ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1675–1693

ФЛУКТУАЦИИ В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛЕКСОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В. П. Романов, Г. К. Скляренко

Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 4 марта 1997 г.

Рассматриваются флуктуации директора в нематических жидких кристаллах в электрическом поле при наличии флексоэлектрического эффекта. Для планарной и гомеотропной ориентаций рассчитаны корреляционные функции и проведен их анализ вблизи перехода Фредерикса и пороговой флексоэлектрической неустойчивости. Для обеих геометрий рассчитана угловая зависимость интенсивности рассеянного света на флуктуациях директора и рассмотрено ее поведение при значениях электрического поля близких к критическому.

1. ВВЕДЕНИЕ

Благодаря анизотропии диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости жидкие кристаллы (ЖК) претерпевают разнообразные структурные превращения при воздействии внешних электрического и магнитного полей [1–3]. При этом речь, как правило, идет о неустойчивости однородно ориентированного состояния ЖК при значениях поля выше порогового. Такое изменение макроскопической ориентационной структуры физически эквивалентно фазовому переходу второго рода [1, 4]. Пороговый характер этих явлений связан с ограниченностью слоя ЖК и с определенной жесткостью граничных условий, которые обусловливают возникновение конечных градиентов ориентационных возмущений, допустимых лишь при конечных значениях внешнего поля.

Наиболее известным и хорошо изученным эффектом ориентационного фазового перехода в нематических жидких кристаллах (НЖК) является эффект Фредерикса [1–3]. Исследования этого перехода, который имеет место как в статических полях, так и в поле световой волны [5–9], проводились для различных граничных условий и ориентаций НЖК [10–14]. Рассматривались различные типы искажений, периодические и апериодические, которые возникают при значениях поля выше порогового [14–16].

В работах [10–12, 14] рассмотрены различные динамические аспекты задач, связанных с влиянием внешнего поля на поведение нематиков, причем предпереходные явления изучались путем анализа наиболее нестабильной моды, амплитуда которой при приближении величины внешнего поля к пороговому аномально возрастает.

В 1969 г. Мейер показал [17], что в НЖК, обладающем центром симметрии, возможен особый пьезоэлектрический эффект, который получил название флексоэлектрического. Этот линейный эффект образования модулированной структуры, индуцированный однородным электрическим полем, связан с существенно анизотропной формой молекул, обладающих постоянными дипольными моментами [1–3].

Настоящая работа посвящена исследованию тепловых флуктуаций в ограниченных НЖК при наличии флексоэлектрического эффекта. Стандартный метод исследования флуктуаций в НЖК состоит в разложении их по собственным модам [10–16, 18–20]. Решение представляется в виде бесконечного ряда, причем нахождение каждого члена этого ряда связано с решением сложного трансцедентного уравнения. В работах [21, 22] был предложен способ, позволяющий получить замкнутые выражения для корреляционных функций флуктуаций директора в случаях как слабого, так и жесткого сцепления с подложкой. Этот подход использован для расчета тепловых флуктуаций в НЖК с жесткими граничными условиями во внешнем электрическом поле при наличии эффекта анизотропии диэлектрической проницаемости и флексоэлектрического эффекта. В результате получены выражения для корреляционных функций флуктуаций директора и интенсивности рассеянного света в случаях гомеотропной и планарной ориентаций нематика. Показано, что угловое распределение интенсивности рассеянного света зависит от величины приложенного поля. Проведен анализ полученных результатов вблизи перехода Фредерикса и пороговой флексоэлектрической неустойчивости.

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Пусть НЖК, в котором существует флексоэлектрический эффект, заключен в ячейке толщиной L между плоскопараллельными пластинами с жесткими граничными условиями во внешнем электрическом поле. Введем декартову систему координат с началом в центре ячейки и осью z, нормальной к пластинам (рис. 1).

Изменение свободной энергии ΔF складывается из упругого вклада ΔF_{el}, вклада ΔF_E, связанного с ориентацией директора во внешнем поле, и вклада ΔF_{flex}, обусловленного возникновением флексоэлектрической поляризации [1–3, 14]:

$$\Delta F = \Delta F_{el} + \Delta F_E + \Delta F_{flex} = \frac{1}{2}\int d^3r \Big\{ K_1(\operatorname{div}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})^2 + \\ + K_3[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]^2 - \frac{\varepsilon_a}{4\pi}(\mathbf{nE})^2 - 2\mathbf{E}\Big(e_1\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{n} + e_3[\operatorname{rot}\mathbf{n}\,\mathbf{n}]\Big)\Big\}, \tag{2.1}$$

где K_1, K_2, K_3 — модули Франка, $\mathbf{n}$ — вектор директора, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$ — анизотропия диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp$ — ди-

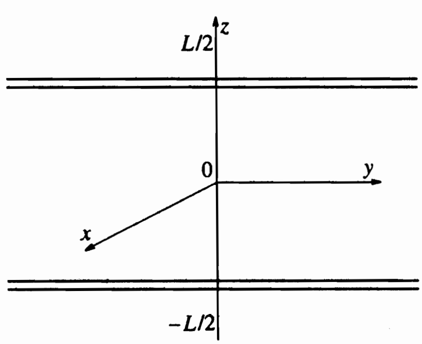

Рис. 1. Геометрия ячейки с жидким кристаллом

электрические проницаемости вдоль и поперек оси нематика соответственно, для определенности считается $\varepsilon_a > 0$, e_1, e_3 — флексоэлектрические коэффициенты.

Рассмотрим вклад в свободную энергию, связанный с флуктуациями директора. Представим вектор $\mathbf{n}$ в виде $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}_0$ — равновесная ориентация директора, $\delta\mathbf{n}$ — флуктуация директора. Из-за жестких граничных условий на границах области

$$\delta\mathbf{n}(x, y, z = \pm L/2) = 0. \tag{2.2}$$

Полагая отклонение директора $\delta\mathbf{n} = \mathbf{n} - \mathbf{n}_0$ малым, в линейном по $\delta\mathbf{n}$ приближении можно записать $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}_0^2 + 2\mathbf{n}_0\delta\mathbf{n}$, т. е. $\mathbf{n}_0\delta\mathbf{n} = 0$. Это означает, что векторы $\mathbf{n}_0$ и $\delta\mathbf{n}$ ортогональны. Интегрируя (2.1) по частям с учетом граничных условий (2.2), с точностью до членов второго порядка по $\delta\mathbf{n}$ формулу (2.1) можно представить в виде

$$\Delta F = \frac{1}{2}\int d^3r\,\delta\mathbf{n}(\mathbf{r})\hat{A}\delta\mathbf{n}^T(\mathbf{r}), \tag{2.3}$$

где $\hat{A}$ — некоторый дифференциальный оператор, индекс T означает транспонирование.

Как известно, корреляционная матрица флуктуаций директора $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle\delta\mathbf{n}(\mathbf{r})\delta\mathbf{n}^T(\mathbf{r})\rangle$ должна удовлетворять соотношению [4]

$$\hat{A}\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k_B T\hat{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.4}$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица, T — температура, k_B — постоянная Больцмана. Флуктуацию $\delta\mathbf{n}(\mathbf{r})$ удобно представить в виде двумерного интеграла Фурье:

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q\exp[-i(\mathbf{q}\mathbf{r}_\perp)]\delta\mathbf{n}(\mathbf{q}, z), \tag{2.5}$$

где $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$, $\mathbf{q}$ — волновой вектор, лежащий в плоскости xy, $\mathbf{q} = (q\cos\varphi, q\sin\varphi)$, φ — угол между вектором $\mathbf{q}$ и осью x. Тогда изменение свободной энергии (2.3) можно записать в виде

$$\Delta F = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q\Delta F_\mathbf{q}, \tag{2.6}$$

где

$$\Delta F_\mathbf{q} = \frac{1}{2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz\ \delta\mathbf{n}^*(\mathbf{q}, z)\hat{A}_\mathbf{q}\delta\mathbf{n}^T(\mathbf{q}, z), \tag{2.7}$$

$\hat{A}_\mathbf{q}$ — оператор $\hat{A}$ в $(\mathbf{q}, z)$-представлении, звездочка означает комплексное сопряжение. Уравнение (2.4) после перехода к фурье-представлению примет вид

$$\hat{A}_\mathbf{q}\hat{G}(\mathbf{q}, z, z') = k_B T\hat{I}\delta(z - z'). \tag{2.8}$$

Следовательно, для того чтобы определить корреляционную матрицу, необходимо обратить оператор $\hat{A}_\mathbf{q}$ с учетом граничных условий

$$\hat{G}(\mathbf{q}, z = \pm L/2, z') = 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим решение этой задачи для двух ориентаций НЖК: гомеотропной и планарной.

3. ФЛУКТУАЦИИ ДИРЕКТОРА В ГОМЕОТРОПНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЯЧЕЙКЕ

При гомеотропной ориентации равновесное направление директора имеет вид $\mathbf{n}_0 = (0,0,1)$, а его флуктуация $\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y, 0)$, причем на границах выполняется соотношение

$$n_x(x,y,z=\pm L/2) = n_y(x,y,z=\pm L/2) = 0.$$

Пусть ячейка находится в однородном электрическом поле, направленном вдоль оси x, $\mathbf{E} = (E,0,0)$. Тогда изменение свободной энергии (2.1) с точностью до членов второго порядка по $\delta\mathbf{n}$ принимает вид

$$\Delta F^{(h)} = \frac{1}{2}\int d^3r\Big\{K_1(\partial_x n_x + \partial_y n_y)^2 + K_2(\partial_x n_y - \partial_y n_x)^2 + K_3[(\partial_z n_x)^2 + (\partial_z n_y)^2] - \\ - \frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 n_x^2 - 2E[e_1 n_x(\partial_x n_x + \partial_y n_y) + e_3(\partial_z n_x - n_y\partial_x n_y + n_y\partial_y n_x)]\Big\}, \tag{3.1}$$

где символ $\partial_j (j = x,y,z)$ означает частную производную по соответствующей координате.

После интегрирования по частям и перехода к двумерному спектру Фурье выражение (3.1) можно представить в форме (2.7):

$$\Delta F_{\mathbf{q}}^{(h)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz(n_x^*, n_y^*)\hat{A}_{\mathbf{q}}^h \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $n_i \equiv n_i(\mathbf{q}, z)$, $i = x, y$, матрица $\hat{A}_{\mathbf{q}}^h$ равна

$$\hat{A}_{\mathbf{q}}^h = \begin{pmatrix} K_1q_x^2 + K_2q_y^2 - K_3\partial_z^2 - \dfrac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 & (K_1 - K_2)q_xq_y + i(e_1 - e_3)Eq_y \\ (K_1 - K_2)q_xq_y - i(e_1 - e_3)Eq_y & K_1q_y^2 + K_2q_x^2 - K_3\partial_z^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\hat{A}_{\mathbf{q}}^h$ диагонализуется преобразованием вида $\hat{U}^{-1}\hat{A}_{\mathbf{q}}^h\hat{U}$, где $\hat{U}$ — матрица, составленная из собственных векторов $\hat{A}_{\mathbf{q}}^h$:

$$\hat{U} =$$

$$= \begin{pmatrix} (K_1 - K_2)q_xq_y + i(e_1 - e_3)Eq_y & (K_1 - K_2)q_xq_y + i(e_1 - e_3)Eq_y \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 + (K_1 - K_2)(q_y^2 - q_x^2) + g\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 + (K_1 - K_2)(q_y^2 - q_x^2) - g\right] \end{pmatrix},$$

где

$$g = \left[(K_1 - K_2)^2q^4 + \left(\frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2\right)^2 + 4(e_1 - e_3)^2E^2q_y^2 + \frac{\varepsilon_a}{2\pi}E^2(q_y^2 - q_x^2)(K_1 - K_2)\right]^{1/2}.$$

Уравнение (2.8) можно переписать в эквивалентном виде

$$\hat{U}^{-1}\hat{A}_{\mathbf{q}}^{h}\hat{U}\hat{U}^{-1}\hat{G}^{h}\hat{U} = k_B T\hat{I}\delta(z-z'). \tag{3.3}$$

Используя явные выражения для матриц $\hat{A}_{\mathbf{q}}^{h}, \hat{U}$ и $\hat{U}^{-1}$, имеем

$$\begin{pmatrix} \partial_z^2 - P_{(h)}^2 & 0 \\ 0 & \partial_z^2 - Q_{(h)}^2 \end{pmatrix} \hat{X} = -\frac{k_B T}{K_3}\hat{I}\delta(z-z'), \tag{3.4}$$

где

$$\hat{X} = \hat{U}^{-1}\hat{G}^{h}\hat{U}, \tag{3.5}$$

$$P_{(h)}^2 = \frac{1}{2K_3}\left[(K_1+K_2)q^2 - \frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 + g\right], \tag{3.6}$$

$$Q_{(h)}^2 = \frac{1}{2K_3}\left[(K_1+K_2)q^2 - \frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 - g\right]. \tag{3.7}$$

Из граничных условий (2.9) следует, что

$$\hat{X}(z=\pm L/2, z') = 0. \tag{3.8}$$

Таким образом, (3.4), (3.8) представляют собой четыре замкнутых дифференциальных уравнения с граничными условиями для четырех элементов матрицы $\hat{X}$. Очевидно, что

$$X_{12}(z,z') = X_{21}(z,z') = 0. \tag{3.9}$$

Нахождение диагональных элементов матрицы $\hat{X}$ сводится к решению граничной задачи типа

$$\begin{aligned} &\partial_z^2 X_{ii}(z,z') - a_{ii}^2 X_{ii}(z,z') = b_{ii}\delta(z-z'), \\ &X_{ii}(z=\pm L/2, z') = 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ее решение имеет вид

$$X_{ii}(z,z') = \begin{cases} X_{ii}^{(+)} = C^{(+)}\,\mathrm{sh}[a_{ii}(z-L/2)], & z > z', \\ X_{ii}^{(-)} = C^{(-)}\,\mathrm{sh}[a_{ii}(z+L/2)], & z < z', \end{cases} \tag{3.11}$$

где $C^{(+)}, C^{(-)}$ — некоторые постоянные. Их можно найти из условий, налагаемых на решения $X_{ii}^{(+)}$ и $X_{ii}^{(-)}$ в точке $z=z'$,

$$\begin{aligned} &X_{ii}^{(+)}(z=z') = X_{ii}^{(-)}(z=z'), \\ &\partial_z X_{ii}^{(+)}(z=z') - \partial_z X_{ii}^{(-)}(z=z') = b_{ii}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решая систему (3.12) и подставляя найденные значения $C^{(+)}, C^{(-)}$ в (3.11), получаем

$$X_{ii}(z,z') = \frac{b_{ii}}{a_{ii}\,\mathrm{sh}(a_{ii}L)} \begin{cases} \mathrm{sh}[a_{ii}(z-L/2)]\,\mathrm{sh}[a_{ii}(z'+L/2)]\,, & z > z', \\ \mathrm{sh}[a_{ii}(z+L/2)]\,\mathrm{sh}[a_{ii}(z'-L/2)]\,, & z < z'. \end{cases} \tag{3.13}$$

Формулу (3.13) можно записать в более компактной форме:

$$X_{ii}(z,z') = \frac{b_{ii}}{2a_{ii}\,\mathrm{sh}(a_{ii}L)}\Big\{\mathrm{ch}[a_{ii}(z+z')] - \mathrm{ch}(a_{ii}L)\,\mathrm{ch}[a_{ii}(z-z')] + \\ + \mathrm{sh}(a_{ii}L)\,\mathrm{sh}(a_{ii}\mid z-z'\mid)\Big\}. \tag{3.14}$$

Теперь, подставляя в (3.14) вместо коэффициентов a_{ii} и b_{ii} соответствующие выражения из (3.4), получаем

$$X_{11}(z,z') = \frac{k_BT}{2K_3P_{(h)}\,\mathrm{sh}(P_{(h)}L)}\Big\{-\mathrm{ch}[P_{(h)}(z+z')] + \mathrm{ch}(P_{(h)}L)\,\mathrm{ch}[P_{(h)}(z-z')] - \\ - \mathrm{sh}(P_{(h)}L)\,\mathrm{sh}(P_{(h)}\mid z-z'\mid)\Big\} \equiv -\frac{1}{K_3}J(P_{(h)}), \tag{3.15}$$

$$X_{22}(z,z') = \frac{k_BT}{2K_3Q_{(h)}\,\mathrm{sh}(Q_{(h)}L)}\Big\{-\mathrm{ch}[Q_{(h)}(z+z')] + \mathrm{ch}(Q_{(h)}L)\,\mathrm{ch}[Q_{(h)}(z-z')] - \\ - \mathrm{sh}(Q_{(h)}L)\,\mathrm{sh}(Q_{(h)}\mid z-z'\mid)\Big\} \equiv -\frac{1}{K_3}J(Q_{(h)}). \tag{3.16}$$

Из (3.5) следует, что корреляционная матрица $\hat{G}^h = \hat{U}\hat{X}\hat{U}^{-1}$. Подставив в это уравнение выражения (3.9), (3.15), (3.16), для элементов матрицы $\hat{G}^h$ получаем

$$\begin{gathered}
G^h_{11} = \langle n_x(\mathbf{q},z)n^*_x(\mathbf{q},z')\rangle = \frac{1}{2K_3}\left\{\frac{1}{g}\left[\frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 + (K_1-K_2)(q_y^2-q_x^2)\right]\times\right. \\
\left.\times\left[J(P_{(h)}) - J(Q_{(h)})\right] - \left[J(P_{(h)}) + J(Q_{(h)})\right]\right\}, \\
G^h_{22} = \langle n_y(\mathbf{q},z)n^*_y(\mathbf{q},z')\rangle = -\frac{1}{2K_3}\left\{\frac{1}{g}\left[\frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 + (K_1-K_2)(q_y^2-q_x^2)\right]\times\right. \\
\left.\times\left[J(P_{(h)}) - J(Q_{(h)})\right] + \left[J(P_{(h)}) + J(Q_{(h)})\right]\right\}, \\
G^h_{12} = \langle n_x(\mathbf{q},z)n^*_y(\mathbf{q},z')\rangle = -\frac{1}{gK_3}\left[(K_1-K_2)q_xq_y + i(e_1-e_3)Eq_y\right]\times \\
\times\left[J(P_{(h)}) - J(Q_{(h)})\right], \\
G^h_{21} = \langle n_y(\mathbf{q},z)n^*_x(\mathbf{q},z')\rangle = -\frac{1}{gK_3}\left[(K_1-K_2)q_xq_y - i(e_1-e_3)Eq_y\right]\times \\
\times\left[J(P_{(h)}) - J(Q_{(h)})\right].
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Заметим, что при $E=0$ эти корреляционные функции совпадают с полученными в работах [18, 19, 21] в предельном случае жесткого сцепления с подложкой ($W\to\infty$).

4. ФЛУКТУАЦИИ ДИРЕКТОРА В ПЛАНАРНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЯЧЕЙКЕ

В случае планарной ориентации равновесное положение директора и его флуктуация имеют вид $\mathbf{n}_0 = (1,0,0)$, $\delta\mathbf{n} = (0,n_y,n_z)$, причем

$$n_y(x,y,z=\pm L/2) = n_z(x,y,z=\pm L/2) = 0. \tag{4.1}$$

Пусть однородное электрическое поле направлено вдоль оси z: $\mathbf{E} = (0, 0, E)$. В этой геометрии изменение свободной энергии (2.1) с точностью до членов второго порядка по $\delta\mathbf{n}$ принимает вид

$$\Delta F^{(p)} = \frac{1}{2}\int d^3r\Big\{K_1(\partial_y n_y + \partial_z n_z)^2 + K_2(\partial_y n_z - \partial_z n_y)^2 + K_3[(\partial_x n_y)^2 + (\partial_x n_z)^2] - \\ - \frac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2 n_z^2 - 2E[e_1 n_z(\partial_z n_z + \partial_y n_y) + e_3(\partial_x n_z + n_y\partial_y n_z + n_z\partial_z n_z)]\Big\}. \quad (4.2)$$

Интегрируя по частям и переходя к двумерному спектру Фурье, получаем

$$\Delta F_{\mathbf{q}}^{(p)} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2} dz(n_y^*, n_z^*)\hat{A}_{\mathbf{q}}^p\begin{pmatrix} n_y \\ n_z\end{pmatrix},$$

где $n_j \equiv n_j(\mathbf{q}, z)$, $j = y, z$,

$$\hat{A}_{\mathbf{q}}^p = \begin{pmatrix} K_3q_x^2 + K_1q_y^2 - K_2\partial_z^2 & -i(K_1 - K_2)q_y\partial_z + i(e_1 - e_3)Eq_y \\ -i(K_1 - K_2)q_y\partial_z - i(e_1 - e_3)Eq_y & K_3q_x^2 + K_2q_y^2 - K_1\partial_z^2 - \dfrac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2\end{pmatrix}.$$

Матрицу $\hat{A}_{\mathbf{q}}^p$ в отличие от $\hat{A}_{\mathbf{q}}^h$ нельзя диагонализовать преобразованием подобия, поскольку она не является самосопряженной. Поэтому уравнение (2.8) необходимо преобразовать таким образом, чтобы в левой части этого уравнения стоял оператор $\hat{B}_{\mathbf{q}}^p$, допускающий диагонализацию. Для этого представим (2.8) в виде

$$(\hat{A}_0 + i\hat{C}\partial_z + \hat{D}\partial_z^2)\hat{G}^p = k_BT\hat{I}\delta(z - z'), \quad (4.3)$$

где матрицы $\hat{A}_0$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ равны

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} K_3q_x^2 + K_1q_y^2 & i(e_1 - e_3)Eq_y \\ -i(e_1 - e_3)Eq_y & K_3q_x^2 + K_2q_y^2 - \dfrac{\varepsilon_a}{4\pi}E^2\end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -(K_1 - K_2)q_y \\ -(K_1 - K_2)q_y & 0\end{pmatrix},$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -K_2 & 0 \\ 0 & -K_1\end{pmatrix}.$$

Умножая обе части (4.3) на матрицу $\hat{D}^{-1}$ и выделяя полный квадрат, получаем

$$\left[\left(\hat{I}\partial_z + \frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}\right)^2 + \hat{H}\right]\hat{G}^p = k_BT\hat{D}^{-1}\delta(z - z'), \quad (4.4)$$

где

$$\hat{H} = (\hat{D}^{-1}\hat{C})^2/4 + \hat{D}^{-1}\hat{A}_0. \quad (4.5)$$

Переходя к новой переменной

$$\hat{G}_0^p = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{G}^p \tag{4.6}$$

и учитывая граничные условия (2.9), имеем

$$(\hat{H}' + \hat{I}\partial_z^2)\hat{G}_0^p(\mathbf{q}, z, z') = k_B T \exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{D}^{-1}\delta(z - z'), \tag{4.7}$$

$$\hat{G}_0^p(\mathbf{q}, z = \pm L/2, z') = 0, \tag{4.8}$$

где

$$\hat{H}' = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{H}\exp\left(-\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right). \tag{4.9}$$

Оператор $\hat{B}_\mathbf{q}^p \equiv \hat{H}' + \hat{I}\partial_z^2$ имеет вид (см. Приложение)

$$\hat{B}_\mathbf{q}^p =$$

$$= \begin{pmatrix} -a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha + f\sin(2\alpha) + \partial_z^2 & i\sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}}\Big(\dfrac{a-b}{2}\sin(2\alpha) - f\cos(2\alpha)\Big) \\ -i\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}\Big(\dfrac{a-b}{2}\sin(2\alpha) - f\cos(2\alpha)\Big) & -a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha - f\sin(2\alpha) + \partial_z^2 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{K_3}{K_1}q_x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{K_2}{K_1} - \frac{1}{4}\frac{K_1}{K_2}\right)q_y^2 - \frac{\varepsilon_a}{4\pi K_1}E^2, \\ b &= \frac{K_3}{K_2}q_x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{K_1}{K_2} - \frac{1}{4}\frac{K_2}{K_1}\right)q_y^2, \\ f &= \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{K_1K_2}}Eq_y, \\ \alpha &= -\frac{1}{2}\frac{K_1 - K_2}{\sqrt{K_1K_2}}q_y z. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Этот оператор можно диагонализовать преобразованием $\hat{V}^{-1}\hat{B}_\mathbf{q}^p\hat{V}$. Матрица $\hat{V}$, составленная из собственных векторов оператора $\hat{B}_\mathbf{q}^p$, равна

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} u & u \\ \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}(w - p) & \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}(w + p) \end{pmatrix},$$

где

$$u = i\left(\frac{b-a}{2}\sin(2\alpha) + f\cos(2\alpha)\right),$$
$$w = f\sin(2\alpha) + \frac{a+b}{2} - a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha, \tag{4.12}$$
$$p = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + f^2}.$$

Уравнение (4.7) можно переписать в эквивалентном виде

$$\hat{V}^{-1}\hat{B}^p_{\mathbf{q}}\hat{V}\hat{V}^{-1}\hat{G}^p_0\hat{V} = k_BT\left[\hat{V}^{-1}\exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{D}^{-1}\hat{V}\right]\delta(z-z'). \tag{4.13}$$

Если ввести обозначения

$$\hat{W} = \hat{V}^{-1}\hat{G}^p_0\hat{V},\;\; \hat{S} = \hat{V}^{-1}\exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{D}^{-1}\hat{V},$$
$$P_{(p)} = \sqrt{\frac{a+b}{2} + p},\quad Q_{(p)} = \sqrt{\frac{a+b}{2} - p}, \tag{4.14}$$

то для $\hat{W}$ из (4.13), (4.8) имеем

$$\begin{pmatrix} \partial_z^2 - Q_{(p)} & 0 \\ 0 & \partial_z^2 - P_{(p)} \end{pmatrix}\hat{W} = k_BT\hat{S}\delta(z-z'), \tag{4.15}$$

причем

$$\hat{W}(z = \pm L/2, z') = 0. \tag{4.16}$$

Матрицу $\hat{S}$ можно вычислить, перемножив четыре матрицы, используя выражение для $\exp[(i/2)\hat{D}^{-1}\hat{C}z)]$, полученное в Приложении

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{2pu}\left[\left(\frac{w-p}{K_1} - \frac{w+p}{K_2}\right)u\cos\alpha + i\left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)u^2\sin\alpha\right],\\
S_{22} &= \frac{1}{2pu}\left[\left(\frac{w-p}{K_2} - \frac{w+p}{K_1}\right)u\cos\alpha + i\left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}\right)u^2\sin\alpha\right],\\
S_{12} &= \frac{1}{2pu}\left[\left(\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}\right)(w+p)u\cos\alpha + i\left(\frac{(w+p)^2}{K_1} - \frac{u^2}{K_2}\right)\sin\alpha\right],\\
S_{21} &= \frac{1}{2pu}\left[\left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}\right)(w-p)u\cos\alpha + i\left(\frac{u^2}{K_2} - \frac{(w-p)^2}{K_1}\right)\sin\alpha\right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Формулы (4.15), (4.16)представляют собой четыре дифференциальных уравнения с граничными условиями для элементов матрицы $\hat{W}$. Эти уравнения аналогичны уравнениям (3.10). Их решения имеют вид

$$W_{ij}(z,z') = S_{ij}Y_{ii},\quad i,j = 1,2, \tag{4.18}$$

где

$$Y_{11} = \frac{k_B T}{2P_{(p)}\,\mathrm{sh}(P_{(p)}L)}\Big\{\mathrm{ch}[P_{(p)}(z+z')] - \mathrm{ch}(P_{(p)}L)\,\mathrm{ch}[P_{(p)}(z-z')] +$$
$$+ \mathrm{sh}(P_{(p)}L)\,\mathrm{sh}[P_{(p)} \mid z-z' \mid]\Big\} = J(P_{(p)}), \tag{4.19}$$
$$Y_{22} = \frac{k_B T}{2Q_{(p)}\,\mathrm{sh}(Q_{(p)}L)}\Big\{\mathrm{ch}[Q_{(p)}(z+z')] - \mathrm{ch}(Q_{(p)}L)\,\mathrm{ch}[Q_{(p)}(z-z')] +$$
$$+ \mathrm{sh}(Q_{(p)}L)\,\mathrm{sh}[Q_{(p)} \mid z-z' \mid]\Big\} = J(Q_{(p)}), \tag{4.20}$$

где функция J определяется формулой (3.15).

Из (4.6), (4.14) следует, что корреляционная матрица имеет вид

$$\hat{G}^p = \exp\left(-\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\hat{V}\hat{W}\hat{V}^{-1}.$$

Используя формулы (П.5), (4.17), (4.18), для элементов матрицы $\hat{G}^p$ получаем

$$\begin{aligned}
G^p_{11} &= \langle n_y(\mathbf{q},z)n_y^*(\mathbf{q},z')\rangle = -\frac{1}{2K_2}\Big\{\frac{1}{p}\Big[w\cos(2\alpha)+iu\sin(2\alpha)\Big]\times \\
&\quad\times\Big[J(P_{(p)})-J(Q_{(p)})\Big] + \Big[J(P_{(p)})+J(Q_{(p)})\Big]\Big\}, \\
G^p_{22} &= \langle n_z(\mathbf{q},z)n_z^*(\mathbf{q},z')\rangle = \frac{1}{2K_1}\Big\{\frac{1}{p}\Big[w\cos(2\alpha)+iu\sin(2\alpha)\Big]\times \\
&\quad\times\Big[J(P_{(p)})-J(Q_{(p)})\Big] - \Big[J(P_{(p)})+J(Q_{(p)})\Big]\Big\}, \\
G^p_{12} &= \langle n_y(\mathbf{q},z)n_z^*(\mathbf{q},z')\rangle = \frac{1}{2\sqrt{K_1K_2}}\Big\{\frac{1}{p}\Big[w\cos(2\alpha)+iu\sin(2\alpha)\Big]\times \\
&\quad\times\Big[J(P_{(p)})-J(Q_{(p)})\Big], \\
G^p_{21} &= \langle n_z(\mathbf{q},z)n_y^*(\mathbf{q},z')\rangle = -G^p_{12}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Как и в случае гомеотропной ориентации, при $E = 0$ полученные результаты совпадают с результатами работ [18, 19, 21] для жестких граничных условий.

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ВБЛИЗИ ПОРОГА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для обеих рассмотренных ориентаций корреляционные функции флуктуаций директора во внешнем электрическом поле (3.17), (4.21), с учетом обозначений (3.15), (3.16), (4.19), (4.20) имеют полюсы первого порядка. В одноконстантном приближении, $K_i = K$, $i = 1, 2, 3$, эти полюсы появляются при

$$Q_{(h)} = Q_{(p)} = \pm i\frac{\pi}{L}m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что при $Q_{(h)} = Q_{(p)} = 0$ выражения для корреляционных функций остаются конечными, поскольку

$$\lim_{Q\to 0}\left\{\frac{1}{Q\,\mathrm{sh}(QL)}\Big(\mathrm{ch}[Q(z+z')]-\mathrm{ch}(QL)\,\mathrm{ch}[Q(z-z')]+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{sh}(QL)\,\mathrm{sh}[Q\mid z-z'\mid]\Big)\right\}=-\frac{L}{2}+\frac{2zz'}{L}+\mid z-z'\mid. \tag{5.1}$$

Если рассматривать $Q_{(h),(p)}$ как функции поля, т. е. $\mathbf{q}$ считать фиксированным, то можно заметить, что количество полюсов возрастает с увеличением E. Найдем значения $E_0^{(h)}, E_0^{(p)}$, которые соответствуют первому полюсу. В случае гомеотропной ориентации величина поля $E_0^{(h)}$ определяется из соотношения

$$Q_{(h)}=\sqrt{q^2-\frac{\varepsilon_a}{8\pi K}(E_0^{(h)})^2-\frac{1}{2K}\sqrt{\left[\frac{\varepsilon_a}{4\pi}(E_0^{(h)})^2\right]^2+4(e_1-e_3)^2(E_0^{(h)})^2q_y^2}}=\pm i\frac{\pi}{L}. \tag{5.2}$$

Решая (5.2) относительно $E_0^{(h)}$, находим

$$E_0^{(h)}=\frac{K(q^2+\pi^2/L^2)}{\sqrt{(e_1-e_3)^2q_y^2+(\varepsilon_a/4\pi)K(q^2+\pi^2/L^2)}}. \tag{5.3}$$

Аналогично, пользуясь формулами (4.11), (4.12), (4.14), для планарной ориентации получаем уравнение, полностью совпадающее с (5.2). Таким образом, первый полюс у корреляционных функций для обеих ориентаций директора появляется при

$$E=E_0^{(h)}=E_0^{(p)}\equiv E_0(q_x,q_y).$$

Из формулы (5.3) видно, что $E_0(q_x,q_y)$ монотонно возрастает с ростом q_x. Поэтому наименьшему значению поля, при котором корреляционные функции имеют полюс, соответствует значение $q_x=0$. Причиной возникновения полюса является либо переход Фредерикса, либо пороговая флексоэлектрическая неустойчивость в ячейках конечной толщины [3, 14]. Последняя заключается в появлении специфической доменной структуры при значениях поля, бóльших критического E_c. Тип перехода зависит от параметров НЖК и геометрии системы.

В случае планарной ориентации флексоэлектрический эффект подробно рассмотрен в [3]. Используя такой же метод, нетрудно вычислить критическое значение поля и для случая гомеотропной ориентации, которое в одноконстантном приближении совпадает с полученным в [3] для планарной ориентации:

$$E(q_y)=\frac{K[q_y^2+(\pi/L)^2]}{\sqrt{(e_1-e_3)^2q_y^2+(\varepsilon_a/4\pi)K[q_y^2+(\pi/L)^2]}}=E_0(q_x=0,q_y). \tag{5.4}$$

Минимум функции $E(q_y)$ определяет пороговые значения E_c и q_c:

$$q_c=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{(e_1-e_3)^2-(\varepsilon_a/4\pi)K}{(e_1-e_3)^2+(\varepsilon_a/4\pi)K}},$$

$$E_c=\frac{\pi}{L}\;\frac{2K(e_1-e_3)}{(e_1-e_3)^2+(\varepsilon_a/4\pi)K}. \tag{5.5}$$

Из формул (5.5) видно, что флексоэлектрическая неустойчивость может возникнуть лишь при условии

$$\varepsilon_a < 4\pi(e_1 - e_3)^2/K. \tag{5.6}$$

В противном случае $E(q_y)$ будет иметь минимум при $q_y = 0$,

$$E_c = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{4\pi K}{\varepsilon_a}},$$

что соответствует переходу Фредерикса.

Таким образом, полученные формулы описывают корреляционные функции флуктуаций директора при значениях поля меньших критического. При $E \geq E_c$ проведенный анализ неприменим, поскольку исходную ориентацию нельзя считать однородной. При $E \to E_c$ аномально возрастают корреляционные функции мод с волновыми векторами, близкими к $\mathbf{q} = (0, q_c)$. Подробный анализ поведения критической моды выполнен в [14].

6. РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ФЛУКТУАЦИЯХ ДИРЕКТОРА В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Нематический жидкий кристалл является оптически анизотропной средой, причем тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ связан с полем директора соотношением

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_\perp\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_\alpha(\mathbf{r})n_\beta(\mathbf{r}).$$

Флуктуации директора $\delta\mathbf{n}(\mathbf{r})$ приводят к изменению тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$:

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_a\left[n_\alpha\delta n_\beta(\mathbf{r}) + n_\beta\delta n_\alpha(\mathbf{r})\right]. \tag{6.1}$$

Это изменение, в свою очередь, вызывает рассеяние света в среде.

Интенсивность рассеянного света I пропорциональна $\langle E'_\alpha(\mathbf{r})E'^*_\beta(\mathbf{r})\rangle$, где $\mathbf{E}'$ — поле рассеянной волны [23]. Если в среде распространяется плоская волна с амплитудой $\mathbf{E}^0$ и волновым вектором $\mathbf{k}_i$ то величина $\langle E'_\alpha(\mathbf{r})E'^*_\beta(\mathbf{r})\rangle$ однократно рассеянных волн $\mathbf{E}'$ определяется интегралом по рассеивающему объему [23, 24]:

$$\begin{aligned}\langle E'_\alpha(\mathbf{r})E'^*_\beta(\mathbf{r})\rangle = \frac{\omega^4}{c^4}\int d^3r'd^3r''T_{\alpha\gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}')T^*_{\beta\lambda}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\langle\delta\varepsilon_{\gamma\mu}(\mathbf{r}')\delta\varepsilon_{\lambda\nu}(\mathbf{r}'')\rangle \times \\ \times E^0_\mu E^0_\nu \exp\{ik_i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\},\end{aligned} \tag{6.2}$$

где ω — круговая частота, c — скорость света, $T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ — функция Грина уравнений Максвелла.

Для простоты при описании рассеяния света мы ограничимся приближением изотропной среды, т. е. будем считать, что на больших расстояниях

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}e^{i\mathbf{kr}}(\delta_{\alpha\beta} - s_\alpha s_\beta), \tag{6.3}$$

где $k = (w/c)\sqrt{\varepsilon}$, ε — средняя диэлектрическая проницаемость, $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$ — направление на точку наблюдения.

Подставляя (6.3) в (6.2), получаем

$$\langle E'_\alpha(\mathbf{r}) E'^*_\beta(\mathbf{r})\rangle = \frac{\omega^4 V}{c^4(4\pi)^2 r^2}(\delta_{\alpha\gamma} - s_\alpha s_\gamma)(\delta_{\beta\lambda} - s_\beta s_\lambda)\frac{1}{L} \times$$
$$\times \int\limits_{-L/2}^{L/2} dz' \int\limits_{-L/2}^{L/2} dz'' \exp\left[-iq_{sc,z}(z-z')\right] \langle \delta\varepsilon_{\gamma\mu}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta\varepsilon^*_{\lambda\nu}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle E^0_\mu E^0_\nu, \tag{6.4}$$

где V — рассеивающий объем, $\mathbf{q}_{sc} = \mathbf{s}k - \mathbf{k}_i$ — вектор рассеяния, $\mathbf{q}_{sc}^\perp = (q_{sc,x}, q_{sc,y}, 0)$ — поперечная составляющая $\mathbf{q}_{sc}$.

Согласно формуле (6.1), корреляционная функция флуктуаций тензора диэлектрической проницаемости связана с флуктуациями директора соотношением

$$\langle \delta\varepsilon_{\gamma\mu}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta\varepsilon^*_{\lambda\nu}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle =$$
$$= \varepsilon_a\Big[n^0_\gamma n^0_\lambda\langle\delta n_\mu(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta n_\lambda(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle + n^0_\mu n^0_\nu\langle\delta n_\gamma(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta n_\lambda(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle +$$
$$+ n^0_\gamma n^0_\nu\langle\delta n_\mu(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta n_\lambda(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle + n^0_\mu n^0_\lambda\langle\delta n_\gamma(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z')\delta n_\nu(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z'')\rangle\Big]. \tag{6.5}$$

Будем рассматривать случай нормального падения, т. е. $\mathbf{k}_i = (0, 0, k)$. Если рассеяние происходит в направлении $\mathbf{s} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, то вектор рассеяния имеет вид

$$\mathbf{q}_{sc} = k(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta - 1),$$

$$q_{sc} = 2k\sin(\theta/2). \tag{6.6}$$

Формулы (6.4), (6.5) совместно с выражениями (3.17), (4.21) позволяют определить интенсивность рассеяния света для обеих рассмотренных ориентаций директора.

Пусть свет, распространяющийся в среде, линейно поляризован вдоль оси y, то есть в выражениях (6.4), (6.5) следует положить $\mu = \nu = y$. Тогда в одноконстантном приближении, $K_i = K$, $i = 1, 2, 3$, для интенсивностей рассеянного света в случаях гомеотропной и планарной ориентаций соответственно, получаем

$$I^{(h)}(\theta, E) = I_0\frac{\omega^4}{c^4}\frac{V\varepsilon_a^2}{(4\pi)^2 r^2}\frac{1}{L}\sin^2\theta \times$$
$$\times \int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz'dz'' \exp\left[-iq_{sc,z}(z'-z'')\right] G^h_{22}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z', z''), \tag{6.7}$$

$$I^{(p)}(\theta, E) = I_0\frac{\omega^4}{c^4}\frac{V\varepsilon_a^2}{(4\pi)^2 r^2}\frac{1}{L}(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi) \times$$
$$\times \int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2} dz'dz'' \exp\left[-iq_{sc,z}(z'-z'')\right] G^p_{11}(\mathbf{q}_{sc}^\perp, z', z''). \tag{6.8}$$

Здесь

$$G_{22}^{h}(\mathbf{q}_{sc}^{\perp},z',z'')=G_{11}^{p}(\mathbf{q}_{sc}^{\perp},z',z'')=\frac{1}{4K}\Big\{-\frac{\varepsilon_a E^2}{4\pi g}\Big[J(P)-J(Q)\Big]+$$
$$+\Big[J(P)+J(Q)\Big]\Big\},$$

$$g=E\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a E}{4\pi}\right)^2+4(e_1-e_3)^2q_{sc,y}^2},\qquad P=\sqrt{q_{sc}^{\perp 2}+\frac{g}{2K}-\frac{\varepsilon_a E^2}{8\pi K}},$$

$$Q=\sqrt{q_{sc}^{\perp 2}-\frac{g}{2K}-\frac{\varepsilon_a E^2}{8\pi K}}. \tag{6.9}$$

Будем рассматривать флуктуационные моды с $q_x=0$ ($\varphi=\pi/2$), поскольку в нашей геометрии они наиболее сильно возрастают вблизи порога неустойчивости. Для получения выражений для интенсивностей рассеянного света необходимо вычислить интегралы, входящие в (6.7), (6.8). Они имеют следующий вид

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}dz'dz''\exp\left[-iq_{sc,z}(z'-z'')\right]\mathrm{ch}\left[\gamma(z'+z'')\right]=\frac{2}{\gamma^2+q_{sc,z}^2}[\mathrm{ch}(\gamma L)-\cos(q_{sc,z}L)],$$

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}dz'dz''\exp\left[-iq_{sc,z}(z'-z'')\right]\mathrm{ch}\left[\gamma(z'-z'')\right]=$$
$$=\frac{2}{(\gamma^2+q_{sc,z}^2)^2}\Big\{(\gamma^2-q_{sc,z}^2)\left[\mathrm{ch}(\gamma L)\cos(q_{sc,z}L)-1\right]+2\gamma q_{sc,z}\mathrm{sh}(\gamma L)\sin(q_{sc,z}L)\Big\},$$

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}dz'dz''\exp\left[-iq_{sc,z}(z'-z'')\right]\mathrm{sh}(\gamma\mid z'-z''\mid)=\frac{2}{\gamma^2+q_{sc,z}^2}\times$$
$$\times\left\{-\gamma L+\frac{1}{\gamma^2+q_{sc,z}^2}\left[(\gamma^2-q_{sc,z}^2)\,\mathrm{sh}(\gamma L)\cos(q_{sc,z}L)+2\gamma q_{sc,z}\,\mathrm{ch}(\gamma L)\sin(q_{sc,z}L)\right]\right\}, \tag{6.10}$$

где γ — константа. Тогда с учетом (3.6), (3.7), (3.15), (3.16), (6.7)–(6.10) имеем

$$I^{(h)}=\frac{1}{2}I_0C\frac{\sin^2\theta}{L}F(P,Q),\qquad I^{(p)}=\frac{1}{4}I_0C\frac{1}{L}F(P,Q). \tag{6.11}$$

где

$$F(P,Q)=-\left(1+\frac{\varepsilon_a E^2}{4\pi g}\right)\left\{\frac{2P\left[\mathrm{ch}(PL)-\cos(q_{sc,z}L)\right]}{(P^2+q_{sc,z}^2)^2\,\mathrm{sh}(PL)}-\frac{L}{P^2+q_{sc,z}^2}\right\}+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{4\pi g}-1\right)\left\{\frac{2Q\left[\mathrm{ch}(QL)-\cos(q_{sc,z}L)\right]}{(Q^2+q_{sc,z}^2)^2\,\mathrm{sh}(QL)}-\frac{L}{Q^2+q_{sc,z}^2}\right\}, \tag{6.12}$$

$$C=\frac{\omega^4}{c^4}\frac{V\varepsilon_a^2k_BT}{(4\pi)^2r^2K},\quad q_{sc,z}=k(\cos\theta-1),\quad q_{sc}^{\perp}=q_{sc,y}=k\sin\theta.$$

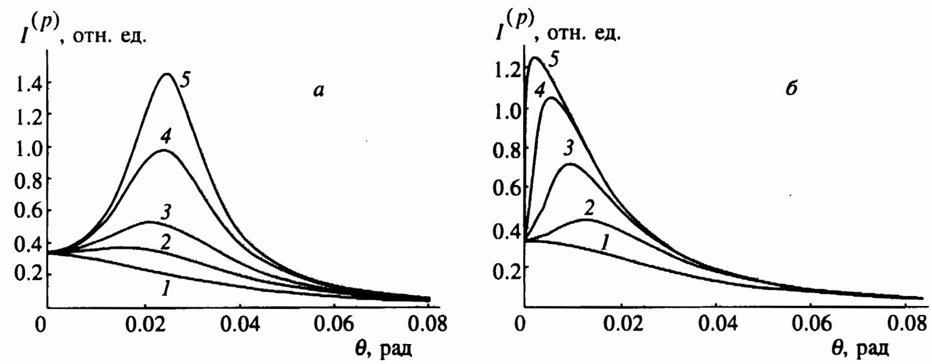

Рис. 2. Угловая зависимость интенсивности рассеянного света в планарно ориентированной ячейке НЖК при различных значениях анизотропии диэлектрической проницаемости и напряжения электрического поля: *а* — $\varepsilon_a = 0.1$; *1* — $U = 0$, *2* — $U = 4.5$ В, *3* — $U = 5.4$ В, *4* — $U = 6.03$ В, *5* — $U = 6.12$ В. *б* — $\varepsilon_a = 0.7$; *1* — $U = 0$, *2* — $U = 3.15$ В, *3* — $U = 3.312$ В, *4* — $U = 3.339$ В, *5* — $U = 3.3408$ В

Поскольку выражения для $I^{(h)}$ и $I^{(p)}$ различаются угловым множителем, рассмотрим угловую зависимость интенсивности рассеянного света для планарной ориентации. Она приведена на рис. 2 для различных величин внешнего электрического поля и типичных значений параметров НЖК [1–3]: $e_1 - e_3 = 0.57 \cdot 10^{-11}$ Кл/м, $K = 0.7 \cdot 10^{-6}$ дин. Тип перехода зависит от величины анизотропии диэлектрической проницаемости. Граничное значение определяется из соотношения (5.6): $\varepsilon_a = 4\pi(e_1 - e_3)^2/K = 0.52$. Толщина образца положена равной $L = 10^{-3}$ см, волновое число $k = 10^5$ см$^{-1}$.

Рисунок 2*а* соответствует значению $\varepsilon_a = 0.1$ (флексоэлектрическая неустойчивость). В этом случае критические значения параметров $U_c = E_c L = 6.5$ В, $q_{sc}^{\perp} = q_c = 2.6 \cdot 10^3$ см$^{-1}$.

На рис. 2*б* приведена зависимость $I^{(p)}(\theta)$ при $\varepsilon_a = 0.7$. В этом случае $q_c = 0$, и при $U_c = 3.341$ В имеет место переход Фредерикса.

Из рисунков видно, что интенсивность рассеянного света имеет пик в окрестности $q_{sc}^{\perp} = q_c$, величина которого возрастает при $E \to E_c$. Существование такого резко выраженного пика интенсивности дает хорошую возможность для экспериментальной проверки полученных результатов и измерения разности флексоэлектрических коэффициентов $e_1 - e_3$.

Заметим, что вблизи точки перехода формулы (6.9), (6.11), (6.12) можно существенно упростить, если ограничиться линейным по $E - E_c$ приближением. Тогда при $q_{sc}^{\perp} = q_c$

$$g_c \approx \left\{ \frac{2\pi(e_1 - e_3)^3}{\left[(e_1 - e_3)^2 + \varepsilon_a K/4\pi\right] L} + \frac{(\varepsilon_a/4\pi)^2 K}{(e_1 - e_3)^2}(E - E_c) \right\} E, \tag{6.13}$$

$$Q_c \approx i\left[\frac{\pi}{L} + \frac{\varepsilon_a K/4\pi + (e_1 - e_3)^2}{2K(e_1 - e_3)}(E - E_c)\right], \tag{6.14}$$

$$F_c(P, Q) \approx \left[\frac{\varepsilon_a K}{4\pi(e_1 - e_3)^2} - 1\right] \left\{ \frac{2Q_c[\mathrm{ch}(Q_c L) - \cos(q_{sc,z} L)]}{(Q_c^2 + q_{sc,z}^2)^2\, \mathrm{sh}(Q_c L)} - \frac{L}{Q_c^2 + q_{sc,z}^2} \right\}. \tag{6.15}$$

Подставляя (6.14) в (6.15), получаем

$$F_c(P,Q) \approx \frac{4\pi K[1+\cos(q_{sc,z}L)]}{(q_{sc,z}^2 - \pi^2/L^2)^2 L^2(e_1 - e_3)} \left[\frac{\varepsilon_a K - 4\pi(e_1-e_3)^2}{\varepsilon_a K + 4\pi(e_1-e_3)^2}\right](E-E_c)^{-1}. \tag{6.16}$$

Обратим внимание, что при $q_{sc,z} = \pi/L$ выражение для $F_c(P,Q)$ остается конечным. В этом случае в формуле (6.15) нельзя пренебрегать членом $L/(Q_c^2 + q_{sc,z}^2)$, и в силу соотношения

$$\lim_{q_{sc,z}\to -iQ_c}\left\{\frac{2Q_c[\mathrm{ch}(Q_cL) - \cos(q_{sc,z}L)]}{(Q_c^2+q_{sc,z}^2)^2\,\mathrm{sh}(Q_cL)} - \frac{L}{Q_c^2+q_{sc,z}^2}\right\} = \frac{L[QL\,\mathrm{ch}(QL)+\mathrm{sh}(QL)]}{4Q^2\,\mathrm{sh}(QL)}$$

функция $F_c(P,Q)$ имеет вид

$$F_c(P,Q) \approx -\frac{KL^2}{2\pi(e_1-e_3)}\left[\frac{\varepsilon_a K - 4\pi(e_1-e_3)^2}{\varepsilon_a K + 4\pi(e_1-e_3)^2}\right](E-E_c)^{-1}. \tag{6.17}$$

На рис. 3 приведен график зависимости от поля нормированной обратной интенсивности рассеянного света $I_m^{(p)}(0)/I_m^{(p)}(E)$ в точке максимума $q_{sc,z} = q_c$:

$$\frac{I^{(p)}(0)}{I_m^{(p)}(E)} = \frac{F_c(0)}{F_c(P,Q)}, \tag{6.18}$$

где $I_m^{(p)}(0)$ — интенсивность рассеянного света в отсутствие поля,

$$F_c(0) \equiv F(P,Q)\Big|_{q_{sc,z}=q_c,\,E=0} = \frac{2}{q_{sc}^2}\left\{L - \frac{2q_{sc}^\perp[\mathrm{ch}(q_{sc}^\perp L) - \cos(q_{sc,z}L)]}{q_{sc}^2\,\mathrm{sh}(q_{sc}^\perp L)}\right\}.$$

Видно, что в достаточно широкой окрестности E_c обратные интенсивности, рассчитанные по точной формуле (6.12) и в линейном приближении (6.16) совпадают. Наклон ξ кривой $I_m^{(p)}(0)/I_m^{(p)}(E)$ при $E \approx E_c$ равен

$$\xi\Big|_{E=E_c} = \beta(e_1-e_3)\left[\frac{\varepsilon_a K - 4\pi(e_1-e_3)^2}{\varepsilon_a K + 4\pi(e_1-e_3)^2}\right],$$

где

$$\beta = \frac{(q_{sc,z}^2 - \pi^2/L^2)^2 L^2 F_c(0)}{4\pi K[1+\cos(q_{sc,z}L)]}.$$

Его измерение позволяет вычислить разность флексоэлектрических коэффициентов $e_1 - e_3$.

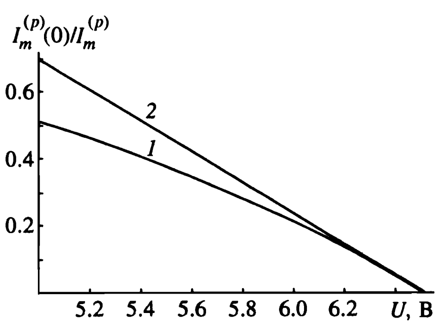

Рис. 3. Зависимость нормированной обратной интенсивности рассеянного света в точке максимума $q_{sc}^\perp = q_c = 2.6 \cdot 10^3$ см$^{-1}$ от величины внешнего электрического поля при планарной ориентации директора, $I^{(p)}(0)$ — интенсивность рассеяния при $q_{sc}^\perp = q_c$ и $E = 0$; *1* — расчет по точным формулам (6.12), (6.18), *2* — по формуле линейного приближения (6.16). При вычислениях использованы те же значения параметров, что и на рис. 2*a*, которым соответствуют величины $\beta = 553.7$ см/дин, $F_c(0) = 10^{-10}$ см^3

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы рассмотрели корреляционные функции флуктуаций директора НЖК во внешнем электрическом поле с учетом флексоэлектрического эффекта при жестких граничных условиях, т. е. при фиксированной ориентации директора на поверхности. В этом случае образование пространственно-периодических флексоэлектрических структур имеет пороговый характер, причем флуктуационная мода, соответствующая периоду структуры, неограниченно растет при стремлении величины внешнего поля к критическому значению. В оптическом эксперименте такая картина соответствует появлению пика в угловой зависимости интенсивности рассеянного света.

В реальных жидких кристаллах энергия сцепления с подложкой W имеет конечное значение. Последовательный анализ корреляционных функций в этом случае требует отдельного рассмотрения. Однако некоторые качественные заключения о поведении флуктуаций директора можно получить, если сопоставить результаты для двух предельных случаев — фиксированной ориентации на поверхности, рассмотренной в данной работе, и неограниченного образца, когда влияние поверхностных эффектов несущественно. Корреляционная матрица флуктуаций директора во внешнем электрическом поле для безграничной среды легко вычисляется методом, использованным в разд. 3 и 4. Если для определенности считать нематик ориентированным вдоль оси x, $\mathbf{n}_0 = (1,0,0)$, а внешнее поле направить вдоль оси z, $\mathbf{E} = (0,0,E)$, то фурье-образ корреляционной матрицы $\hat{G}^\infty$ флуктуаций $\delta\mathbf{n} = (0, n_y, n_z)$ имеет вид

$$\hat{G}^\infty_{\mathbf{q}} = \frac{k_B T}{K^2q^4 - \left[(\varepsilon_a/4\pi)Kq^2 + (e_1-e_3)^2 q_y^2\right]E^2} \begin{pmatrix} Kq^2 - (\varepsilon_a/4\pi)E^2 & -i(e_1-e_3)Eq_y \\ i(e_1-e_3)Eq_y & Kq^2 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где $\mathbf{q} = q(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

Видно, что в этом случае для любого значения электрического поля существуют волновые векторы, определяемые соотношением

$$q = E\left\{\frac{\varepsilon_a}{4\pi K} + \left[\frac{(e_1-e_3)\sin\varphi\sin\theta}{K}\right]^2\right\}^{1/2},$$

для которых корреляционные функции имеют полюс. Это соответствует известному результату Мейера [3, 10] о возникновении периодического распределения директора с волновым числом

$$q \sim \frac{e_1-e_3}{K}E.$$

Эффект образования пространственной структуры становится пороговым, когда поверхностный вклад в свободную энергию начинает превышать объемный: $W > K/L$ [25, 26]. При $W \ll K/L$, как и в безграничной среде, эффект является непороговым, что соответствует пределу $E_c \to 0$, $q_c \to 0$. Отсюда можно заключить, что с ростом энергии сцепления величины q_c и E_c будут расти, стремясь к предельным значениям (5.5) при $W \to \infty$.

В оптическом эксперименте переход от $W = \infty$ к конечному значению энергии сцепления должен приводить к сдвигу пика интенсивности рассеянного света в сторону меньших углов и уменьшению величины критического поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим выражение (4.10) для матрицы

$$\hat{B}^p_{\mathbf{q}} = \hat{H}' + \hat{I}\partial_z^2. \tag{П.1}$$

Подставляя (4.5) в (4.9), имеем

$$\hat{H}' = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right)\left[\frac{1}{4}(\hat{D}^{-1}\hat{C})^2 + \hat{D}^{-1}\hat{A}_0\right]\exp\left(-\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right). \tag{П.2}$$

Подставляя явные выражения для матриц $\hat{A}_0, \hat{D}, \hat{C}$, члены, входящие в (П.2), получаем в виде

$$\hat{D}^{-1}\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{K_1-K_2}{K_2}q_y \\ \dfrac{K_1-K_2}{K_1}q_y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}^{-1}\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{K_3}{K_2}q_x^2 - \dfrac{K_1}{K_2}q_y^2 & -i\dfrac{e_1-e_3}{K_2}Eq_y \\ i\dfrac{e_1-e_3}{K_1}Eq_y & -\dfrac{K_3}{K_1}q_x^2 - \dfrac{K_2}{K_1}q_y^2 + \dfrac{\varepsilon_a}{4\pi K_1}E^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{4}(\hat{D}^{-1}\hat{C})^2 + \hat{D}^{-1}\hat{A}_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{K_3}{K_2}q_x^2 - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\dfrac{K_1}{K_2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{K_2}{K_1}\right)q_y^2 & -i\dfrac{e_1-e_3}{K_2}Eq_y \\ i\dfrac{e_1-e_3}{K_1}Eq_y & -\dfrac{K_3}{K_1}q_x^2 - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\dfrac{K_2}{K_1}-\dfrac{1}{4}\dfrac{K_1}{K_2}\right)q_y^2 + \dfrac{\varepsilon_a}{4\pi K_1}E^2 \end{pmatrix}. \tag{П.3}$$

Матрица поворота $\exp(\pm(i/2)\hat{D}^{-1}\hat{C}z)$ имеет вид

$$\exp\left(\pm\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right) = \exp[\hat{M}\cdot(\pm z)] = \hat{T}\begin{pmatrix} \exp(\pm\lambda_1 z) & 0 \\ 0 & \exp(\pm\lambda_2 z) \end{pmatrix}\hat{T}^{-1}, \tag{П.4}$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau\sqrt{K_1/K_2} \\ -\tau\sqrt{K_2/K_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \frac{1}{2i}\frac{K_1-K_2}{\sqrt{K_1K_2}}q_y,$$

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{K_2/K_1} & \sqrt{K_2/K_1} \end{pmatrix}$$

— матрица из собственных векторов, $\lambda_{1,2} = \pm\tau$ — собственные значения матрицы $\hat{M}$.

Подставляя эти выражения в формулу (П.4), получаем

$$\exp\left(\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right) = \hat{T}\begin{pmatrix} e^{\tau z} & 0 \\ 0 & e^{-\tau z}\end{pmatrix}\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -i\sqrt{K_1/K_2}\sin\alpha \\ -i\sqrt{K_2/K_1}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\hat{D}^{-1}\hat{C}z\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sqrt{K_1/K_2}\sin\alpha \\ i\sqrt{K_2/K_1}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad (\text{П.5})$$

где

$$\alpha = -i\tau z = -\frac{1}{2i}\frac{K_1 - K_2}{\sqrt{K_1K_2}}q_y z.$$

Подставляя (П.3), (П.5) в (П.2) и перемножая матрицы, получаем оператор $\hat{B}^p_{\mathbf{q}}$ в виде (4.10).

Литература

1. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов,* Мир, Москва (1977).
2. С. Чандрасекар, *Жидкие кристаллы,* Мир, Москва (1980).
3. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах,* Наука, Москва (1981).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика. Ч. 1,* Наука, Москва (1976).
5. Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий, А. В. Сухов и др., Письма в ЖЭТФ **31**, 287 (1980).
6. А. С. Золотько, В. Ф. Китаева, Н. Кроо и др., Письма в ЖЭТФ **32**, 170 (1980).
7. I. C. Khoo, Phys. Rev. A **25**, 1040 (1982).
8. S. J. Elson, I. Solymar, and D. J. Webb, Phys. Rev. E **48**, 1172 (1993).
9. В. П. Романов, Д. О. Федоров, Опт. и спектр. **79**, 313 (1995).
10. P. Galatola and M. Rajteri, Phys. Rev. E. **49**, 623 (1994).
11. K. Eidner, M. Lewis, H. K. M. Vithana et al., Phys. Rev. A **40**, 6388 (1989).
12. M. San Miguel and F. Sagues, Phys. Rev. A **36**, 1883 (1987).
13. F. Sagues, M. San Miguel, Phys. Rev. A **39**, 6567 (1989).
14. P. Galatola, C. Oldano, and M. Rajteri, Phys. Rev. E **49**, 1458 (1994).
15. C. Oldano, Phys. Rev. Lett. **56**, 1098 (1986).
16. E. Miraldi, C. Oldano, and A. Strigazzi, Phys. Rev. A **34**, 4348 (1986).
17. R. B. Meyer, Phys. Rev. Lett. **22**, 918 (1969).
18. Б. Я. Зельдович, Н. В. Табирян, ЖЭТФ **81**, 1738 (1981).
19. Т. Я. Марусий, Ю. А. Резников, В. Ю. Решетняк и др., ЖЭТФ **91**, 851 (1986).
20. F. Lonberg and R. B. Meyer, Phys. Rev. Lett. **55**, 718 (1985).
21. В. П. Романов, А. Н. Шалагинов, ЖЭТФ **102**, 884 (1992).
22. А. Ю. Вальков, В. П. Романов, А. Н. Шалагинов, УФН **164**, 149 (1994).
23. Л. Д. Ландау, Е. М, Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред,* Наука, Москва (1995).
24. V. L. Kuz'min, V. P. Romanov, and L. A. Zubkov, Phys. Rep. **248**, 71 (1994).
25. S. A. Pikin, V. G. Chigrinov, and V. L. Indenbom, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **37**, 313 (1976).
26. Y. P. Bobylev, V. G. Chigrinov, and S. A. Pikin, J. de Phys. Coll. **40**, C3-331 (1979).