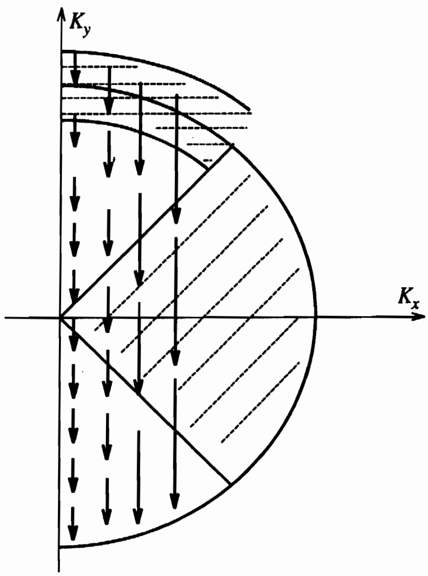

Рис. 4

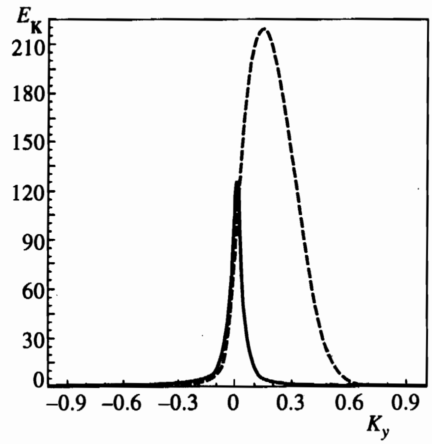

Рис. 5

Рис. 4. Качественный рисунок для описания динамики пространственных фурье-гармоник в **K**-пространстве. Горизонтальными и наклонными штрихами выделены области доминирования отдельных базовых процессов. В горизонтально заштрихованной области доминирующими являются случайные и диссипативные силы. В области с наклонной штриховкой вступает в силу обмен энергией между течением и пространственными фурье-гармониками. Стрелки указывают направление дрейфа фурье-гармоник в **K**-пространстве

Рис. 5. Зависимость $E_K(K_y)$. Сплошная кривая представляет собой разрез поверхности, приведенной на рис. 2, для $K_x = 0.03$ (но не для логарифмической функции). Штриховая кривая описывает зависимость трехмерного флуктуационного фона E_K от K_y при $K_z = K_x = 0.03$

фурье-гармоники дрейфуют в **K**-пространстве в сторону малых K_y (в процессе дрейфа K_x не меняется). Направление дрейфа на рис. 4 показано направленными вертикально вниз стрелками. С уменьшением K_y, когда отношение K_y/K_x становится порядка единицы (область с наклонной штриховкой на рис. 4), вступает в силу обмен энергией между течением и пространственными фурье-гармониками. Этот обмен для гармоник, K_x которых порядка единицы (из-за доминирующего влияния вязких диссипаций при $K \approx 1$), является слабо выраженным, а для гармоник с малыми K_x — определяющим. В процессе уменьшения K_y последние пространственные фурье-гармоники все интенсивнее черпают энергию сдвига (см. выше пункт б). Именно этот исток энергии обусловливает сильное отклонение E_K от белого шума и приводит к пику при малых K_x и K_y (см. рис. 3). Пиковое значение тем больше, чем меньше $K_{x,min}$, т. е. чем больше число Рейнольдса.

Из рассуждений, приведенных в пункте б, можно понять, что для трехмерных фурье-гармоник максимальное значение $\lg E_K$ должно быть больше, чем для двумерных, и должно достигаться в области $K_y/K_x < 0$. Количественно эти факты подтверждаются расчетами трехмерной задачи. Трехмерные расчеты несложны, но очень громозд-

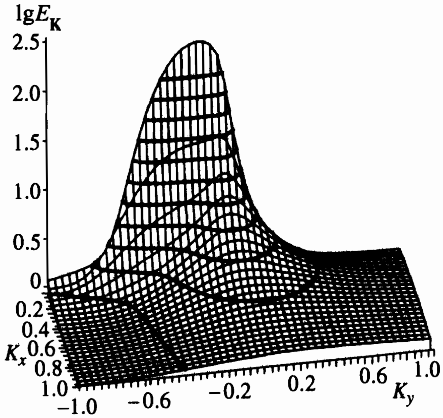

Рис. 6

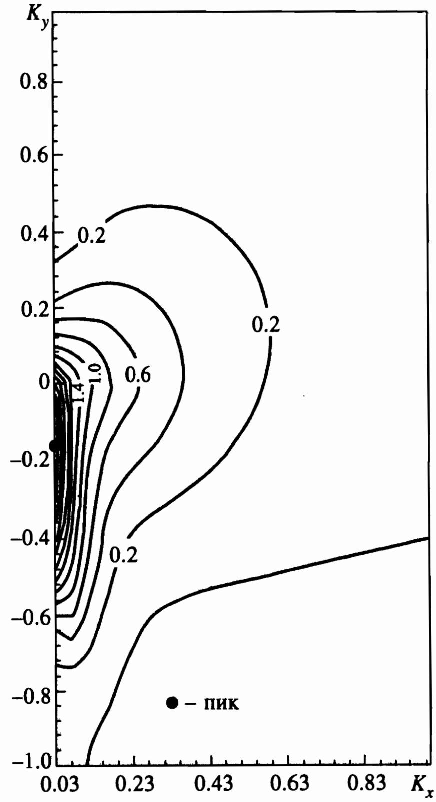

Рис. 7

Рис. 6. Эквиконтуры $\lg E_K$ (для трехмерного флуктуационного фона) на плоскости K_xK_y для $K_x > 0$ и $K_z = 0.03$. Максимальное пиковое значение $\lg E_K = 2.37$ достигается в окрестности $K_y = -0.14$, т. е. существенно смещено в область $K_y < 0$

Рис. 7. Зависимость $\lg E_K$ от K_x и K_y для трехмерного флуктуационного фона на плоскости K_xK_y при $K_x > 0$ и $K_z = 0.03$

ки, поэтому их в данной работе мы не приводим. Результаты трехмерных вычислений представлены на рис. 5, 6 и 7. На рис. 5 для сравнения вместе приведены результаты двумерного и трехмерного расчетов. Сплошная кривая относится к двумерной фурье-гармонике $K_x = 0.03$; $K_z = 0$ — это разрез поверхности, приведенной на рис. 2 (но уже не для логарифмической функции). Штриховая кривая описывает зависимость трехмерного флуктуационного фона E_K от K_y при $K_z = K_x = 0.03$. Спад трехмерного флуктуационного фона при $K_y \to -1$ до $E_K \approx 1$ объясняется действием вязкости. Более наглядно трехмерный флуктуационный фон представлен на рис. 6 и 7. На рис. 6 приведены эквиконтуры $\lg E_K$ в плоскости K_xK_y при $K_z = 0.03$. Из него видно, что по сравнению с двумерным случаем пиковое значение $\lg E_K$ в трехмерном случае существенно смещено в область $K_y/K_x < 0$, т. е. реальный, трехмерный флуктуационный фон в сдвиговых течениях является существенно анизотропным в **K**-пространстве. Как видно из рис. 7, для трехмерных фурье-гармоник максимальное значение $\lg E_{\mathrm{K}}$ больше, чем для двумерных, а сам график более распластан вдоль оси K_y.

Следует отметить, что вид флуктуационного фона, изображенного на рис. 2, 3, 5, 6 и 7, остается вне поле зрения работы [30]. В ней, хоть и исследуется довольно общая задача (с использованием, как и нами, уравнений Навье–Стокса–Ланжевена в линейном приближении), но для получения конкретных результатов в конечном итоге проводится фурье-анализ возмущений во времени, а это, как отмечалось во Введении, является неоптимальной процедурой, неадекватно описывающей процессы а и б.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов данной работы в первую очередь следует отметить, что пространственная спектральная плотность энергии несжимаемых флуктуаций в ламинарном течении Куэтта является анизотропной и сильно отличается от белого шума. Конкретно, в определенных областях **k**-пространства ее уровень намного превышает уровень теплового шума. Кроме того, из динамики пространственных фурье-гармоник (см. рис. 4) непосредственно следует, что в реальном трехмерном случае осуществляется постоянная перекачка энергии среднего течения к фоновым (несжимаемым, вихревым) возмущениям, а в итоге — в тепловую энергию среды. Легко понять, что этот новый, косвенный, канал термализации энергии течения зависит от темпа черпания энергии среднего течения фоновыми возмущениями, который тем больше, чем больше число Рейнольдса [2, 7, 8]. Следовательно, с увеличением числа Рейнольдса эффективность этого канала должна не уменьшаться, а нарастать(!). Конкретные количественные оценки, которые позволили бы судить, при каких параметрах системы этот процесс может стать действенным (сравнимым с другими процессами производства средней энтропии), выходят за рамки данной работы — для их проведения необходимы детальные численные расчеты трехмерной задачи.

Следует отметить, что описанная в данной работе специфика флуктуационного фона характерна и для других сдвиговых течений. Она должна проявляться в тех случаях, когда гидродинамические процессы существенны, например при броуновском движении маленьких макроскопических частиц. Подробное обсуждение значимости макроскопических (гидродинамических) процессов для броуновского движения маленьких макроскопических частиц приводится в книгах Климонтовича [28, 29]. Скорее всего, найденная нами анизотропия флуктуационного фона, а также его высокий уровень (по сравнению с тепловым шумом) при больших числах Рейнольдса должны обусловить анизотропию броуновского движения макрочастиц в сдвиговых течениях.

В заключение приведем соображения о возможном значении описанного в работе флуктуационного фона в турбулизации некоторых сдвиговых течений. Известно, например, что течение Куэтта турбулизуется только конечными возмущениями. В соответствии с концепцией, разрабатываемой в последние годы (см. [13, 19–22]), турбулизация течений Куэтта происходит благодаря «положительной обратной связи» (суть которой заключается в регенерации пространственных фурье-гармоник, черпающих энергию среднего течения), обусловленной нелинейными явлениями. Следовательно, для турбулизации необходимо присутствие в течении конечных возмущений. Понятно, что такие возмущения могут создаваться неким внешним возбудителем. Но, согласно результатам наших исследований, конечные возмущения могут иметь и флуктуационное происхождение. Действительно, при больших числах Рейнольдса в области малых волновых чисел флуктуации могут быть сильными, существенно превышающими уровень теплового шума (см. рассуждения и рисунки предыдущего раздела). Это обстоятельство, в свою очередь, при определенных числах Рейнольдса приводит к «включению» нелинейных явлений и при «положительной обратной связи» [13, 19–22] — к турбулизации течения.

Авторы выражают благодарность С. С. Моисееву, В. Г. Морозову и О. Г. Чхетиани за полезные обсуждения и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки РФ и Международного научного фонда (грант RVO 200).

Литература

1. S. C. Reddy, P. J. Schmid, and D. S. Hennington, SIAM J. Appl. Math. **53**, 15 (1993).
2. L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll, Science **261**, 578 (1993).
3. L. H. Gustavsson, J. Fluid Mech. **224**, 241 (1991).
4. S. C. Reddy and D. S. Henningson, J. Fluid Mech. **252**, 209 (1993).
5. Kelvin (W. Thomson), Phil. Mag. **24** (5), 188 (1887).
6. W. M. F. Orr, Proc. Roy. Irish. Acad. A **27**, 9 (1907).
7. A. D. D. Craik and W. O. Criminale, Proc. R. Soc. Lond. A **406**, 13 (1986).
8. K. Moffatt, in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, ed. by A. M. Yaglom and V. I. Tatarskii, Nauka Press, Moscow (1967), p. 139.
9. S. Marcus and W. H. Press, J. Fluid Mech. **79**, 525 (1977).
10. W. O. Criminale and P. G. Drazin, Studies in Applied Mathematics **83**, 123 (1990).
11. Дж. Г. Ломинадзе, Г. Д. Чагелишвили, Р. Г. Чанишвили, Письма в АЖ **14**, 856 (1988) [Sov. Astron. Lett. **14**, 364 (1988)].
12. B. F. Farrell and P. J. Ioannou, Phys. Fluids A **5**, 1390 (1993).
13. G. D. Chagelishvili, R. G. Chanishvili, J. G. Lominadze, and I. N. Segal, in *Proc. of the IV Intern. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, Japan 17–20 November 1992, ESA SP–351 (1993), p. 23.
14. G. D. Chagelishvili, A. D. Rogava, and I. N. Segal, Phys. Rev. E **50**, R4283 (1994).
15. G. D. Chagelishvili, T. S. Christov, R. G. Chanishvili, and J. G. Lominadze, Phys. Rev. E **47**, 366 (1993).
16. S. A. Balbus and J. H. Hawley, Astrophys. J. **400**, 610 (1992).
17. S. H. Lubow and H. C. Spruit, Asyrophys. J. **445**, 337 (1995).
18. G. D. Chagelishvili, R. G. Chanishvili, J. G. Lominadze, and A. G. Tevzadze, Phys. Plasmas **4**, 259 (1997).
19. G. D. Chagelishvili, R. G. Chanishvili, and J. G. Lominadze, in *High Energy Astrophysics: American and Soviet Perspectives*, National Academy Press, Washington (1991).
20. T. Gebhardt and S. Grossmann, Phys. Rev. E **50**, 3705 (1994).
21. J. S. Baggett, T. A. Driscoll, and L. N. Trefethen, Phys. Fluids **7**, 833 (1995).
22. G. D. Chagelishvili, R. G. Chanishvili, T. S. Christov, J. G. Lominadze, and I. N. Segal, Preprint 126 of Spase Research Institute RAS, Moscow (1995).
23. G. D. Chagelishvili, A. D. Rogava, and D. G. Tsiklauri, Phys. Rev. E **53**, 6028 (1996).
24. Г. Д. Чагелишвили, О. Г. Чхетиани, Письма в ЖЭТФ **62**, 294 (1995) [JETP Lett. **62**, 301 (1995)].
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).
26. R. Schmitz, Phys. Rep. **171**(1), 1 (1988).
27. R. Graham, in *Fluctuations, Instabilities, and Phase Transitions*, ed. by T. Riste, Plenum, New York (1975), p. 215. R. Graham and H. Pleiner, Phys. Fluids **18**, 130 (1975).
28. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
29. Ю. Л. Климонтович, *Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем*, Наука, Москва (1990).
30. J. Lutsko and J. W. Dufty, Phys. Rev. A **32**, 3040 (1985).