

## АНОМАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

А. Я. Мальцев\*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 марта 1997 г.

В работе рассматривается поведение тензора электропроводности в сильных магнитных полях при наличии незамкнутых квазиклассических электронных траекторий сложного вида вблизи поверхности Ферми. Показано, что асимптотическое поведение тензора проводимости при  $B \rightarrow \infty$  в этом случае отличается от описанных ранее для траекторий более простой формы. Теоретически рассматривается также возможность блокирования продольной проводимости в сильных магнитных полях при низких температурах в случае ферми-поверхностей специального вида.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением [1, 2] и посвящена гальваномагнитным явлениям в металлах со сложными поверхностями Ферми. Изучение гальваномагнитных явлений в металлах со сложной ферми-поверхностью было начато в работах [3–5], в которых изучалось влияние незамкнутых квазиклассических электронных траекторий, лежащих на ферми-поверхности, на тензор электропроводности в сильных магнитных полях. В частности, в работах [4, 5] был вычислен не исчезающий при  $B \rightarrow \infty$  вклад в тензор проводимости незамкнутой электронной траектории, лежащей в полосе конечной ширины в плоскости  $\Pi(\mathbf{B})$ , перпендикулярной магнитному полю и проходящей ее насквозь. Было показано, что вклад таких траекторий в  $\sigma_{\alpha\beta}$  в пределе  $B \rightarrow \infty$  есть вырожденный тензор с ядром, совпадающим со средним направлением траектории. Это обстоятельство использовалось в дальнейшем для экспериментального исследования сложных ферми-поверхностей металлов (см. [6–9]). Подробнее изложение теоретических и экспериментальных результатов, полученных ранее в этой области, имеется в [10–13]. В работах [14–17] была затем поставлена топологическая проблема классификации незамкнутых электронных траекторий в сильном однородном магнитном поле для произвольной поверхности Ферми, исследованию которой посвящены работы [18–24]. Полученные в этих работах топологические теоремы дают полную картину различных ситуаций, возникающих при произвольном направлении  $\mathbf{B}$  на произвольной поверхности уровня функции  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ , где  $\epsilon(\mathbf{p})$  — закон дисперсии. Опишем здесь эту картину.

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

Наличие периодического потенциала приводит к тому, что состояние электрона в монокристалле характеризуется номером  $s$  разрешенной энергетической зоны и значением квазиимпульса  $\mathbf{p}$ , определенным с точностью до векторов обратной решетки. Значение энергии электрона  $\epsilon_s(\mathbf{p})$  является при этом периодической функцией в пространстве квазиимпульсов с периодами, равными векторам обратной решетки. С топологической точки зрения, таким образом,  $\epsilon_s(\mathbf{p})$  представляет собой функцию на трехмерном торе  $\mathcal{T}^3$  (который мы будем отождествлять с первой зоной Бриллюэна), получаемом из евклидова пространства  $\mathcal{R}^3$  факторизацией по векторам обратной решетки.

Квазиклассические электронные траектории в присутствии сильного однородного магнитного поля  $\mathbf{V}$  как функции времени даются решениями системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \partial_i \epsilon_s(\mathbf{p}), \quad (1)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{e}{c} [\nabla \epsilon_s(\mathbf{p}) \mathbf{V}]^i. \quad (2)$$

Система (1), (2) — гамильтонова относительно скобки Пуассона  $\{x^i, x^j\} = 0, \{x^i, p_j\} = \delta_j^i, \{p_i, p_j\} = eB_{ij}/c$ , где  $B_{23} = B^1, B_{31} = B^2$  и т.д., с гамильтонианом  $H = \epsilon_s(\mathbf{p})$ .

Траектории электронов в пространстве квазиимпульсов, задаваемые решениями системы (2), даются пересечениями 3-периодических поверхностей уровня  $\epsilon_s = \text{const}$  плоскостями, ортогональными магнитному полю  $\mathbf{V}$ . При этом в трехмерном торе  $\mathcal{T}^3$ , получаемом из евклидова пространства  $\mathcal{R}^3$  факторизацией по векторам обратной решетки, электронные траектории на поверхности уровня  $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \text{const}$  даются линиями уровня 1-формы  $\omega = B^1 dp_1 + B^2 dp_2 + B^3 dp_3$ , ограниченной на эту поверхность. В дальнейшем мы, следуя работе [21], для множества точек  $A$  в  $\mathcal{T}^3$  (например траекторий или частей поверхности уровня  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ ) через  $\hat{A}$  будем обозначать его полный прообраз в  $\mathcal{R}^3$  при накрытии  $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{T}^3$ , устанавливая таким образом соответствие между такими объектами.

Мы будем здесь предполагать, что магнитное поле  $\mathbf{V}$  имеет направление иррациональности 3, т.е.  $\Pi(\mathbf{V})$  не содержит векторов обратной решетки. В этом случае замкнутым и открытым траекториям в трехмерном торе  $\mathcal{T}^3$  будут отвечать в  $\mathcal{R}^3$  периодические наборы соответственно замкнутых и открытых траекторий. Легко видеть при этом, что

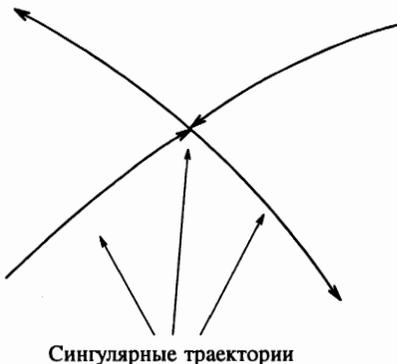


Рис. 1. Сингулярные траектории

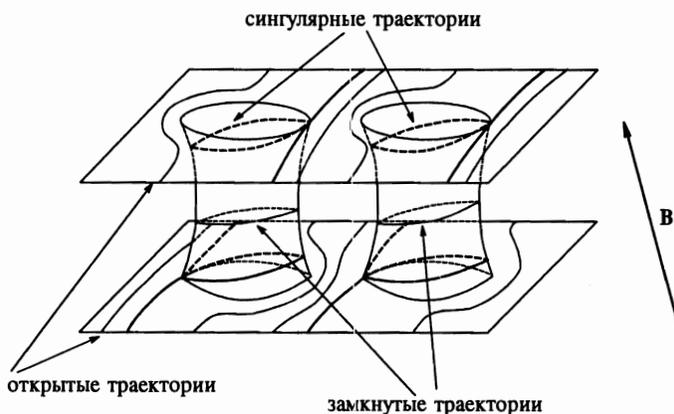


Рис. 2. Участок поверхности Ферми, содержащий замкнутые и открытые траектории, разделенные сингулярными циклами

любую замкнутую траекторию в торе  $\mathcal{T}^3$  можно в этом случае заклеить диском, перпендикулярным магнитному полю, т. е. она гомологична нулю в  $\mathcal{T}^3$ . Ограничение формы  $\omega$  на энергетические уровни  $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \text{const}$  мы в случае общего положения будем считать морсовским, т. е. будем считать, что после ограничения все ее критические точки (точки, в которых касательная плоскость к поверхности совпадает с  $\Pi(\mathbf{B})$ ) — невырождены. Критические точки  $\omega$  являются при этом траекториями системы (2). Эти траектории, а также примыкающие непосредственно к ним в случае седловых точек (см. рис. 1) мы будем называть особыми или сингулярными траекториями. Остальные траектории, не проходящие через особые точки формы  $\omega$ , мы будем называть неособыми или регулярными.

Каждая поверхность постоянной энергии  $\epsilon_s(\mathbf{p}) = \text{const}$  может быть при этом разделена на связные компоненты, каждая из которых состоит целиком из замкнутых или открытых траекторий. Компоненты граничат друг с другом по замкнутым сингулярным циклам (см. [21]). Накрывающие этих компонент будут состоять целиком из замкнутых или открытых траекторий соответственно и граничить по замкнутым сингулярным траекториям (см. рис. 2).

Далее мы вместе с энергетическими поверхностями  $\mathcal{F}_\epsilon: \epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  для полей  $\mathbf{B}$  направления иррациональности 3 будем рассматривать также редуцированные поверхности  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$  в торе  $\mathcal{T}^3$ , получаемые из  $\mathcal{F}_\epsilon$  удалением компонент, состоящих из замкнутых траекторий, и заклеиванием получившихся отверстий дисками, перпендикулярными магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Таким образом, произвольная  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$  является кусочно-гладкой, вообще говоря, несвязной, несамопересекающейся (см. [21]) поверхностью, зависящей от направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ .

Открытые траектории в  $\mathcal{R}^3$  будут при этом задаваться пересечением накрывающей  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger, \hat{\mathcal{F}}_\epsilon^\dagger$  с плоскостями, ортогональными  $\mathbf{B}$  (приклеенные диски при этом лежат в таких плоскостях). Каждая из связных компонент  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$  в торе  $\mathcal{T}^3$  является компактной двумерной ориентируемой поверхностью и представляет собой, таким образом, сферу с приклеенными  $g$ -ручками ( $g$  — род поверхности), вложенную (см. [21]) в  $\mathcal{T}^3$ . Заметим, что  $g$  не может быть равным нулю (случай, соответствующий сфере), поскольку в этом случае соответствующая накрывающая поверхность состоит из компактных компонент

и, следовательно, может содержать лишь замкнутые траектории.

Сформулируем теперь топологические теоремы (см. [18–24]), описывающие семейство поверхностей  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$  при различных направлениях магнитного поля.

Пусть имеется произвольная 3-периодическая функция  $\epsilon(\mathbf{p})$  с периодами равными векторам обратной решетки, принимающая значения на отрезке  $\epsilon_{\min} \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_{\max}$ . Тогда:

1) Для любого направления магнитного поля незамкнутые траектории существуют либо на всех энергетических уровнях, принадлежащих некоторому связному интервалу  $\epsilon_1(\mathbf{B}) \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_2(\mathbf{B})$ , где  $\epsilon_1(\mathbf{B}) > \epsilon_{\min}$ ,  $\epsilon_2(\mathbf{B}) < \epsilon_{\max}$ , либо на единственном энергетическом уровне, соответствующем некоторому значению  $\epsilon_0(\mathbf{B})$ . ( $\mathbf{B}$  частности, не может быть так, что ни на одном из уровней нет незамкнутых траекторий.)

2) При этом в первом случае множество  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$  при любом значении  $\epsilon$ ,  $\epsilon_1(\mathbf{B}) \leq \epsilon \leq \epsilon_2(\mathbf{B})$ , представляет собой несвязное объединение непересекающихся негомологических нулю в  $\mathcal{S}^3$  (для полей  $\mathbf{B}$  направления иррациональности 3, так что  $\Pi(\mathbf{B})$  не содержит векторов обратной решетки) двумерных торов  $\mathcal{S}^2$ , т.е. для любой связной компоненты  $\mathcal{F}_\epsilon^\dagger$   $g = 1$ . Двумерные торы, лежащие на разных энергетических уровнях, также не пересекают друг друга. В  $\mathcal{R}^3$  покрытие таких компонент представляет собой семейство параллельных периодически деформированных целочисленных (т.е. порожденных двумя векторами обратной решетки) плоскостей. Все открытые траектории при этом лежат в полосах конечной ширины, направление которых задается пересечением  $\Pi(\mathbf{B})$  с описанными выше плоскостями, и проходят их насквозь (см. [21]). Кроме того, около направления  $\mathbf{B}$  при этом имеется зона устойчивости, представляющая собой область конечной меры с кусочно-гладкой границей на единичной сфере  $\mathcal{S}^2$ , такая что для направлений  $\mathbf{B}$  иррациональности 3 из этой зоны наблюдается та же ситуация. Гомологический класс каждого из двумерных торов остается при этом неизменным, хотя значения  $\epsilon_1(\mathbf{B})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{B})$ , а также мера открытых траекторий на каждом энергетическом уровне, вообще говоря, меняются. На границах зоны устойчивости значения  $\epsilon_1(\mathbf{B})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{B})$  совпадают, однако  $\mathcal{F}_{\epsilon_1}^\dagger$  ( $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ) по-прежнему состоит из двумерных торов с тем же самым гомологическим классом. Физические эффекты, связанные с рассмотренной выше ситуацией, были описаны в работах [1, 2].

Однако, вообще говоря, в другом случае, т.е. когда открытые траектории существуют на единственном энергетическом уровне, они могут и не лежать в полосе конечной ширины [22–25] (направление магнитного поля не лежит на границе ни одной из зон устойчивости), и, более того, для направлений поля  $\mathbf{B}$  иррациональности 3 (см. [22–24]) они в этом случае не имеют асимптотического направления. Эта ситуация соответствует случаю, когда все связные компоненты поверхности  $\mathcal{F}_{\epsilon_0}^\dagger$  имеют род больше либо равный трем (см. [21, 24]). Нас здесь будут интересовать физические эффекты, связанные именно с такой ситуацией.

Отметим здесь, что единичная сфера  $\mathcal{S}^2$  (см. [22]), параметризующая направления магнитного поля  $\mathbf{B}$ , может при этом быть либо целиком одной зоной устойчивости, либо содержать бесконечное число таких зон, причем во втором случае две любые зоны устойчивости могут иметь не более одной общей граничной точки. Возникающая при этом картина довольно нетривиальна, а именно, на единичной сфере  $\mathcal{S}^2$  имеется бесконечно много зон устойчивости с кусочно-гладкими границами, заполняющими всюду плотно  $\mathcal{S}^2$ , причем к границе каждой зоны примыкает в бесконечном числе точек бесконечное число более мелких зон ([22], см. рис. 3). Объединение всех зон плотно заполняет сферу  $\mathcal{S}^2$ , однако до сих пор неизвестно, равна ли их общая мера мере  $\mathcal{S}^2$ . Дополнение к

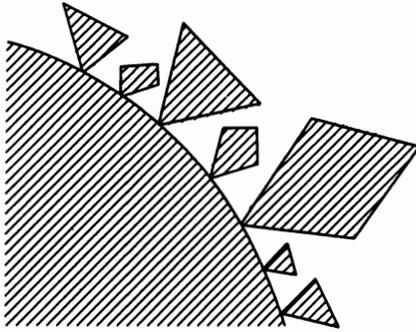


Рис. 3

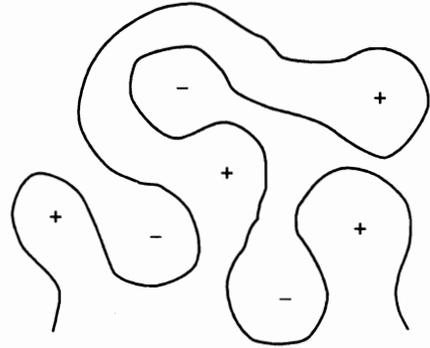


Рис. 4

Рис. 3. Расположение зон устойчивости, соответствующих случаю траекторий, лежащих в прямых полосах конечной ширины и проходящих их насквозь, на двумерной сфере

Рис. 4. Рассматриваемая нами траектория «диффузионного типа». Знаками «+» и «-» обозначены области соответственно больших и меньших значений энергии

объединению зон на сфере представляет собой нигде не плотное множество континуальной мощности, мера которого пока не установлена. Кроме того, существует теорема (см. [22–24]), утверждающая, что каждое из направлений  $\mathbf{V}$  на единичной сфере, при котором наблюдается интересующая нас ситуация (открытые траектории существуют на единственном энергетическом уровне и не лежат в полосах конечной ширины), является точкой накопления направлений, обладающих тем же свойством. При этом все такие направления вблизи рассматриваемого исходного, обладающие свойством, что открытые траектории существуют при этом на том же самом энергетическом уровне  $\epsilon_0$ , что и для исходного направления, лежат на некоторой гладкой кривой на  $\mathcal{S}^2$ , проходящей через исходное направление  $\mathbf{V}_0$ . (Этот факт обуславливается для наблюдения интересующей нас ситуации необходимостью обращения в нуль специальной топологической характеристики (см. [22–24]), что и задает локально при фиксированном уровне энергии (в данном случае вблизи уровня Ферми) одномерное подмногообразие. Отметим, что это условие не является достаточным и интересующие нас направления лежат не во всех точках описываемой кривой.)

Описанная ситуация, таким образом, позволяет утверждать, что в случае достаточно сложных поверхностей Ферми специальным подбором магнитного поля  $\mathbf{V}$  в принципе возможно добиться того, чтобы наблюдалась вторая из описанных ситуаций, соответствующая высоким родам связных компонент  $\mathcal{F}_{\epsilon_F}^\dagger$ , которая нас и будет интересовать.

Как уже отмечалось выше, в указанном случае незамкнутые траектории имеются лишь на одном энергетическом уровне (мы будем считать, что направление  $\mathbf{V}$  подобрано так, что этот уровень совпадает с уровнем Ферми  $\epsilon_F$  или лежит очень близко к нему). Каждая из открытых траекторий при этом не имеет асимптотического направления и «заполняет» всю соответствующую ей плоскость, ортогональную магнитному полю, так что движение электрона в этой плоскости напоминает обычную диффузию (см. рис. 4). Существующие аналитические примеры таких траекторий (см. [22]) позволяют, однако, констатировать, что в общем случае вместо законов обычной диффузии име-

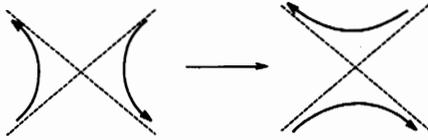


Рис. 5. Перестройки траекторий вблизи седловых особых точек при изменении уровня энергии или направления магнитного поля

ет место более общее поведение, а именно, существуют 2 направления (можно считать их ортогональными) в  $\Pi(\mathbf{P})$ , такие что средние (по модулю) отклонения от начального положения с течением времени по одному и второму направлениям пропорциональны соответственно  $p_F(l/p_F)^\alpha$  и  $p_F(l/p_F)^\beta$  (во всех плоскостях, перпендикулярных  $\mathbf{B}$ ), где  $l$  — длина пройденного участка траектории,  $p_F$  — импульс Ферми,  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ . Из условия, что заметаемая траекторией площадь растет линейно со временем, можно при этом заключить, что

$$\alpha + \beta = 1. \quad (3)$$

Мы при дальнейшем рассмотрении будем исходить из этого общего положения и сохраним название «диффузионной» для описываемых траекторий. Случаю обычной диффузии соответствует при этом  $\alpha = \beta = 1/2$ , в то время как в общем случае область в  $\Pi(\mathbf{B})$ , заметаемая «диффузионной» траекторией, с течением времени имеет все более вытянутую по одному из направлений форму.

На энергетических уровнях, не совпадающих с уровнем Ферми, имеются только замкнутые траектории. Средняя длина траекторий, лежащих вблизи уровня Ферми и получаемых из открытых траекторий на ферми-поверхности в результате показанных на рис. 5 перестроек последних (см. [21]) в плоскостях, перпендикулярных  $\mathbf{B}$ , при уходе с поверхности Ферми, может быть оценена как

$$L_\epsilon \sim p_F \frac{\epsilon_F}{|\epsilon - \epsilon_F|}, \quad (4)$$

где  $\epsilon$  — энергия уровня. Средняя длина таких траекторий, соответствующая температурному размытию  $T$ , может быть оценена соответственно как  $p_F(\epsilon_F/T)$ , где  $\epsilon_F/T \sim 10^4$  для обычных металлов. Таким образом, для магнитных полей  $B$ , считающихся сильными в теории гальвано-магнитных явлений (условием для этого является  $\omega_{BT} \gg 1$ , где  $\tau$  — время свободного пробега электронов), однако удовлетворяющих условию  $\omega_{BT} \ll \epsilon_F/T$ , траектории описываемого вида ведут себя как открытые, поскольку время пробега по такой траектории значительно превышает время свободного пробега электронов. Вклад таких траекторий в тензор проводимости существенно отличается от вклада известных ранее траекторий, лежащих в полосах конечной ширины и проходящих их насквозь ([4, 5], см. также [1]). К исследованию этого вклада мы сейчас и перейдем.

### 3. СВОЙСТВА ОДНОЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТОПОЛОГИИ ОТКРЫТЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Опишем вкратце физические положения, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться. Мы будем предполагать, что в рамках квазиклассического приближения

состояние электронов хорошо описывается одночастичной функцией распределения  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , удовлетворяющей уравнению Больцмана <sup>1)</sup>

$$f_t + v_{gr}^i(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial x^i} + F_{ext}^i \frac{\partial f}{\partial p_i} = I[f](\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (5)$$

где  $v_{gr}(\mathbf{p}) = \nabla \epsilon_s(\mathbf{p})$  — значение групповой скорости электронов,  $F_{ext}$  — внешняя сила,  $I[f]$  — интеграл столкновений. В состоянии термодинамического равновесия электронная функция распределения

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp[(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_F)/T] + 1}. \quad (6)$$

Наложение однородного магнитного поля  $\mathbf{B}$ , как легко видеть, не меняет функции распределения (6), поскольку порождает поток в пространстве квазиимпульсов, сохраняющий элемент объема  $d^3p$  и не меняющий энергии электронов.

Нас будут интересовать свойства стационарных пространственно-однородных распределений, возникающих в такой ситуации при наложении слабого электрического поля, т. е. мы интересуемся здесь тензором проводимости в сильных магнитных полях. Полагая, как обычно в таких случаях, в линейном приближении по  $E$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{E}) = f_0(\epsilon) - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} E^i \psi^i(\mathbf{p}), \quad (7)$$

и беря интеграл столкновений  $I[f](\mathbf{p})$  (в случае упругого рассеяния на примесях) в виде

$$I[f](\mathbf{p}) = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \int |w_{pp'}|^2 [f(\mathbf{p}') (1 - f(\mathbf{p})) - f(\mathbf{p}) (1 - f(\mathbf{p}'))] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \times \\ \times \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} V = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \int |w_{pp'}|^2 [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad (8)$$

где  $n_{imp}$  — концентрация примесей,  $w_{pp'}$  — амплитуда рассеяния на изолированном примесном центре, для функции  $\psi(\mathbf{p})$  нетрудно получить соотношение

$$-\frac{e}{c} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})\mathbf{B}]^k \frac{\partial \psi^i}{\partial p^k} + e v_{gr}^i(\mathbf{p}) = \\ = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \int |w_{pp'}|^2 [\psi^i(\mathbf{p}) - \psi^i(\mathbf{p}')] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} V. \quad (9)$$

В случае сильных магнитных полей (см. [4, 5]) при этом обычно полагалось (мы рассматриваем сейчас случай только замкнутых траекторий)

$$\psi^i(\mathbf{p}, \mathbf{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{(k)}^i(\mathbf{p}) B^{-k}. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Мы будем проводить рассмотрение для модели невзаимодействующих электронов с заданным законом дисперсии. Как может быть показано (см. [13]), учет ферми-жидкостных эффектов, т. е. зависимость вида закона дисперсии от распределения электронов, не влияет на результат при вычислении тензора проводимости.

Считая, что интеграл столкновений в квазиклассическом приближении не зависит от магнитного поля, для функций  $\psi_{(0)}^i(\mathbf{p})$  получаем

$$[\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})\mathbf{B}]^k \frac{\partial \psi_{(0)}^i(\mathbf{p})}{\partial p^k} = 0, \quad (11)$$

т. е.  $\psi^i(\mathbf{p})$  постоянны на траекториях системы (2). Для следующих членов ряда (10) получаем (см. [4, 5]) соотношения

$$\begin{aligned} -\frac{e}{Bc} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})\mathbf{B}]^k \frac{\partial \psi_{(1)}^i(\mathbf{p})}{\partial p^k} + e v_{gr}^i(\mathbf{p}) &= \\ = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \int |w_{pp'}|^2 [\psi_{(0)}^i(\mathbf{p}') - \psi_{(0)}^i(\mathbf{p})] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\frac{e}{Bc} [\mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p})\mathbf{B}]^k \frac{\partial \psi_{(m)}^i(\mathbf{p})}{\partial p^k} &= \\ = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \int |w_{pp'}|^2 [\psi_{(m-1)}^i(\mathbf{p}') - \psi_{(m-1)}^i(\mathbf{p})] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad m > 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Усредняя уравнения (12) и (13) по действию однопараметрической группы, порожденной системой (2), получим

$$e \langle v_{gr}^i(\mathbf{p}) \rangle = \frac{2\pi n_{imp}}{\hbar} \left\langle \int |w_{pp'}|^2 [\psi_{(0)}^i(\mathbf{p}') - \psi_{(0)}^i(\mathbf{p})] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V \right\rangle, \quad (14)$$

$$\left\langle \int |w_{pp'}|^2 [\psi_{(m)}^i(\mathbf{p}') - \psi_{(m)}^i(\mathbf{p})] \delta(\epsilon_s(\mathbf{p}) - \epsilon_s(\mathbf{p}')) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V \right\rangle = 0, \quad m > 0, \quad (15)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает усредненную величину, постоянную на траекториях системы (2).

Уравнение (14) позволяет определить функцию  $\psi_{(0)}^i(\mathbf{p})$  (постоянную на траекториях системы (2)) как решение линейного неоднородного интегрального уравнения (см. [4, 5]), и после этого функции  $\psi_{(m)}^i(\mathbf{p})$ ,  $m \geq 1$ , могут быть найдены (учитывая (14), (15)) из дифференциальных уравнений (12) и (13) с точностью до функций, постоянных на траекториях системы (2), которые могут быть найдены из уравнений (15) (напомним, что мы рассматриваем случай замкнутых траекторий). Таким образом, уравнения (12)–(15) позволяют найти функции  $\psi^i(\mathbf{p}, \mathbf{B})$ , определяемые рядом (10).

Как легко видеть, функции  $\psi_{(m)}^i(\mathbf{p})$  определяются из (12)–(15) с точностью до функций, зависящих только от энергии, что является свойством принятой модели упругого рассеяния на примесях и, вообще говоря, неверно для интегралов столкновений более общего вида. Поскольку такие добавки не влияют на значение электрического тока  $\mathbf{j}$ , мы будем здесь понимать под  $\psi_{(m)}^i(\mathbf{p})$  разность между этой функцией и ее средним значением на соответствующем энергетическом уровне, что, как легко видеть, не меняет системы (12)–(15), накладывая лишь условие нормировки на  $\psi_{(m)}^i(\mathbf{p})$ . В дальнейшем мы не будем пользоваться конкретным видом интеграла столкновений, оценивая его лишь по порядку величины.

Исходя из уравнений (13), отношение  $(m+1)$ -ого члена ряда (10) к  $m$ -ому можно оценить как

$$\frac{1}{B} \frac{\psi_{(m+1)}}{\psi_{(m)}} \sim \frac{L}{(e/c)v_F B \tau}, \tag{16}$$

где  $L$  — длина замкнутых траекторий в пространстве квазиимпульсов,  $\tau$  — введенное ранее время свободного пробега электронов. Полагая для «коротких» замкнутых траекторий (т. е. имеющих размеры порядка размеров первой зоны Бриллюэна)  $L \sim p_F$ , получим

$$\frac{\psi_{(m+1)}}{B\psi_{(m)}} \sim (\omega_{BT})^{-1}, \tag{17}$$

и, таким образом, величина  $(\omega_{BT})^{-1}$  играет роль малого параметра разложения. Асимптотическое при  $B \rightarrow \infty$  поведение тензора проводимости может быть при этом (см. [4, 5]) записано как

$$\sigma^{ik} \sim \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

и, соответственно, тензор сопротивления

$$\rho_{ik} \sim \begin{pmatrix} 1 & \omega_{BT} & 1 \\ \omega_{BT} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

(см. также [13]).

В случае открытых траекторий, лежащих в полосе шириной порядка  $p_F$  и проходящих их насквозь (см. [4, 5]), такое же рассмотрение<sup>2)</sup> дает

$$\sigma^{ik} \sim \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^{-2} & (\omega_{BT})^{-1} & (\omega_{BT})^{-1} \\ (\omega_{BT})^{-1} & 1 & 1 \\ (\omega_{BT})^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\rho_{ik} \sim \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^2 & \omega_{BT} & \omega_{BT} \\ \omega_{BT} & 1 & 1 \\ \omega_{BT} & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Как видно из (19) и (21), сопротивление в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , достигает насыщения при  $\omega_{BT} \gg 1$ ,  $B \rightarrow \infty$ , если имеются только замкнутые короткие траектории, и ведет себя по закону  $\rho \sim B^2 \cos^2 \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между направлением тока и осью  $x$ , при наличии открытых траекторий, лежащих в узких (шириной  $\sim p_F$ ) полосах, направленных вдоль  $p_x$ .

В нашем случае, однако, как уже указывалось  $L \sim p_F \epsilon_F / |\epsilon_F - \epsilon|$ , и оценка (17), таким образом, неприменима. Полагая  $|\epsilon_F - \epsilon| \sim T$ , получим из (16)

$$\psi_{(m+1)}/B\psi_{(m)} \sim (\epsilon_F/T)(\omega_{BT})^{-1}$$

<sup>2)</sup> Справедливость разложения (10) в интервале (22) может быть в этом случае доказана отдельно, мы не будем здесь на этом останавливаться.

и, таким образом, область магнитных полей, удовлетворяющих условию

$$\tau^{-1} \ll \omega_B \ll \frac{\epsilon_F}{T} \tau^{-1}, \quad (22)$$

требует в нашем случае отдельного рассмотрения. Так, например, из (14) получим

$$\psi_{(0)}^x(\mathbf{p}) = \psi_{(0)}^y(\mathbf{p}) \equiv 0,$$

после чего из (12) легко получить, учитывая (2), что

$$\max |\psi_{(1)}^x(\mathbf{p}) - \psi_{(1)}^x(\mathbf{p}')| = c \max |p_y - p'_y| \sim c p_F (L/p_F)^\beta \sim c p_F (\epsilon_F/T)^\beta,$$

$$\max |\psi_{(1)}^y(\mathbf{p}) - \psi_{(1)}^y(\mathbf{p}')| = c \max |p_x - p'_x| \sim c p_F (\epsilon_F/T)^\alpha.$$

Мы в дальнейшем будем использовать так называемую «концепцию длины свободного пробега» (см. [12, 13]). Именно, пренебрегая зависимостью длины свободного пробега от квазиимпульса, мы будем считать, что доля электронов, испытывающих первое с момента начала наблюдения рассеяние во временном интервале  $(t, t + dt)$  равна

$$\nu = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (23)$$

Обозначим через  $\mathbf{v}(t, \mathbf{p})$  значение групповой скорости в точке, получаемой из  $\mathbf{p}$  сдвигом на время  $(-t)$  вдоль траектории системы (2), и введем величину

$$\mathbf{S}(t, \mathbf{p}) = \int_0^t \mathbf{v}(t', \mathbf{p}) dt' \quad (24)$$

равную интегралу от  $\mathbf{v}(t, \mathbf{p})$  по соответствующему участку траектории, заканчивающемуся в точке  $\mathbf{p}$ . Величина

$$W(t, \mathbf{p}) = e \mathbf{E} \mathbf{S}(t, \mathbf{p}) \quad (25)$$

будет при этом характеризовать энергию (в линейном по  $\mathbf{E}$  порядке), набираемую электроном при движении в течение времени  $t$  по участку траектории, заканчивающемуся в точке  $\mathbf{p}$ . Полагая теперь, что между двумя актами рассеяния электрон движется по траектории системы (2), приобретая или теряя в электрическом поле энергию и уходя при этом на высшие или низшие энергетические уровни, в то время как на его место приходят электроны соответственно с более заполненных низших или менее заполненных высших уровней, после чего происходит рассеяние в любой другой элемент пространства квазиимпульсов, линейную по  $\mathbf{E}$  поправку к функции распределения можно записать в виде

$$f_1(\mathbf{p}) = -\frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} W(t, \mathbf{p}) dt, \quad (26)$$

и, соответственно, значение плотности тока  $\mathbf{j}$  равно

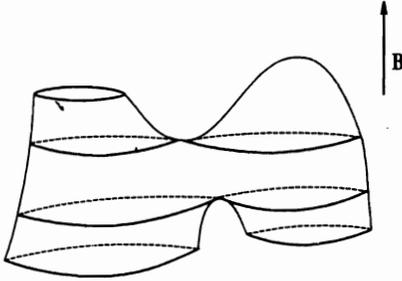


Рис. 6. Участок поверхности Ферми, разделенный сингулярными циклами на цилиндры замкнутых траекторий

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j} &= -e^2 \int \mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \left[ \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t'/\tau} \int_0^t \mathbf{E}\mathbf{v}(t', \mathbf{p}) dt' dt \right] \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \\
 &= -e^2 \int \mathbf{v}_{gr}(\mathbf{p}) \left[ \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \int_0^\infty e^{-t'/\tau} (\mathbf{E}\mathbf{v}(t', \mathbf{p})) dt' \right] \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Мы далее без нарушения общности будем считать, что ось  $z$  совпадает с направлением магнитного поля  $\mathbf{B}$ . При этом нам будет удобно, следуя [4, 5], ввести новые координаты на каждом из энергетических уровней вблизи уровня Ферми. Именно, поскольку при  $\epsilon \neq \epsilon_F$  на каждом из уровней имеются только замкнутые траектории, особые замкнутые траектории разрезают каждый из уровней на цилиндры высотой  $h_i$ , состоящие из несингулярных замкнутых траекторий (мы рассматриваем здесь лишь существенно различные цилиндры, не получающиеся друг из друга сдвигом на вектор обратной решетки). Основания некоторых из цилиндров могут быть при этом стянуты в точку (см. рис. 6).

За координаты на каждом из таких цилиндров мы возьмем величины  $p_z$  и  $s = teB/c$ , где  $t$  — время пробегания по траектории системы (2). При этом сумма высот цилиндров, состоящих из траекторий, получающихся перестройкой открытых лежащих на ферми-поверхности траекторий (кроме них, вообще говоря, имеются и «короткие» траектории, исключенные ранее из рассмотрения), стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow \epsilon_F$  и может быть оценена по порядку величины как

$$H = \sum' h_i \sim p_F \frac{|\epsilon_F - \epsilon|}{\epsilon_F},$$

в то время как средняя длина по  $s$  таких траекторий порядка

$$\frac{p_F}{v_F} \frac{|\epsilon_F - \epsilon|}{\epsilon_F} \sim m^* \frac{|\epsilon_F - \epsilon|}{\epsilon_F},$$

где  $m^*$  — эффективная масса электрона. Учитывая то обстоятельство, что якобиан перехода от координат  $(p_x, p_y, p_z)$  к  $(\epsilon, p_z, s)$  равен единице (см. [4, 5]), вклад таких траекторий в тензор проводимости можно, пользуясь (27), записать в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma^{ik} &= -e^2 \left( \frac{c}{eB} \right) \int' \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \times \\
 &\times \left[ \int_0^\infty v_{gr}^i(\epsilon, p_z, s) \exp\left(-\frac{cs'}{eB\tau}\right) v_{gr}^k(\epsilon, p_z, s - s') ds' \right] \frac{d\epsilon dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{28}
 \end{aligned}$$

где штрих у интеграла означает, что при каждом значении энергии интегрирование ведется по описанным выше цилиндрам «длинных» траекторий, получающихся из лежащих на поверхности Ферми открытых. Заметим, что при замене  $\mathbf{V}$  на  $-\mathbf{V}$ , влекущей за собой замену  $s \rightarrow -s$ , из формулы (28) нетрудно получить соотношение  $\sigma^{ik}(\mathbf{V}) = \sigma^{ki}(-\mathbf{V})$  в соответствии с принципом Онсагера.

Разлагая периодические по  $s$  функции  $v_{gr}(\epsilon, p_z, s)$  в ряд Фурье:

$$v_{gr}(\epsilon, p_z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{gr}(\epsilon, p_z, n) \exp\left(i \frac{2\pi n s}{S_0}\right), \quad (29)$$

где  $S_0 = S_0(\epsilon, p_z)$  — длина (по  $s$ ) соответствующей замкнутой траектории, формулу (28) можно переписать в виде

$$\sigma^{ik} = -e^2 \left(\frac{c}{eB}\right) \int' \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_{gr}^i(\epsilon, p_z, n) v_{gr}^k(\epsilon, p_z, -n)}{c/eB\tau + i2\pi n/S_0} \right] \frac{dedp_z}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (30)$$

где компоненты  $v_{gr}(\epsilon, p_z, n)$  равны друг другу по порядку величины вплоть до значений  $n_0 \sim S_0/m^*$  (заметим, что  $s$  имеет размерность массы, причем величина  $m^*$  соответствует размеру зоны Бриллюэна), после чего начинается их убывание. При этом из (22) имеем  $S_0/m^* \gg cS_0/eB\tau \gg 1$ .

Мы при оценке интегралов (28) заменим величину

$$\int_0^{\infty} e^{-cs'/eB\tau} v_{gr}^k(\epsilon, p_z, s-s') ds'$$

на

$$\int_0^{eB\tau/c} v_{gr}^k(\epsilon, p_z, s-s') ds', \quad (31)$$

а величину  $v_{gr}^i(\epsilon, p_z, s)$  — на усредненную по интервалу  $eB\tau/c$  (чтобы отбросить ортогональные (31) высшие гармоники):

$$v_{gr}^i(\epsilon, p_z, s) \rightarrow \frac{c}{eB\tau} \int_0^{eB\tau/c} v_{gr}^i(\epsilon, p_z, s-s') ds'. \quad (32)$$

Заметим теперь, что при  $i, k = 1, 2$  величины (31) и (32) могут быть в силу (2) выражены через разности квазиимпульсов  $p_x$  и  $p_y$  на концах участка траектории длиной  $eB\tau/c$ , которые, в свою очередь, могут (при соответствующем выборе осей  $p_x$  и  $p_y$ ) быть согласно сказанному выше оценены по порядку величины соответственно как  $p_F (eB\tau/m^*c)^\alpha$  и  $p_F (eB\tau/m^*c)^\beta$ . Для соответствующих компонент  $\sigma^{ik}$  мы имеем, таким образом, оценки

$$\sigma^{\alpha\alpha} \sim e^2 \left(\frac{c}{eB}\right)^2 \frac{1}{\tau} p_F^2 (\omega_B\tau)^{2\beta} \frac{p_F m^*}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\epsilon_F}{|\epsilon_F - \epsilon|} \frac{|\epsilon_F - \epsilon|}{\epsilon_F} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)^{2-2\beta}}, \quad (33)$$

где  $n \sim p_F^3 / (2\pi\hbar)^3$  — концентрация электронов. Аналогично:

$$\sigma^{yy} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)^{2-2\alpha}}, \tag{34}$$

$$\sigma^{xy} \sim \sigma^{yx} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)^{2-\alpha-\beta}} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)}, \tag{35}$$

(так как  $\alpha + \beta = 1$ ).

Рассмотрим теперь соответствующие (31) и (32) значения для  $v_{gr}^z$ . Мы будем предполагать, что описанное выше множество  $F_{\epsilon_F}^\dagger$  состоит в нашем случае из одной компоненты связности (в противном случае поверхность Ферми должна иметь род не меньше 6). В этом случае часть  $F_{\epsilon_F}^\dagger$ , замечаемая открытыми траекториями, является связной инвариантной относительно замены  $p \rightarrow -p$  поверхностью, и, таким образом, среднее значение  $v_{gr}^z(\mathbf{p})$  на любой открытой нессобой траектории на поверхности Ферми равно нулю. При удалении от ферми-поверхности, однако, среднее значение  $v_{gr}^z$  на получаемых из открытых замкнутых траекториях, в отличие от  $v_{gr}^x$  и  $v_{gr}^y$ , вообще говоря, не равно нулю и может быть оценено по порядку величины как  $v_F |\epsilon_F - \epsilon| / \epsilon_F$ . Для величины  $v_{gr}^z(\epsilon, p_z, s) - \langle v_{gr}^z \rangle(\epsilon, p_z)$  на каждой из траекторий естественно при этом воспользоваться соотношениями, аналогичными соответствующим величинам  $v_{gr}^x$  и  $v_{gr}^y$ , написав по порядку величины

$$\int_0^{eB\tau/c} (v_{gr}^z(\epsilon, p_z, s) - \langle v_{gr}^z \rangle(\epsilon, p_z)) ds' \sim v_F \left( \frac{eB\tau}{m^*c} \right)^\gamma, \tag{36}$$

где  $0 < \gamma < 1$ .

После сделанных предположений остальные компоненты тензора проводимости могут быть оценены из формулы (28) как

$$\begin{aligned} \sigma^{zz} &\sim e^2 \left( \frac{c}{eB} \right) \int' \frac{1}{4T \operatorname{ch}^2(\epsilon - \epsilon_F) / 2T} \frac{eB\tau}{c} v_F^2 \frac{(\epsilon - \epsilon_F)^2}{\epsilon_F^2} \frac{d\epsilon dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} + \\ &+ e^2 \left( \frac{c}{eB} \right) \frac{1}{\tau} \int' \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} p_F^2 \left( \frac{eB\tau}{m^*c} \right)^{2\gamma} \frac{d\epsilon dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3} \sim \\ &\sim e^2 \tau \frac{T^2}{\epsilon_F^2} v_F^2 \frac{v_F m^*}{(2\pi\hbar)^3} + e^2 \left( \frac{c}{eB} \right)^2 \frac{1}{\tau} p_F^2 (\omega_B\tau)^{2\gamma} \frac{p_F m^*}{(2\pi\hbar)^3} \sim \\ &\sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{T^2}{\epsilon_F^2} + \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)^{2-2\gamma}}. \end{aligned} \tag{37}$$

(Формулу (37), как и (33)-(35), можно рассматривать лишь как оценку, в которой выделены два главных члена, один из которых, соответствующий ненулевым значениям  $v_{gr}^z$  вблизи поверхности Ферми, убывает с уменьшением  $T$ , а второй, соответствующий диффузионному движению, — с ростом  $B$ .)

$$\sigma^{xz} \sim \sigma^{zx} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_B\tau)^{2-\beta-\gamma}}, \tag{38}$$

$$\sigma^{yz} \sim \sigma^{zy} \sim \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{1}{(\omega_{BT})^{2-\alpha-\gamma}}. \quad (39)$$

Формулы (33)–(35), (37)–(39) описывают, таким образом, вклад рассматриваемых нами «длинных» траекторий в тензор проводимости. Сравнивая его с вкладом (18) «обычных» траекторий, легко видеть, что за счет более медленного убывания компонент  $\sigma^{xx}$  и  $\sigma^{yy}$ , а также, возможно (хотя и не обязательно),  $\sigma^{xz}$ ,  $\sigma^{zx}$ ,  $\sigma^{yz}$  и  $\sigma^{zy}$  с ростом  $B$  в рассматриваемом нами интервале (22) по сравнению с обычным случаем, рассматриваемый нами случай может быть выделен экспериментально из остальных. Для тензора сопротивления  $\rho_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ , в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , можно при этом (при наличии также вклада от «коротких» траекторий, так что  $\sigma^{zz} \neq 0$  при  $B \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ ) легко получить оценку

$$\rho_{\alpha\beta} \sim \begin{pmatrix} (\omega_{BT})^{2\alpha} & \omega_{BT} \\ \omega_{BT} & (\omega_{BT})^{2\beta} \end{pmatrix} \quad (40)$$

в интервале (22), и, таким образом, сопротивление в плоскости, ортогональной магнитному полю, возрастает в главном члене пропорционально  $\rho \sim B^n \cos^2 \varphi$ ,  $1 < n < 2$  (здесь  $n = 2 \max\{\alpha, \beta\}$ ,  $\varphi$  — угол между направлением тока и направлением максимального сопротивления).

Отметим теперь, что формулы (33)–(35), (37)–(39), вытекающие после сделанных нами предположений из общей формулы (28), могут быть также использованы в интервале (22) и в описанных ранее [4, 5] случаях коротких (размером  $\sim p_F$ ) замкнутых траекторий и открытых траекторий, лежащих в полосах конечной ширины (также порядка  $p_F$ ) в  $\Pi(\mathbf{B})$  и проходящих их насквозь. При этом в первом случае надо, как легко видеть, положить  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  (интегралы от  $v_{gr}^x$  и  $v_{gr}^y$  ограничены при движении по траектории, в то время как интеграл от  $v_{gr}^z$  растет линейно с пройденной длиной), а во втором, соответственно,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \gamma = 1$  (считая, что движение в пространстве квазиимпульсов происходит вдоль оси  $p_x$ ). Что же касается случая, когда размеры  $L$  замкнутых траекторий или минимальная ширина  $a$  полосы, содержащей открытые траектории, удовлетворяют условию

$$p_F < L, a < p_F(\epsilon_F/T), \quad (41)$$

то движение электрона по траекториям в пространстве квазиимпульсов в интервале магнитных полей (22) может в такой ситуации рассматриваться как диффузионное лишь при  $1 \ll \omega_{BT} \ll L/p_F$ , в то время как при  $\omega_{BT} \gg L/p_F$  можно пользоваться разложением (10). Таким образом, в интервале (22) будет наблюдаться более общая зависимость  $\sigma^{ik}$  от  $B$ , так что величины  $Bd(\ln \sigma^{ik})/dB$  (играющие роль показателей в формулах (33)–(35), (37)–(39)) будут плавно меняться от соответствующих случаю диффузии электрона в  $p$ -пространстве к случаю, когда выполняется (18) или (20). Формулы (33)–(35), (37)–(39) в этом более общем случае можно считать справедливыми, полагая, однако,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  уже произвольными (не связанными соотношением (3)) медленно меняющимися в интервале (22) функциями  $B$ . Приведенное рассуждение является важным, поскольку рассмотрения, приведенные выше, в отличие от упоминавшихся ранее случаев общего положения (см. [1, 2]), соответствующих зонам устойчивости направлений  $\mathbf{B}$ , соответствуют ситуации, наблюдающейся при фиксированном направлении магнитного поля. При этом максимальный угол отклонения, на котором происходит такая перестройка

описанных выше траекторий, что средняя длина участка траектории, на котором не происходит перестроек (см. рис. 5), равна  $L$ , может быть оценен как  $\sim (p_F/L)^{1+\max\{\alpha,\beta\}}$ , и при условии сохранения описанного режима с теми же самыми  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  в интервале (22) (для чего необходимо выполнение условия  $L \sim p_F(\epsilon_F/T)$ ), таким образом, очень мал. Мы рассмотрим теперь ситуацию, соответствующую физическому случаю, когда вследствие неоднородности  $\mathbf{B}$  измеряемое значение тензора проводимости  $\sigma^{ik}$  (или, в зависимости от условий эксперимента,  $\rho_{ik}$ ) является усредненным по некоторой окрестности  $O_\delta$  рассматриваемого направления поля  $\mathbf{V}_0$ , причем размеры  $O_\delta$  превышают указанное выше значение для угла отклонения. Как уже было отмечено выше, дополнением к множеству направлений  $\mathbf{V}$ , при которых наблюдается описываемая нами ситуация (не обязательно на уровне Ферми), является объединение зон устойчивости, в которых открытые траектории существуют в энергетическом интервале  $[\epsilon_1, \epsilon_2]$  ненулевой длины и лежат в полосах конечной ширины в плоскостях, перпендикулярных магнитному полю  $\mathbf{B}$ , проходя их насквозь. Объединение зон устойчивости всюду плотно заполняет единичную сферу  $\mathcal{S}^2$ , и, таким образом, окрестность  $O_\delta$  будет всюду плотно заполнена такими зонами. Размеры зон, сходящихся к направлению  $\mathbf{V}_0$ , при этом стремятся к нулю, а значения границ соответствующих им энергетических интервалов  $\epsilon_1, \epsilon_2$  сходятся при этом к значению энергии  $\epsilon_0$ , при которой имеются открытые траектории для направления поля  $\mathbf{V}_0$ . Ширина полос  $a$ , в которых лежат открытые траектории, стремится при этом к бесконечности. Для направлений  $\mathbf{V}$  из  $O_\delta$ , не лежащих ни в одной из зон устойчивости, будет наблюдаться описываемая нами ситуация, причем значения энергии, при которых имеются открытые траектории, также стремятся к  $\epsilon_0$  (заметим, что мы считаем, что направление  $\mathbf{V}_0$  подобрано так, что  $\epsilon_0 - \epsilon_F < T$ ) при  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_0$ . Таким образом, траектории, лежащие вблизи поверхности Ферми, в случае, если  $\mathbf{V}$  принадлежит  $O_\delta$ , могут быть как замкнутыми, так и открытыми, причем, если максимальный угол отклонения от  $\mathbf{V}_0$  (вследствие неоднородности поля, дефектов кристалла и т. п.) равен  $\delta\theta$ , то размеры участков исходных траекторий, на которых не произошло перестроек

$$L \sim p_F / (\delta\theta)^{1/(1+\max\{\alpha,\beta\})}.$$

Определенная таким образом  $L$  является оценкой снизу либо для длин получившихся замкнутых траекторий, либо для ширины полос открытых, и, исходя из разумных экспериментальных оценок для  $\delta\theta$ , удовлетворяет (41). Исходя из вышесказанного можно, таким образом, ожидать, что при специальном подборе магнитного поля в металле со сложной поверхностью Ферми (так что на поверхности Ферми имеет место диффузионное движение электронов в  $p$ -пространстве в магнитном поле) можно наблюдать описываемое (33)–(35), (37)–(39) поведение тензора  $\sigma^{ik}$ , с априори неизвестными (и, вообще говоря, несвязанными в силу усреднения по  $O_\delta$  соотношением (3), если  $\delta\theta$  не настолько мало, что сохраняется режим, наблюдаемый при  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$ ) показателями  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Поведение сопротивления в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, описывается при этом формулой (40).

Мы здесь отметим, что описание такого поведения присутствует в экспериментальной работе [9], в которой исследовалась зависимость сопротивления  $\rho$  в плоскости, перпендикулярной магнитному полю от направления  $\mathbf{V}$  в монокристалле золота. Именно, в результате измерений обнаружена резкая анизотропия (в зависимости от направления  $\mathbf{V}$ ) сопротивления, причем были обнаружены точки максимумов, сопротивление в которых возрастает с  $B$  по закону  $\rho \sim B^n$ , где  $n$  меняется от 1 до 1.8. Кроме того, из угловой диаграммы видно, что группы таких максимумов выстраиваются в одномерные кривые

на сфере  $\mathcal{S}^2$  в соответствии со сказанным ранее (см. разд. 2), что позволяет сделать утверждение о том, что при этих направлениях магнитного поля на поверхности Ферми в монокристалле золота наблюдается, по-видимому, описываемая нами ситуация.

Как уже упоминалось ранее, математические теоремы позволяют утверждать, что описываемая ситуация может наблюдаться для довольно широкого класса металлов со сложными поверхностями Ферми при специальном подборе направления  $\mathbf{V}$ .

Заметим теперь, что, согласно формулам (33)–(35), (37)–(39), вклад описываемых нами «диффузионных» траекторий в продольную проводимость  $\sigma^{zz}$  (в случае поверхности Ферми невысокого рода, так что  $\mathcal{F}_{\epsilon_F}^{\dagger}$  состоит в нашей ситуации из одной компоненты связности) исчезает при  $T \rightarrow 0$  и  $B \rightarrow \infty$ . При этом в случае, когда поверхность Ферми имеет род 3 и отрицательную (вернее неположительную) гауссову кривизну во всех своих точках, на ней в нашей ситуации вообще не может быть замкнутых траекторий. Действительно, в этом случае на поверхности Ферми не может быть замкнутых траекторий, ограничивающих на ней двумерный диск  $\mathcal{D}^2$ , поскольку внутри такого диска должна быть в этом случае особая точка типа полюс, что противоречит неположительности гауссовой кривизны поверхности. Что же касается замкнутых траекторий любого другого типа, то, как легко видеть, после их удаления и заклейки получившихся отверстий дисками, перпендикулярными магнитному полю, поверхность Ферми распадется на компоненты меньшего рода, и описанная ранее поверхность  $\mathcal{F}_{\epsilon}^{\dagger}$  не будет, таким образом, содержать компонент рода 3, что противоречит нашему изначальному предположению о ситуации. В этом случае формулы (33)–(35), (37)–(39) будут описывать полный тензор проводимости, и при  $T \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow \infty$  тензор проводимости (включая  $\sigma^{zz}$ ), становится равным нулю, т. е. вещество ведет себя как изолятор при  $T \rightarrow 0$  в сильных магнитных полях при специальных направлениях  $\mathbf{V}$ . Следует отметить, однако, что описываемое условие для поверхности Ферми (которая при этом должна быть единственной) является довольно сильным, так что известные металлы со сложными ферми-поверхностями (например Au), такие что при специальных направлениях магнитного поля имеется возможность наблюдения в них описанного вклада (33)–(35), (37)–(39), ему не удовлетворяют, и кроме (33)–(35), (37)–(39) в них всегда будет присутствовать вклад (18). Возможно, однако, наблюдать резкое уменьшение  $\sigma^{zz}$  при специальных направлениях магнитного поля в металлах со сложными поверхностями Ферми в случае, если площадь, заметаемая замкнутыми траекториями (размера  $\sim p_F$ ) на ферми-поверхности, мала по сравнению с общей площадью поверхности Ферми.

В заключение автор благодарит С. П. Новикова и Л. А. Фальковского за постановку задачи, а также И. А. Дынникова и участников теоретического семинара ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке KFA Forschungszentrum Jülich GmbH и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01623).

## Литература

1. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ 63, 809 (1996).
2. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, ЖЭТФ 7, 371 (1997).
3. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ 31, 63 (1956).

4. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 35, 1251 (1958).
5. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ 38, 188 (1960).
6. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 35, 554 (1958).
7. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 36, 447 (1959).
8. Н. Е. Алексеевский, Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 37, 672 (1959).
9. Ю. П. Гайдуков, ЖЭТФ 37, 1281 (1959).
10. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 69, 419 (1959).
11. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 78, 411 (1962).
12. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Москва, Наука (1971).
13. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Москва, Наука (1987).
14. С. П. Новиков, *Успехи мат. наук* 37, 3 (1982).
15. С. П. Новиков, *Труды МИАН* 166, 201 (1984).
16. S. P. Novikov, Proc. Conf. *Topological Methods in Mathematics*, dedicated to the 60th birthday of J. Milnor, June 15–22 (1991), S. U. N. Y. Stony Brook (1993).
17. S. P. Novikov, Proc. Conf. of Geometry, December 15–26, 1993, Tel Aviv University (1995).
18. А. В. Зорич, *Успехи мат. наук* 39, 235 (1984).
19. И. А. Дынников, *Успехи мат. наук* 47, 161 (1992).
20. И. А. Дынников, *Успехи мат. наук* 48, 179 (1993).
21. И. А. Дынников, *Мат. заметки* 53, 57 (1993).
22. I. A. Dynnikov, submitted to *Advances in Soviet Math.* (1997).
23. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of plane sections*. Proc. of ECM2, BuDA (1996).
24. И. А. Дынников, Диссертация на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва (1996).
25. С. П. Царев, *Частное сообщение* (1992–93).