

## МАГНИТОЭКСИТОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В СВЯЗАННЫХ КВАНТОВЫХ ЯМАХ

Ю. Е. Лозовик<sup>а\*</sup>, А. М. Рувинский<sup>б</sup><sup>а</sup> Институт спектроскопии Российской академии наук

142092, Троицк, Московская обл., Россия

<sup>б</sup> Московский институт стали и сплавов

117936, Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 апреля 1997 г.

Рассмотрен экситон Мотта в связанных квантовых ямах в поперечных магнитных полях  $H$ . Найдено выражение для спектра экситона в произвольных магнитных полях для больших расстояний  $D$  между квантовыми ямами электрона ( $e$ ) и дырки ( $h$ ). Рассчитан спектр экситонов в сильном магнитном поле для различных уровней Ландау и произвольного  $D$ . Изменение параметра  $D/l$  ( $l = \sqrt{\hbar c/eH}$  — магнитная длина) ведет к перестройке законов дисперсии магнитоэкситона  $\mathcal{E}(P)$  ( $P$  — сохраняющийся «магнитный» импульс экситона, пропорциональный среднему расстоянию между  $e$  и  $h$  вдоль плоскости квантовых ям). Боковые («ротонные») экстремумы существуют при  $D/l < (D/l)_{cr}$  ( $(D/l)_{cr}$  зависит от квантовых чисел магнитоэкситона  $n$  и  $m$ ). Эффективная масса магнитоэкситона в состоянии с магнитным квантовым числом  $m = 0$  монотонно растет с  $H$  и  $D$ , а в состояниях с  $m \neq 0$  оказывается немонотонной функцией  $D/l$ . Вероятность рождения магнитоэкситонов в связанных квантовых ямах увеличивается с ростом  $H$ . Рассмотрено поглощение электромагнитного излучения между магнитоэкситонными уровнями в связанных квантовых ямах. Для экситона с тяжелой дыркой силы осциллятора  $f_{n,m}^{n,m+1}$  возрастают с ростом  $H$ , а  $f_{n,m}^{n,m-1}$  убывают.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Экситонные системы с пространственно-разделенными электронами ( $e$ ) и дырками ( $h$ ) в системе связанных квантовых ям в последнее время вызывают значительный интерес [1–7], в частности, в связи с предсказанной в них сверхтекучестью  $e$ – $h$ -пар, проявляющейся в существовании незатухающих электрических токов [8–10]. В этих системах также предсказаны интересные джозефсоновские явления (см. [11–14] и цитированную там литературу).

Очень интересные свойства обнаруживают двумерные экситонные системы в сильных магнитных полях [15–21]. В частности, было показано, что основным состоянием таких систем при произвольной плотности является идеальный газ экситонов [15, 17–20]. Этот результат хорошо согласуется с экспериментом (см. [22, 23] и цитируемую там литературу). Более того, были получены точные решения для основного состояния (соответствующего бозе-конденсату небозевских частиц) и для некоторых возбужденных состояний плоских  $e$ – $h$ -систем на одном уровне Ландау [17], что является следствием суперсимметрии задачи [17, 19, 20]. Для пространственно-разделенных  $e$ – $h$ -систем суперсимметрия нарушается и возникает интересный вопрос о фазовой диаграмме системы (см. [10, 24–27] и цитированную там литературу).

\*E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

Пары, состоящие из пространственно-разделенных  $e$  и  $h$  (непрямые экситоны), могут конденсироваться в жидкую фазу и образовывать другие фазы [10, 24–27], некоторые из которых аналогичны фазам в трехмерных экситонных системах [28–31]. Эти фазы могут существовать только при условии, что время жизни экситона намного больше времени термализации. Этому критерию удовлетворяют экситоны с электронами и дырками, локализованными в различных квантовых ямах, так как процесс рекомбинации  $e$  и  $h$  подавлен вследствие слабого перекрытия волновых функций электрона и дырки. Включение электрического поля перпендикулярно слоям тоже уменьшает перекрытие волновых функций, а значит, и скорость рекомбинации. Недавние экспериментальные исследования спектра магнитоэкситона в двойных и связанных квантовых ямах [6, 7] стимулируют, в качестве первого шага, детальное изучение свойств изолированного магнитоэкситона с пространственно-разделенными электроном и дыркой.

В разд. 2 получен аналитически спектр экситона в произвольных магнитных полях при больших расстояниях между квантовыми ямами (когда радиус связанного состояния  $e$  и  $h$  вдоль квантовых ям меньше расстояния  $D$  между ними). Рассчитаны также законы дисперсии  $\mathcal{E}(P)$  экситона в сильном магнитном поле для произвольных  $D$  в зависимости от «магнитного» импульса для всех уровней Ландау. Оказывается, что боковые («ротонные») минимумы с импульсами  $P \neq 0$ , обнаруженные ранее для двумерного магнитоэкситона [16], существуют лишь для межслоевых расстояний, меньших критических. Получены значения критических параметров  $(D/l)_{cr}$  ( $l = \sqrt{\hbar c/eH}$  — магнитная длина). В разд. 3 рассчитан спектр экситона в вырожденных состояниях. Изменение  $D$  приводит к аналогичной перестройке законов дисперсии. Обсуждается также влияние толщины квантовой ямы на спектр магнитоэкситона (разд. 4). В разд. 5 рассмотрена вероятность рождения магнитоэкситона и переходы между магнитоэкситонными уровнями, сопровождающиеся поглощением (или излучением) фотона. Результаты работы, а также возможные эксперименты по изучению дисперсии магнитоэкситона обсуждаются в Выводах.

## 2. ДВУМЕРНЫЙ ЭКСИТОН С ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗДЕЛЕННЫМИ ЭЛЕКТРОНОМ И ДЫРКОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим экситон с пространственно-разделенными  $e$  и  $h$  в связанных квантовых ямах в поперечных магнитных полях. Предположим, что расстояние между экситонными уровнями намного меньше характерной энергии  $\sim \pi^2 \hbar^2 / 2m_{e,h}^\perp d_{e,h}^2$  размерного квантования  $e$  и  $h$  в квантовой яме ( $m_{e,h}^\perp$  — эффективные массы  $e$  и  $h$  в направлении магнитного поля,  $d_{e,h}$  — толщины ямы). Поэтому в гамильтониане электрона и дырки, расположенных в связанной квантовой яме, можно учитывать лишь продольные степени свободы:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_e + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e \right)^2 + \frac{1}{2m_h} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_h - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h \right)^2 - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{D^2 + (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)^2}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_{e,h}$  — двумерные векторы  $e$  и  $h$  в плоскости ямы,  $m_{e,h}$  — эффективные массы  $e$  и  $h$  в плоскости ямы,  $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ ,  $\epsilon_{1,2}$  — диэлектрические проницаемости сред, окружающих квантовую яму.

Уравнение Шредингера для экситона в магнитном поле  $\mathbf{H}$  инвариантно относительно трансляции электрона и дырки на один и тот же вектор и одновременного ка-

либровочного преобразования  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Эта инвариантность приводит к закону сохранения магнитного импульса  $\mathbf{P}$  экситона, совпадающего с обычным импульсом центра масс при  $H = 0$ . Существование сохраняющейся величины в магнитном поле существенно упрощает расчеты для трехмерных [32] и двумерных магнитоэкситонов [16]. Ниже мы используем закон сохранения магнитного импульса для расчета спектра непрямого двумерного магнитоэкситона.

Оператор магнитного импульса экситона имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{\hbar}{i} \nabla_e + \frac{e}{c} \mathbf{A}_e + \frac{\hbar}{i} \nabla_h - \frac{e}{c} \mathbf{A}_h - \frac{e}{c} [\mathbf{H}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)]. \quad (2)$$

Здесь мы использовали симметричную калибровку векторного потенциала  $\mathbf{A} = (1/2)[\mathbf{H}\mathbf{r}]$ .

Используя равенство коммутатора нулю,  $[\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}] = 0$ , ищем волновые функции экситона как собственные функции оператора  $\hat{\mathbf{P}}$ :

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \exp \left\{ i \frac{\mathbf{R}}{\hbar} \left( \mathbf{P} + \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \right) \right\} \Phi_p(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $\mathbf{P}$  — собственное значение  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{R} = (m_e \mathbf{r}_e + m_h \mathbf{r}_h)/M$ ,  $M = m_e + m_h$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$ .

Волновые функции относительного движения,  $\Phi_p(\mathbf{r})$ , являются решением уравнения

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \frac{e\hbar}{2i\mu c} \gamma [\mathbf{H}\mathbf{r}] \nabla + \frac{e^2}{8\mu c^2} H^2 r^2 + \frac{e}{cM} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \mathbf{P} + \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{D^2 + r^2}} \right) \Phi_p(\mathbf{r}) = E \Phi_p(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\mu = m_e m_h / M$  — приведенная масса экситона в плоскости квантовой ямы,  $l = \sqrt{\hbar c / eH}$  — магнитная длина.

1. Рассмотрим сначала случай, когда расстояние  $D$  между квантовыми ямами существенно превышает средний размер экситона  $|\langle \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h \rangle|$  в плоскости ямы. Тогда оператор кулоновского взаимодействия  $e$  и  $\hbar$  можно приближенно представить в виде

$$-\frac{e^2}{\epsilon D} + \frac{e^2(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)^2}{2D^3 \epsilon}. \quad (5)$$

Ищем волновую функцию  $\Phi_p(\mathbf{r})$  в виде

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \alpha \rho_0) \exp \left( i \frac{\mathbf{r}\mathbf{P}}{2\hbar} \gamma \alpha \right), \quad (6)$$

где  $\rho_0 = c[\mathbf{H}\mathbf{P}] / eH^2$ ,  $\gamma = (m_h - m_e) / M$ ,  $\alpha$  — функция  $H$  и  $D$ , которая определяется так, чтобы убрать линейные по  $[\mathbf{P}\mathbf{r}]$  члены и  $\mathbf{P}\nabla$  в (4) (с учетом (5)).

Уравнение (4) при помощи преобразования (6) и при

$$\alpha(H, D) = \frac{4\mu}{M} \frac{1}{\beta^2 - \gamma^2} \quad (7)$$

приводится к виду

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{e\hbar}{2i\mu c}\gamma\mathbf{H}[\mathbf{r}\nabla] + \frac{e^2}{8\mu c^2}H^2r^2\beta^2\right)\Phi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}\Phi(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где

$$E = \mathcal{E} + \frac{P^2}{2M}(1 - \alpha) - \frac{e^2}{\epsilon D}, \quad (9)$$

$\beta = \sqrt{1 + l^4/aD^3}$ ,  $a = \epsilon\hbar^2/e^2\mu$  — эффективный борковский радиус экситона. Таким образом, для  $\Phi(\mathbf{r})$  получаем

$$\Phi_{nm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n!\beta}{2\pi(n+|m|!)}} \frac{\exp(im\phi)}{l} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \frac{r}{l}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{\beta r^2}{2l^2}\right) \exp\left(-\frac{\beta r^2}{4l^2}\right), \quad (10)$$

где  $L_n^m$  — полиномы Лагерра. Спектр (8) полностью дискретен:

$$\mathcal{E}_{nm} = \hbar\omega_c\beta \left[n + \frac{1}{2}(|m| + 1)\right] + \frac{m}{2}\gamma\hbar\omega_c, \quad (11)$$

где  $\omega_c = eH/\mu c$  — циклотронная частота.

Если  $\gamma = 0$ , уровни (11), вырождены по квантовому числу  $N = 2n + |m|$ . Каждое состояние, исключая  $(0, 0)$ ,  $(N+1)$ -кратно вырождено. Вырожденными также являются состояния  $(n \neq 0, 0)$  и  $(0, m \neq 0)$ , для которых  $\gamma/\beta = (2n - |m|)/m$ .

Приближение (5) справедливо при условии  $D^2 \gg \langle(\mathbf{r} + \alpha\boldsymbol{\rho}_0)^2\rangle$ , т. е. при

$$\left(\frac{D}{l}\right)^4 + 4\frac{D}{a} \gg 1, \quad (12)$$

$$\frac{D}{l} + \frac{l^3}{aD^2} \frac{M}{\mu} \gg \frac{Pl}{\hbar}. \quad (13)$$

Неравенство (12) справедливо для слабых и промежуточных магнитных полей при  $D \gg a$ , а для сильных магнитных полей ( $l \ll a$ ) — при более слабом условии  $D \gg l$ . Неравенство (13) справедливо при небольших значениях магнитного импульса  $P$ .

При  $H = 0$  получаем из (9), (11)

$$E_{nm} = -\frac{e^2}{\epsilon D} \left[1 - \sqrt{\frac{a}{D}} (2n + |m| + 1)\right] + \frac{P^2}{2M} \quad (14)$$

в согласии с результатом [33]. В сильных магнитных полях при  $l^4 \ll aD^3$  получаем результат для непрямого магнитоэкситона:

$$E_{nm} = \hbar\omega_c \left[n + \frac{1}{2}(|m| + \gamma m + 1)\right] - \frac{e^2}{\epsilon D} \left[1 - \frac{l^2}{D^2} (2n + |m| + 1)\right] + \left(1 - \frac{l^4}{aD^3} \frac{M}{\mu}\right) \frac{P^2}{2} \frac{c^2}{\epsilon D^3 H^2}. \quad (15)$$

Спектр (9) позволяет определить эффективную массу экситона в виде

$$M_{ex} = \left( \frac{\partial^2 E_{nm}}{\partial P^2} \right)^{-1} = M + H^2 \frac{\epsilon D^3}{c^2}. \quad (16)$$

2. Рассмотрим теперь магнитоэкситон с пространственно-разделенными  $e$  и  $h$  в связанных квантовых ямах в сильных магнитных полях при произвольных  $D$ . Мы предполагаем, что разности энергий  $eH/\mu c$  (см. ниже) между экситонными уровнями с соседними квантовыми числами Ландау и также между уровнями размерного квантования намного больше характерной энергии кулоновского взаимодействия электрона и дырки, т.е. энергии магнитоэкситона. Далее будет показано, что при  $D \ll l$  характерная энергия кулоновского взаимодействия  $e$  и  $h$  (ширина магнитоэкситонной зоны, см. ниже) имеет порядок  $\sim e^2/l\epsilon$ , а при  $D \gg l$  составляет  $\sim e^2 l^2/D^3 \epsilon$ . Следовательно, упомянутые выше условия приводят к неравенствам

$$l \ll a_{e,h}, \quad d_{e,h}^2 \ll a_{e,h}^\perp l \quad (17)$$

для межслоевого барьера  $D \ll l$  и

$$l^4 \ll a_{e,h} D^3, \quad d_{e,h}^2 l^2 \ll a_{e,h}^\perp D^3 \quad (18)$$

для  $D \gg l$ , где  $a_{e,h} = \epsilon \hbar^2 / m_{e,h} e^2$  — эффективные боровские радиусы  $e$  и  $h$  в плоскости ямы,  $a_{e,h}^\perp = \epsilon \hbar^2 / m_{e,h}^\perp e^2$  — эффективные боровские радиусы  $e$  и  $h$  в направлении магнитного поля.

В этом случае удобно искать волновые функции экситона в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \exp \left\{ i \frac{\mathbf{R}}{\hbar} \left( \mathbf{P} + \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \right) \right\} \exp \left( \frac{1}{2} i \gamma \mathbf{r}\mathbf{P} \right) \Phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0). \quad (19)$$

Волновые функции относительного движения,  $\Phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0)$ , являются решением уравнения

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \frac{e\hbar}{2i\mu c} \gamma \mathbf{H}[\mathbf{r}\nabla] + \frac{e^2}{8\mu c^2} H^2 r^2 - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{D^2 + (\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_0)^2}} \right) \Phi(\mathbf{r}) = E\Phi(\mathbf{r}). \quad (20)$$

В соответствии с неравенствами (17),(18) рассчитаем экситонную энергию, используя теорию возмущений по кулоновскому взаимодействию. В первом порядке теории возмущений по параметру  $l/a_{e,h}$  при  $D \ll l$  или  $l^4/a_{e,h} D^3$  при  $D \gg l$  можно пренебречь переходами на другие уровни Ландау. Таким образом, для  $\Phi(\mathbf{r})$  можно использовать выражение (10) при  $\beta = 1$ . Невозмущенный (по кулоновскому взаимодействию) спектр не зависит от  $P$ :

$$E_{nm}^0 = \hbar\omega_c \left[ n + \frac{1}{2} (|m| + \gamma m + 1) \right] \quad (21)$$

( $n = \min(n_1, n_2)$ ,  $m = |n_1 - n_2|$ ,  $n_{1,2}$  — квантовые числа  $e$  и  $h$ ).

Если  $\gamma = \pm 1$ , спектр вырожден по угловому моменту  $m < 0$  ( $m > 0$ ). В реальных квантовых ямах эффективные массы квазичастиц имеют конечное значение, следовательно,  $|\gamma| < 1$  и вырождение по угловому моменту относительного движения отсутствует.

Для некоторых значений  $m_e/m_h$  магнитоэкситонные уровни (21) тоже могут быть вырожденными. Например, если  $m_e = m_h$ , то уровни с квантовыми числами  $n = 0$ ,

$m = 1$  и  $n = 0$ ,  $m = -1$  совпадают; при  $\gamma = (2 - |m|)/m$  уровень  $n = 1$ ,  $m = 0$  совпадает с уровнями  $n = 0$ ,  $|m| \geq 2$  (более детально мы рассмотрим этот случай в разд. 3).

Невозмущенный спектр  $E_{nm}^0$  не зависит от магнитного импульса  $P$ . Оператор  $e$ - $\hbar$ -взаимодействия

$$\hat{V}(r) = -\frac{e^2}{\epsilon\sqrt{D^2 + r^2}} \quad (22)$$

коммутирует с  $\hat{P}$  и, следовательно, может быть диагонализирован по  $P$ . Таким образом, в невырожденном случае в первом порядке теории возмущений магнитоэкситонный спектр  $E_{nm}(P)$  можно представить в виде

$$E_{nm}(P) = E_{nm}^0 + \mathcal{E}_{nm}(P),$$

где

$$\mathcal{E}_{nm}(P) = -\langle nmP | \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{D^2 + r^2}} | nmP \rangle, \quad (23)$$

а  $E_{nm}^0$  — невозмущенный спектр (21).

Анализ законов дисперсии двумерного магнитоэкситона при  $D = 0$  (т. е. прямого экситона) проведен в работе [16]. Ниже будет показано, что экситонный спектр состоит из зон, ширина которых монотонно уменьшается с ростом  $D$  (ширина зон прямого экситона  $\sim e^2/l$ ). При малых значениях  $D$  (см. ниже) законы дисперсии немонотонны во всех состояниях, исключая состояние  $n = m = 0$ . В состоянии  $(n, m)$  дисперсионные зависимости имеют  $n + 1$  минимумов, и в случае  $m = 0$  первый и наиболее глубокий минимум соответствует нулевому импульсу. Дисперсионные зависимости в состояниях с  $m \neq 0$  обнаруживают максимум при  $P = 0$ .

Аналогично [16] перепишем (23) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{nm}(P, D) &= -\frac{e^2}{2\pi l^2} \frac{n!}{(n + |m|)!} \int \Phi_{nm}^*(\mathbf{r} - \rho_0) \Phi_{nm}(\mathbf{r} - \rho_0) \frac{dr}{\sqrt{D^2 + r^2}} = \\ &= -\text{const} \cdot \int N_{nm}(\mathbf{r}) \frac{dr}{\sqrt{(\mathbf{r} + \rho_0)^2 + D^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Это выражение можно интерпретировать как энергию взаимодействия двумерного распределения заряда с плотностью  $-eN_{nm}(\mathbf{r})$  и точечного заряда  $e$  с координатами  $(-\rho_0, D)$ . Функция  $N_{nm}(r)$  имеет полярную симметрию и  $N_{max} = n + 1$  максимумов с шириной  $\sim l$  и  $N_{min} = n + 1 - \delta_{0,m}$  минимумов. Первый максимум является наиболее сильным для произвольных квантовых чисел  $n, m$ . Центр симметрии  $(0, 0)$  является максимумом  $N_{nm}(r)$ , если  $m = 0$  и минимумом, если  $m \neq 0$ . Основной вклад в интеграл (24) дает, очевидно, область пересечения диска радиуса  $D$ , в центре которого расположен точечный заряд, и колец, соответствующих максимумам функции  $N_{nm}(r)$ .

Используя электростатическую аналогию, описанную выше, проведем качественный анализ законов дисперсии магнитоэкситона в состоянии с квантовыми числами  $n = 0$ ,  $m \neq 0$ . Функция  $N_{0m}(r)$  имеет единственный максимум с радиусом  $r_{max} = \sqrt{2|m|}l$  и минимум при  $r_{min} = 0$ . Изменяя  $\rho_0$ , мы передвигаем точечный заряд и одновременно изменяем область пересечения диска и кольца, соответствующего максимуму  $N_{0m}(r)$ . При  $Pl \ll \hbar$  и  $D \ll l$  эта область оказывается малой, и, в силу полярной симметрии распределения заряда, интеграл имеет минимальное значение при

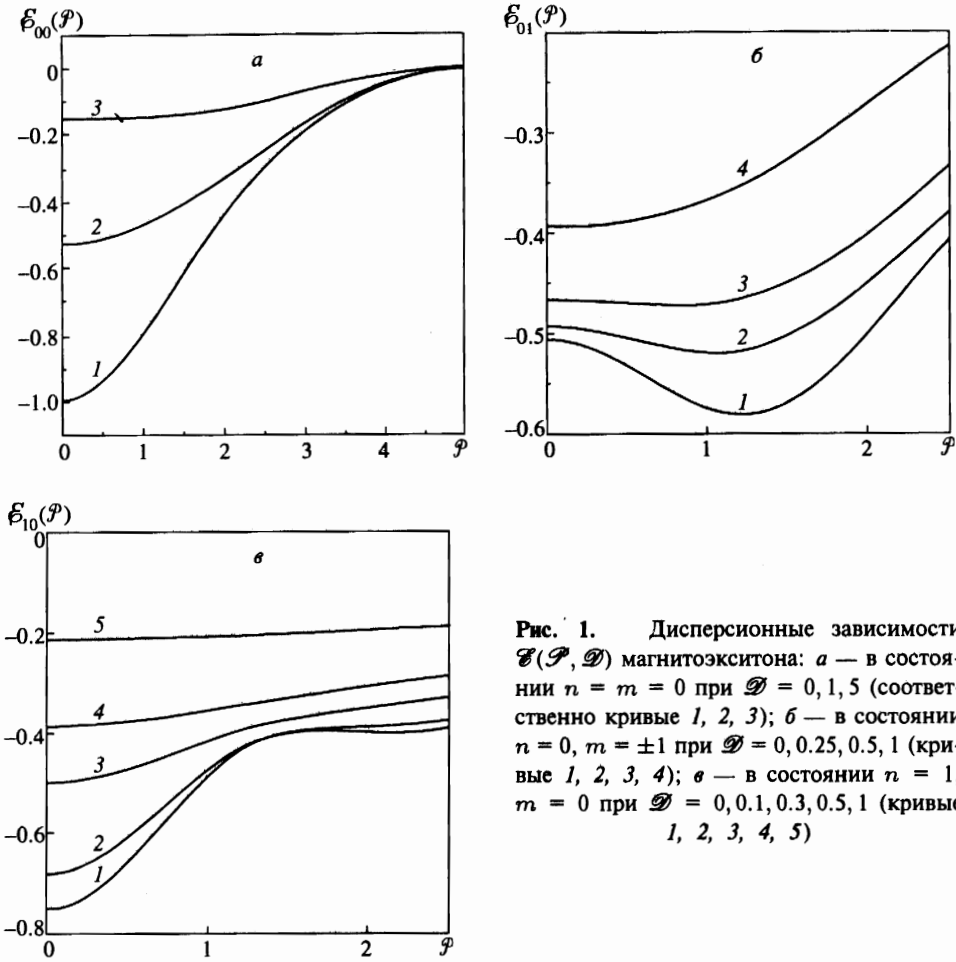


Рис. 1. Дисперсионные зависимости  $\mathcal{E}(P, D)$  магнитоэкситона: а — в состоянии  $n = m = 0$  при  $D = 0, 1, 5$  (соответственно кривые 1, 2, 3); б — в состоянии  $n = 0, m = \pm 1$  при  $D = 0, 0.25, 0.5, 1$  (кривые 1, 2, 3, 4); в — в состоянии  $n = 1, m = 0$  при  $D = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 1$  (кривые 1, 2, 3, 4, 5)

$P = 0$ . Следовательно, импульс  $P = 0$  при  $D \ll l$  соответствует максимуму закона дисперсии. При  $P \approx r_{max} \hbar / l^2$  и  $D \ll l$  область пересечения максимальна. Таким образом, импульс  $P = r_{max} \hbar / l^2$  соответствует минимуму закона дисперсии («ротонный» минимум). Дальнейшее увеличение импульса приводит к уменьшению области перекрытия, и значит, при  $Pl \gg \hbar$  энергия магнитоэкситона уменьшается.

Теперь мы рассмотрим влияние изменения  $D$  на  $\mathcal{E}_{nm}(P, D)$ . При  $P = 0$  область перекрытия изменяется с ростом  $D$  от нуля при  $D = 0$  до  $S_{cr} = 2\pi l r_{max}$  при  $D \geq r_{max} + l/2$ , т.е. при  $D_{cr} \sim r_{max}$  изменяется тип экстремума от максимума к минимуму. Одновременно исчезает ротонный минимум. Дальнейшее увеличение  $D$  приводит к увеличению расстояния между точечным зарядом и центром кольца, а значит, к уменьшению глубины минимума.

Аналогичные рассуждения можно провести для магнитоэкситона в произвольном состоянии  $(n, m)$ . Законы дисперсии всегда имеют экстремум в точке  $P = 0$ , причем при произвольном  $D$  это — минимум, если  $m = 0$ . При  $m \neq 0$  экстремум при  $P = 0$

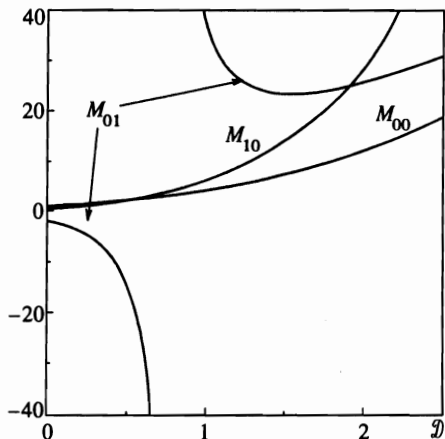


Рис. 2. Эффективные массы  $M$  магнитоэкситона в состояниях  $(n, m) = (0, 0), (0, \pm 1), (1, 0)$  в зависимости от  $\mathcal{D}$ . Эффективные массы измеряются в единицах  $M_0 = 2^{3/2}\epsilon\hbar^2/e^2l\sqrt{\pi}$  — массы прямого магнитоэкситона на уровне  $(0, 0)$

является максимумом в случае  $D \ll l$  и минимумом при  $D \gg l$ . При  $D \ll l$  дисперсионная функция имеет  $n + 1$  минимумов, а при  $D \gg l$  (более строго при  $D \gg r_{max}^{n+1}$ , где  $r_{max}^{n+1}$  — наибольший радиус максимума функции  $N_{nm}(r)$ ) наблюдается единственный минимум при  $P = 0$ . С ростом  $D$  наблюдается иерархия исчезновения ротонных экстремумов. Порядок исчезновения экстремумов зависит от их глубины и расстояния между соседними кольцами.

Законы дисперсии непрямого магнитоэкситона определяются двумя безразмерными параметрами:  $\mathcal{P} = Pl/\hbar$ ,  $\mathcal{D} = D/l$ . Расчеты показывают, что ширина зон непрямого экситона ( $\mathcal{D} \neq 0$ ) уменьшается с ростом  $\mathcal{D}$  (рис. 1). Тип дисперсионных экстремумов в случае  $\mathcal{D} \ll 1$  не изменяется по сравнению с экстремумами прямого экситона. Из (24) можно получить выражения для энергии экситона с импульсом  $\mathcal{P} = 0$  в произвольном состоянии  $(n, m)$ , например,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{00}(\mathcal{D}) &= -E^0 \exp\left(\frac{\mathcal{D}^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathcal{E}_{0,\pm 1}(\mathcal{D}) &= -E^0 \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathcal{D}^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\mathcal{D}^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2\pi}} \right], \\ \mathcal{E}_{10}(\mathcal{D}) &= -E^0 \left[ \left(\frac{3}{4} + \frac{\mathcal{D}^2}{2} + \frac{\mathcal{D}^4}{4}\right) \exp\left(\frac{\mathcal{D}^2}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\mathcal{D}}{2\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right], \end{aligned} \tag{25}$$

здесь  $E^0 = (e^2/\epsilon l)\sqrt{\pi/2}$ ,  $\operatorname{erfc}$  — дополнительная функция ошибок. Функции  $\mathcal{E}_{00}(\mathcal{D})$ ,  $\mathcal{E}_{0,\pm 1}(\mathcal{D})$ ,  $\mathcal{E}_{10}(\mathcal{D})$  монотонно убывают по модулю с ростом  $\mathcal{D}$ .

Дисперсионные кривые всегда имеют экстремум с импульсом  $P = 0$ , поэтому можно обычным образом определить эффективную массу магнитоэкситона в виде

$$\frac{1}{M_{nm}} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{nm}(P)}{\partial P^2} \right|_{P=0}$$

Для состояний с квантовыми числами  $(0, 0), (0, \pm 1), (1, 0)$  получаем (рис. 2)

$$M_{00}(\mathcal{D}) = M_0 \left[ \left(1 + \mathcal{D}^2\right) e^{\mathcal{D}^2/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\right) - \mathcal{D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]^{-1},$$



$$M_{0,\pm 1}(\mathcal{D}) = M_0 \left[ \left( 3 + \mathcal{D}^2 \right) \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2\pi}} - \left( \frac{1}{2} + 2\mathcal{D}^2 + \frac{\mathcal{D}^4}{2} \right) e^{\mathcal{D}^2/2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) \right]^{-1}, \quad (26)$$

$$M_{10}(\mathcal{D}) = M_0 \left[ \left( \frac{7}{4} + \frac{25\mathcal{D}^2}{4} + \frac{11\mathcal{D}^4}{4} + \frac{\mathcal{D}^6}{4} \right) e^{\mathcal{D}^2/2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \left( \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{17}{2} + 5\mathcal{D}^2 + \frac{\mathcal{D}^4}{2} \right) \mathcal{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^{-1}.$$

Здесь  $M_0 = 2^{3/2} \epsilon \hbar^2 / e^2 l \sqrt{\pi}$  — масса прямого экситона на нижнем уровне ( $n = m = 0$ ). Эффективная масса магнитоэкситона в области сильных магнитных полей зависит лишь от магнитного поля и параметра  $D/l$  (и не зависит от затравочных эффективных масс электрона и дырки). Подчеркнем также, что указанная эффективная масса определяется эффективным  $e$ - $h$ -взаимодействием, так что  $M(H) \rightarrow \infty$  при  $e/\epsilon \rightarrow 0$ .

Ниже мы рассчитаем законы дисперсии  $\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$  и эффективные массы  $M_{nm}(\mathcal{D})$  магнитоэкситона в зависимости от параметра  $\mathcal{D}$ . Будет показано, что эффективная масса магнитоэкситона в состоянии  $m = 0$  растет с ростом магнитного поля и межслоевого расстояния  $D$ . В состояниях же с  $m \neq 0$  эффективная масса магнитоэкситона (для центрального минимума) оказывается немонотонной функцией  $\mathcal{D}$ .

В области малых импульсов,  $\mathcal{P} \ll 1$ , и  $\mathcal{D} \ll 1$  законы дисперсии имеют вид

$$\mathcal{E}_{n|m|\geq 1}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = -\frac{e^2}{\epsilon} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{n,|m|\geq 1, P=0} + \frac{P^2}{2M_{n|m|\geq 1}(\mathcal{D})} + \\ + E^0 \frac{\mathcal{D}^2}{4\sqrt{\pi}} \frac{(n+|m|)!}{n!} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1, s_2}^{nm} \Gamma \left( |m| + s_1 + s_2 - \frac{1}{2} \right), \quad (27)$$

где

$$Q_{s_1, s_2}^{nm} = \frac{C_n^{s_1} C_n^{s_2} (-1)^{s_1+s_2}}{(|m|+s_1)! (|m|+s_2)!},$$

$C_n^s$  — число сочетаний из  $n$  по  $s$  и  $\langle r^{-1} \rangle_{nm, P=0} = \langle nm, 0 | r^{-1} | nm, 0 \rangle$ .

Интересно, что при  $m = 0$  все дисперсионные функции изменяются с ростом  $\mathcal{D}$  на величину первого порядка по параметру  $\mathcal{D}$  (т.е. не аналитически по величине  $\mathcal{D}^2$ , входящей во взаимодействие):

$$\mathcal{E}_{n0}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = -\frac{e^2}{\epsilon} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{n0, P=0} + E^0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathcal{D} + \\ + E^0 \frac{\mathcal{D}^2}{4\sqrt{\pi}} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1, s_2}^{n0} \Gamma \left( s_1 + s_2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{P^2}{2M_{n0}(\mathcal{D})}. \quad (28)$$

Эффективная масса непрямого магнитоэкситона при  $\mathcal{D} \ll 1$  возрастает с ростом  $\mathcal{D}$  по законам

$$\frac{1}{M_{nm}(\mathcal{D})} = \begin{cases} \frac{1}{M_{n0}} - \mathcal{D} \frac{(2n+1)2^{3/2}}{\sqrt{\pi}M_0} + \frac{9}{8} \mathcal{D}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}M_0} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1 s_2}^{n0} \Gamma(s_1 + s_2 - 3/2), & m = 0, \\ \frac{1}{M_{n, \pm 1}} + \mathcal{D} \frac{(n+1)2^{3/2}}{\sqrt{\pi}M_0} + \frac{9}{8} \mathcal{D}^2 \frac{(n+1)}{\sqrt{\pi}M_0} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1 s_2}^{n1} \Gamma(s_1 + s_2 - 1/2), & |m| = 1, \\ \frac{1}{M_{n, |m| \geq 2}} + \frac{9}{8} \mathcal{D}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}M_0} \frac{(n+|m|)!}{n!} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1 s_2}^{nm} \Gamma(|m| + s_1 + s_2 - 3/2), & |m| \geq 2, \end{cases}$$

здесь  $M_{nm}$  — масса прямого магнитоэкситона (когда  $e$  и  $h$  находятся в одном слое):

$$\frac{1}{M_{nm}} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}M_0} \frac{(n+|m|)!}{n!} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1 s_2}^{nm} \Gamma\left(|m| + s_1 + s_2 - \frac{1}{2}\right). \quad (29)$$

При  $m = 0$  и произвольном  $n$  эффективные массы прямого и непрямого экситонов положительны (минимум дисперсионной зависимости), а при  $m \neq 0$  эффективные массы отрицательны (дисперсионный максимум). Эффективная масса непрямого экситона в состоянии  $n = 0, |m| \gg 1$  имеет вид

$$M_{0m} = -2\sqrt{\pi}M_0 \left(|m| - \frac{1}{2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{9}{4} \frac{\mathcal{D}^2}{|m| - 1/2}\right)^{-1}.$$

При малых расстояниях  $\mathcal{D}$  между слоями  $e$  и  $h$  дисперсионные кривые (исключая состояние  $n = m = 0$ ) немонотонны и имеют  $n + 1$  минимумов. Расчеты показывают, что с ростом  $\mathcal{D}$  все нецентральные ротонные минимумы дисперсионной кривой  $\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ , в согласии с проведенным выше качественным анализом, постепенно исчезают (см. рис. 1б, в), и при  $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{cr}$  остается единственный минимум с нулевым импульсом. Изменение типа экстремума с импульсом  $\mathcal{P} = 0$  происходит при условии  $M_{nm}^{-1}(\mathcal{D}_{cr}) \rightarrow 0$ . Из электростатической аналогии ясно, что, например,  $\mathcal{D}_{cr} \sim r_{max}$  при  $n = 0$ . Для  $m = 1$  и  $m = 2$  получаем  $\mathcal{D}_{cr}^{01} = 0.756, \mathcal{D}_{cr}^{02} = 1.233$ .

При  $\mathcal{D} \gg 1$  и  $\mathcal{P} \ll 1$  законы дисперсии имеют вид

$$\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = -\frac{e^2}{\mathcal{D}\epsilon} \left(1 - \frac{\langle r^2 \rangle_{nm, P=0}}{2D^2}\right) + \frac{P^2}{2M_{nm}(\mathcal{D})}. \quad (30)$$

На трех нижних уровнях (при  $P = 0$ ) получаем  $\langle r^2 \rangle_{00} = 2l^2, \langle r^2 \rangle_{0, \pm 1} = 4l^2, \langle r^2 \rangle_{10} = 6l^2$ .

Эффективная масса магнитоэкситона растет при  $\mathcal{D} \gg 1$ :

$$M_{nm}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} M_0 \left(1 - \frac{3\langle r^2 \rangle_{nm, P=0}}{2D^2}\right)^{-1}.$$

При  $n = 0, |m| \gg 1$  получаем из последнего выражения

$$M_{0m}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}} M_0 \left(1 - \frac{3}{\mathcal{D}^2} (|m| + 1)\right)^{-1}.$$

При  $\mathcal{P} \gg 1$  и  $\mathcal{P} \gg \mathcal{D}$  дисперсионные законы имеют следующие асимптотики:

$$\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = -\frac{e^2}{\epsilon \mathcal{P} l} \left( 1 - \frac{\mathcal{D}^2}{2\mathcal{P}^2} + \frac{\langle r^2 \rangle_{nm, P=0}}{4\mathcal{P}^2 l^2} \right). \quad (31)$$

С ростом магнитного импульса возрастает среднее расстояние  $\langle r \rangle_{nmP} = l^2[\mathbf{HP}]/\hbar H$  между  $e$  и  $h$  в плоскости квантовой ямы и уменьшается энергия  $\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$  кулоновского взаимодействия  $e$  и  $h$ . Поэтому при достаточно больших  $\mathcal{D}$  магнитоэкситонный эффект может быть подавлен в реальных (несовершенных) системах из-за существенного взаимодействия с примесями и террасами квантовой ямы по сравнению с кулоновским  $e$ - $h$ -взаимодействием. Взаимодействие со случайным полем приводит к локализации магнитоэкситона [34], а в сильно несовершенных системах — к исчезновению магнитоэкситонных эффектов.

### 3. СПЕКТР НЕПРЯМОГО МАГНИТОЭКСИТОНА. РОЛЬ ВЫРОЖДЕНИЯ

В некоторых случаях невозмущенный спектр является квазивырожденным, т. е. расстояние между невозмущенными уровнями оказывается меньше характерной энергии  $\mathcal{E}_{nm}(P)$   $e$ - $h$ -взаимодействия [16]. Например, в случае  $\gamma = 0$  совпадают уровни с квантовыми числами  $(n, m \neq 0)$  и  $(n, -m)$ . При  $\gamma = (2n - |m|)/m$  энергия уровня  $(n \neq 0, 0)$  совпадает с энергией уровней  $(0, m)$ , если  $|m| > n$ . Следовательно, вследствие возможного квазивырождения применимость выражений, полученных в предыдущем разделе, ограничивается условиями

$$\gamma \gg \frac{l}{a_{e,h}}, \quad \left| -\frac{\gamma m + |m|}{2} + n \right| \gg \frac{l}{a_{e,h}}$$

при  $D/l \ll 1$  и

$$\gamma \gg \frac{l^4}{a_{e,h} D^3}, \quad \left| -\frac{\gamma m + |m|}{2} + n \right| \gg \frac{l^4}{a_{e,h} D^3}$$

при  $D/l \gg 1$ .

При  $m_e = m_h$  энергия (21) зависит от квантового числа  $N = 2n + |m|$ , и все уровни  $(N + 1)$ -кратно вырождены (основное состояние  $N = 0$  не вырождено).

В первом порядке теории возмущений получаем законы дисперсии на уровне  $N = 1$ :

$$E_1^{1,2}(\mathbf{P}, \mathcal{D}) = \hbar \omega_c + \mathcal{E}_{01}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \pm \left| \langle 0 - 1P | \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{D^2 + r^2}} | 01P \rangle \right|. \quad (32)$$

При  $P = 0$  вырождение остается, так как  $\langle 0 - 10 | (e^2/\epsilon \sqrt{D^2 + r^2}) | 010 \rangle = 0$ . При  $P \neq 0$  энергия магнитоэкситона расщепляется на две ветви с эффективными массами (рис. 3):

$$\frac{1}{M_{1,2}(\mathcal{D})} = \frac{1}{M_{01}(\mathcal{D})} \pm \alpha(\mathcal{D}), \quad (33)$$

$$\frac{1}{\alpha(\mathcal{D})} = M_0 \left[ - (5 + \mathcal{D}^2) \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{2} D^2 + \frac{\mathcal{D}^4}{4} \right) e^{\mathcal{D}^2/2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) \right]^{-1}. \quad (34)$$

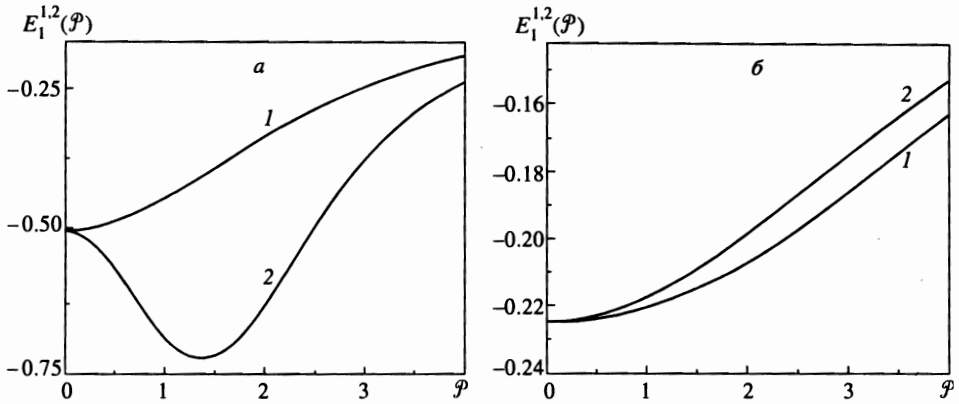


Рис. 3. Дисперсионные зависимости энергии магнитоэкситона в вырожденном состоянии  $N = 2\min(n_1, n_2) + |n_1 - n_2| = 1$  ( $n_1$  и  $n_2$  — квантовые числа Ландау  $e$  и  $h$ ): а —  $\mathcal{D} = 0$ . Кривая 2 имеет ротоновый минимум. б —  $\mathcal{D} = 3$

При  $\mathcal{D} \ll 1$  и  $\mathcal{P} \ll 1$  получаем

$$E_{1,2}^{1,2}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \hbar\omega_c - \frac{1}{2}E^0 \left(1 - \frac{\mathcal{D}^2}{2}\right) - \frac{P^2}{2M_{1,2}(\mathcal{D})}, \tag{35}$$

где

$$M_1(\mathcal{D}) = 4M_0 \left(1 + \frac{3}{2}\mathcal{D}^2\right),$$

$$M_2(\mathcal{D}) = -\frac{4}{5}M_0 \left(1 + \frac{16}{5}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{D} - \frac{33}{10}\mathcal{D}^2\right).$$

Рост  $\mathcal{D}$  приводит к исчезновению ротонового минимума в  $E_1^2$ . При  $\mathcal{D} \gg 1$  находим

$$E_{1,2}^{1,2}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \hbar\omega_c - \frac{e^2}{D\epsilon} \left(1 - \frac{2}{\mathcal{D}^2}\right) + \frac{P^2}{2M_{1,2}(\mathcal{D})} \tag{36}$$

и эффективные массы

$$M_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{33}{8\mathcal{D}^2}\right), \quad M_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{M_0}{2} \left(1 + \frac{129}{8\mathcal{D}^2}\right).$$

При  $\mathcal{P} \gg 1$  получаем

$$E_{1,2}^{1,2}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \sim -E^0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\mathcal{P}}.$$

Аналогично, уровень  $N = 2$  расщепляется на три ветви с квантовыми числами соответственно  $n = 1, m = 0$  и  $n = 0, m = \pm 2$ :

$$E_2^{1,2}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \frac{3}{2}\hbar\omega_c + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}_{10}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) + \mathcal{E}_{02}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) + \Delta_2(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \pm \sqrt{[\mathcal{E}_{10}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) - \mathcal{E}_{02}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) - \Delta_2(\mathcal{P}, \mathcal{D})]^2 + 8\Delta_1(\mathcal{P}, \mathcal{D})^2} \right\}, \tag{37}$$

$$E_2^3(\mathcal{P}, \mathcal{D}) = \frac{3}{2}\hbar\omega_c + \mathcal{E}_{02}(\mathcal{P}, \mathcal{D}) - \Delta_2(\mathcal{P}, \mathcal{D}), \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} \langle 10 | \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{D^2 + (\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_0)^2}} | 0 \pm 2 \rangle &= e^{\pm 2i\phi_0} \Delta_1(\mathcal{P}, \mathcal{D}), \\ \langle 0 - 2 | \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{D^2 + (\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}_0)^2}} | 02 \rangle &= e^{4i\phi_0} \Delta_2(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \end{aligned} \tag{39}$$

( $\phi_0$  — полярный угол вектора  $\boldsymbol{\rho}_0$ ). При  $\mathcal{P} = 0$  получаем  $\Delta_1(0, \mathcal{D}) = \Delta_2(0, \mathcal{D}) = 0$ . Следовательно, вырождение сохраняется на уровнях  $E_2^2$  и  $E_2^3$  при  $\mathcal{P} = 0$ . С ростом  $\mathcal{D}$  боковые экстремумы постепенно исчезают, и при  $\mathcal{D} \gg 1$  остается единственный минимум, которому соответствует импульс  $\mathcal{P} = 0$ .

#### 4. РОЛЬ ШИРИНЫ КВАНТОВОЙ ЯМЫ

Рассмотрим теперь более реалистичную систему с конечной, но малой шириной электронного и дырочного слоев. Полагаем по-прежнему, что ширина  $d$  слоев — самый малый пространственный масштаб системы. Приведенные выше результаты соответствуют нулевому порядку по  $d$ . Принимая во внимание неравенства (17), (18), мы можем применить адиабатическое приближение. Поперечное движение является наиболее быстрым, поэтому можно усреднить электронно-дырочный потенциал по волновым функциям

$$\sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{\pi k_1}{d} z_1\right), \quad \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left[\frac{\pi k_2}{d}(z_2 - d)\right]$$

размерного квантования в слоях  $e$  и  $h$ .

В результате законы дисперсии изменяются на величину, не приводящую к качественному изменению экситонного спектра. При  $D \ll l$ ,  $\mathcal{P} = 0$  получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{n|m|\geq 1}(0, \mathcal{D}) &= E^0 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[ \mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}\frac{d}{l} + \frac{7d^2}{6l^2} - \frac{d^2}{2\pi^2 l^2} \left( \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \right] \times \\ &\times \frac{(n + |m|)!}{n!} \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1, s_2}^{nm} \Gamma\left(|m| + s_1 + s_2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

( $k_1, k_2$  — квантовые числа размерного квантования  $e$  и  $h$ ) и

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{n0}(0, \mathcal{D}) &= E^0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( D + \frac{d}{l} \right) + E^0 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[ \mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}\frac{d}{l} + \frac{7d^2}{6l^2} - \frac{d^2}{2\pi^2 l^2} \left( \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \right] \times \\ &\times \sum_{s_1, s_2=0}^n Q_{s_1, s_2}^{n0} \Gamma\left(s_1 + s_2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

при  $m = 0$ . В случае  $\mathcal{D} \gg 1$  находим

$$\delta\mathcal{E}_{nm}(0, \mathcal{D}) \sim E^0 \frac{dl}{D^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

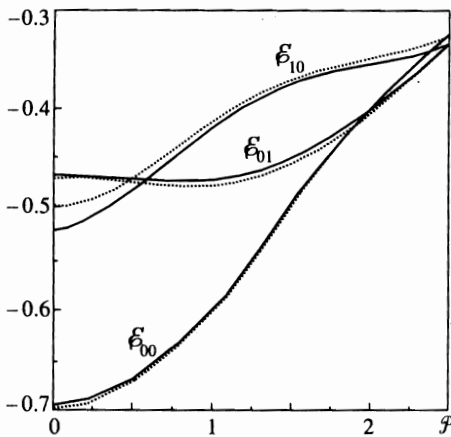


Рис. 4. Дисперсионные зависимости магнито-экситона в связанных квантовых ямах с шириной  $d_e = d_h = 0.5l$  (сплошные линии); слои  $e$  и  $h$  имеют общую поверхность в сравнении со случаем двух пространственно-разделенных слоев ( $D = 0.5l$ ) малой толщины (пунктир)

Для иллюстрации мы рассчитали законы дисперсии экситона, состоящего из электрона и дырки, локализованных в двух смежных квантовых ямах толщиной  $d = 0.5l$  каждая. На рис. 4 представлены результаты расчета для состояний  $(00), (0, \pm 1), (10)$  в сравнении с соответствующими законами дисперсии магнитоэкситона, электрон и дырка которого расположены в двух различных плоскостях на расстоянии  $\mathcal{D} = 0.5$  друг от друга. Как видно из рис. 4, наблюдается количественное изменение законов дисперсии, однако качественно они меняются несущественно. С увеличением импульса уменьшается различие между дисперсионными кривыми в этих двух случаях. Это вполне естественно, так как импульс магнитоэкситона пропорционален поперечному расстоянию между  $e$  и  $h$  вдоль слоев электронов и дырок.

### 5. МАГНИТОЭКСИТОННОЕ ФОТОПОГЛОЩЕНИЕ И ПЕРЕХОДЫ НА МЕЖЭКСИТОННЫХ УРОВНЯХ

Вероятность рождения экситона, как известно [35, 32], определяется множителем  $|\Psi(0)|^2$ . Для получения простых аналитических выражений ограничимся здесь случаем больших  $D$ . Согласно (3), (6), (10), для уровня  $n = m = 0$  вероятность рождения экситона в связанных квантовых ямах при условиях (12), (13) пропорциональна

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\beta}{2\pi l^2} \exp\left(-\frac{\beta\alpha^2\rho_0^2}{2l^2}\right). \tag{41}$$

С ростом  $H$  вероятность рождения магнитоэкситона возрастает как

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{e}{2\pi\hbar c} \sqrt{H^2 + 4H_0^2 \frac{\mu}{M}} \exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar c}{e\lambda^2} \frac{H^2 \sqrt{H^2 + 4H_0^2 \mu/M}}{(H^2 + H_0^2)^2}\right), \tag{42}$$

где  $H_0 = \sqrt{Mc^2/\epsilon D^3}$ ,  $\lambda$  — длина волны фотона.

Рассмотрим теперь задачу о поглощении длинноволнового фотона с переходом между уровнями непрямого магнитоэкситона в связанных квантовых ямах. Вероятность

межэкситонных переходов, сопровождающихся поглощением (или излучением) фотона, есть

$$W = 2\pi |\langle 2|\hat{F}|1\rangle|^2 \delta(E_2 - E_1 \mp \hbar\omega), \quad (43)$$

где  $E_{1,2}$  — экситонные уровни (9), (11),

$$\hat{F} = \frac{e}{c} [\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_e)\hat{\mathbf{v}}_e - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_h)\hat{\mathbf{v}}_h], \quad (44)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{V k}} \mathbf{e}_{\alpha k\alpha} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \text{H.c.},$$

$\mathbf{e}_\alpha$  — векторы круговой поляризации фотона в плоскости квантовых ям,

$$\hat{\mathbf{v}}_{e,h} = \frac{1}{m_{e,h}} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_{e,h} \pm \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}_{e,h}] \right)$$

— операторы скорости электрона и дырки в магнитном поле. Матричный элемент оператора перехода  $\hat{F}$  в переменных векторов центра тяжести  $\mathbf{R}$  и относительных координат  $\mathbf{r}$  электрона и дырки имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{e}{c} \langle n_2 m_2 \mathbf{P}_2; 1 | \frac{\tilde{\mathbf{A}}_e - \tilde{\mathbf{A}}_h}{M} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \left( \frac{\tilde{\mathbf{A}}_e}{m_e} + \frac{\tilde{\mathbf{A}}_h}{m_h} \right) \left( \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{R}] \right) + \\ & + \frac{e}{2Mc} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \left( \frac{m_h}{m_e} \tilde{\mathbf{A}}_e - \frac{m_e}{m_h} \tilde{\mathbf{A}}_h \right) |0; n_1 m_1 \mathbf{P}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (45)$$

где  $|n m \mathbf{P}\rangle$  характеризует состояние экситона,  $|1\rangle$  и  $|0\rangle$  — состояния электромагнитного поля с числами 1 и 0. Далее нас будут интересовать прямые переходы между магнитоэкситонными состояниями с импульсом  $P = 0$ . После интегрирования по  $\mathbf{R}$  получаем

$$\langle n_2 m_2 \mathbf{P}; 1 | \hat{F} |0; n_1 m_1 \mathbf{P}\rangle = \langle n_2 m_2; 1 | \frac{e}{\mu c} \tilde{\mathbf{A}}(0) \left( \frac{e}{2c} \gamma [\mathbf{H}\mathbf{r}] + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) |0; n_1 m_1 \rangle. \quad (46)$$

Учитывая (46), найдем силу осциллятора перехода между уровнями (21), определенную как (см., например, [36]):

$$f_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_2 - E_1) |\langle 2|r_{\pm}|1\rangle|^2, \quad (47)$$

где  $r_{\pm} = (x \pm iy)/2$ . Интегрирование в (47) по угловой переменной приводит к стандартному правилу отбора по магнитному моменту  $m$ :  $m \rightarrow m \pm 1$ . Переход  $m \rightarrow m + 1$  соответствует поглощению фотона правой поляризации ( $\mathbf{e}^+ = -i/\sqrt{2}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$ ), а при переходе  $m \rightarrow m - 1$  поглощается фотон левой поляризации ( $\mathbf{e}^- = (\mathbf{e}^+)^*$ ). Сила осциллятора (47) перехода  $(n_1, m) \rightarrow (n_2, m \pm 1)$  имеет вид

$$f_{n_1 m}^{n_2 m \pm 1} = \left( n_2 - n_1 + \frac{|m \pm 1| - |m|}{2} \pm \frac{\gamma}{2\beta} \right) (D_{n_1 m}^{n_2 m \pm 1})^2, \quad (48)$$

где

$$D_{n_1 m}^{n_2, m \pm 1} = \sqrt{\frac{n_1! n_2!}{(n_1 + |m|)! (n_2 + |m \pm 1|)!}} \int e^{-x} x^{(|m| + |m \pm 1| + 1)/2} L_{n_1}^{|m|}(x) L_{n_2}^{|m \pm 1|}(x) dx. \quad (49)$$

При  $m \geq 0, n_1 = n_2 = 0$  сила осциллятора есть

$$f_{0m}^{0m+1} = \frac{(m+1)}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad (50)$$

а при  $m \leq -1$  переход  $(0, m) \rightarrow (0, m - 1)$  характеризуется силой осциллятора

$$f_{0m}^{0m-1} = \frac{(-m+1)}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right). \quad (51)$$

Рассмотрим переходы из нижнего состояния  $(0, 0)$ . Переходы вида  $(0, 0) \rightarrow (n \neq 0, \pm 1)$  оказываются запрещенными, так как  $D_{00}^{n, \pm 1} = 0$ . Приведем значения для сил осцилляторов, соответствующих переходам между низколежащими уровнями:

$$f_{00}^{01} = \frac{1}{2} f_{10}^{11} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\beta}, \quad (52)$$

$$f_{00}^{0-1} = f_{01}^{10} = \frac{1}{2} f_{10}^{1-1} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\beta}. \quad (53)$$

Сила осциллятора (48) является монотонной функцией  $H$ :

$$f_{n_1 m}^{n_2, m \pm 1} = (D_{n_1 m}^{n_2, m \pm 1})^2 \left( n_2 - n_1 + \frac{|m \pm 1| - |m|}{2} \pm \frac{\gamma H}{2\sqrt{H^2 + 4H_0^2 \mu/M}} \right), \quad (54)$$

причем для экситона с тяжелой (легкой) дыркой  $f_{n_1 m}^{n_2, m+1}$  возрастает (убывает) с ростом  $H$ , а  $f_{n_1 m}^{n_2, m-1}$  убывает (возрастает).

### 6. ВЫВОДЫ

Исследован спектр двумерного магнитоэкситона в связанных квантовых ямах. Спектр состоит из отдельных зон, ширина которых уменьшается с ростом расстояния  $D$  между квантовыми ямами. Характер законов дисперсии  $\mathcal{E}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$  (где  $\mathcal{P}$  — сохраняющийся «магнитный» импульс, пропорциональный размеру экситона в плоскости квантовой ямы) существенно зависит от межслоевого расстояния  $\mathcal{D}$ . При  $\mathcal{D} \ll 1$  дисперсионные законы немонотонны во всех невырожденных состояниях за исключением основного ( $n = m = 0$ ). Законы дисперсии в состоянии  $(n, m)$  имеют  $n + 1$  минимум. При  $m = 0$  и любом  $n$  нулевой импульс  $\mathcal{P} = 0$  соответствует минимуму  $\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$  и максимуму  $\mathcal{E}_{nm}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$  при  $m \neq 0$ . С ростом  $\mathcal{D}$  постепенно исчезают боковые экстремумы с импульсами  $\mathcal{P} \neq 0$ , и при  $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{cr}$  наблюдается единственный экстремум — минимум с импульсом  $\mathcal{P} = 0$ . Для больших  $\mathcal{D}$  и малых  $\mathcal{P}$  в аналитической форме получен закон дисперсии в произвольных магнитных полях.

Рассчитан спектр магнитоэкситона в вырожденных состояниях. При  $\gamma = 0$  ( $m_e = m_h$ ) спектр зависит от квантового числа  $N = 2n + |m|$ , и каждый уровень



$(N + 1)$ -кратно вырожден (состояние  $N = 0$  не вырождено). С ростом  $\mathcal{D}$  боковые экстремумы с импульсами  $\mathcal{P} \neq 0$  также постепенно исчезают, и при  $\mathcal{D} \gg 1$  в состояниях с  $N = 1$  и  $N = 2$  существует единственный минимум с импульсом  $\mathcal{P} = 0$ .

Заметим, что было бы интересно обнаружить «ротонные» магнитоэкситоны с импульсами  $\mathcal{P} \neq 0$ . Их можно возбудить с использованием слоя с высоким индексом Миллера или искусственной сверхрешетки, созданной нанотехнологическими методами на поверхности квантовых ям. Ротонные магнитоэкситоны могут также возникнуть в результате релаксации магнитоэкситона из максимума с импульсом  $\mathcal{P} = 0$  в боковой минимум закона дисперсионной кривой. Так как положение этого минимума  $\mathcal{P}_r \propto \sqrt{H}$ , то в сильных магнитных полях это состояние может быть метастабильным. В этой связи было бы интересным исследование коллективных свойств ротонных магнитоэкситонов.

Найдена вероятность фотовозбуждения магнитоэкситонов в связанных квантовых ямах и рассчитаны силы осцилляторов для переходов с поглощением (или испусканием) электромагнитного излучения между магнитоэкситонными уровнями в связанных квантовых ямах.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, программами «Физика твердотельных наноструктур», «Поверхностные атомные структуры» и INTAS.

Один из авторов (Ю. Е. Л.) признателен М. Байеру (M. Bayer), А. Форхелю (A. Forchel) и В. Б. Тимофееву за полезное обсуждение результатов во время пребывания в Вюрцбурге.

## Литература

1. T. Fukuzawa, E. E. Mendez, and J. M. Hong, Phys. Rev. Lett. **64**, 3066 (1990).
2. L. V. Butov, V. D. Kulakovskii, G. E. W. Bauer, A. Forchel, and D. Grützmacher, Phys. Rev. B **46**, 12765 (1992).
3. L. V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, G. Böhm, and G. Weimann, Phys. Rev. Lett. **73**, 304 (1994).
4. J.-P. Cheng, J. Kono, B. D. McCombe, I. Lo, W. C. Mitchel, and C. E. Stutz, Phys. Rev. Lett. **74**, 450 (1995).
5. U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Strikman, Phys. Rev. Lett. **74**, 450 (1995).
6. L. V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, A. V. Petinova, and K. Eberl, Phys. Rev. B **52**, 12153 (1995).
7. M. Bayer, V. B. Timofeev, F. Faller, T. Gutbrod, and A. Forchel, Phys. Rev. B **54**, 8799 (1996).
8. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 274 (1975); Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Sol. St. Comm. **18**, 628 (1976); Sol. St. Comm. **21**, 211 (1977); Ю. Е. Лозовик, Доклад на 1-ой Всесоюзн. конф. по диэлектрической электронике, Ташкент (1973), с. 53.
9. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **44**, 389 (1976).
10. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, Письма в ЖЭТФ **64**, 526 (1996); ЖЭТФ **111**, 1879 (1997); Yu. E. Lozovik and O. L. Berman, Phys. Scripta **55**, 491 (1997).
11. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **25**, 14 (1977).
12. Yu. E. Lozovik and A. V. Klyuchnik, J. Phys. C **11**, L483 (1978); А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **76**, 670 (1979); Yu. E. Lozovik and A. V. Klyuchnik, J. Low. Temp. Phys. **38**, 761 (1980).
13. S. I. Shevchenko, Phys. Rev. Lett. **72**, 3242 (1994).
14. Yu. E. Lozovik and A. V. Poushnov, Phys. Lett. A **228**, 399 (1997).
15. И. В. Лернер, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **80**, 1488 (1981); **82**, 1188 (1982).

16. И. В. Лернер, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **78**, 1167 (1980).
17. А. Б. Дзюбенко, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **25**, 874 (1983); ФТТ **26**, 938 (1984).
18. D. Paquet, T. M. Rice, and K. Ueda, Phys. Rev. B **32**, 5208 (1985).
19. A. V. Dzyubenko and Yu. E. Lozovik, J. Phys. A **24**, 415 (1991).
20. A. H. MacDonald and E. H. Rezayi, Phys. Rev. B **42**, 3224 (1990).
21. С. М. Дикман, С. В. Иорданский, Письма в ЖЭТФ **63**, 43 (1996).
22. D. S. Chemla, J. B. Stark, and W. H. Knox, in *Ultrafast Phenomena VIII*, ed. by J.-L. Martin et al., Springer (1993), p. 21.
23. G. Finkelstein, H. Strikman, and I. Bar-Joseph, Preprint of Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.
24. D. Yoshioka and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jap. **45**, 137 (1978).
25. Yu. A. Bychkov and E. I. Rashba, Sol. St. Comm. **48**, 399 (1983).
26. X. M. Chen and J. J. Quinn, Phys. Rev. Lett. **67**, 895 (1991).
27. Xuejun Zhy, P. B. Littlewood, Mark S. Hybertsen, and T. M. Rice, Phys. Rev. Lett. **74**, 1633 (1995).
28. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964); А. Н. Козлов, Л. А. Максимов, ЖЭТФ **48**, 1184 (1965); Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968); В. I. Halperin and T. M. Rice, Sol. St. Phys. **21**, 115 (1968); Л. В. Келдыш, А. П. Силин, Крат. сообщ. ФИАН № 8, 33 (1975); Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ФТТ **17**, 1613 (1975); А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **20**, 625 (1978).
29. Ю. Каган, Б. В. Свистунов, Г. В. Шляпников, ЖЭТФ **93**, 552 (1987).
30. А. А. Горбачевич, И. В. Токатлы, ЖЭТФ **108**, 1723 (1995).
31. В. С. Бабиченко, М. Н. Киселев, Письма в ЖЭТФ **57**, 174 (1993).
32. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **53**, 717 (1967).
33. Ю. Е. Лозовик, В. Н. Нишанов, ФТТ **18**, 3276 (1976).
34. Ж. С. Геворкян, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **27**, 1800 (1985).
35. R. J. Elliott and R. Loudon, J. Phys. Chem. Sol. **15**, 196 (1960).
36. H. Hasegawa and R. E. Howard, J. Phys. Chem. Sol. **21**, 179 (1961).