ЖЭТФ, 1997, том 112, вып. 5(11), стр. 1873–1892

ЭФФЕКТ ДЕ ГААЗА–ВАН АЛЬФЕНА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

М. Г. Вавилов, В. П. Минеев

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 1 июня 1997 г.

В работе предложена теория эффекта де Гааза–ван Альфена в сверхпроводниках второго рода. Исследовано влияние рассеяния на немагнитных примесях электронов, движущихся в магнитном поле в потенциале, создаваемом неоднородным распределением параметра порядка в смешанном состоянии. Из решения системы уравнений Горькова определены величина параметра порядка и плотность квазичастичных состояний. Показано, что при наличии даже малого количества примесей сверхпроводящее состояние вблизи верхнего критического поля является бесщелевым. В этой области найдены осциллирующий в магнитном поле вклад в плотность состояний и характерное подавление амплитуды осцилляций намагниченности в сверхпроводящем состоянии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые осцилляции намагниченности — эффект де Гааза–ван Альфена — хорошо изученное явление в физике нормальных металлов. Что же касается сверхпроводников, то обычно магнитные поля, в которых практически возможно наблюдать эффект де Гааза–ван Альфена, значительно превышает критическое поле фазового перехода из сверхпроводящего в нормальное состояние.

Согласно общепринятой теории Лифшица–Косевича [1] каждое экстремальное сечение поверхности Ферми дает вклад в осциллирующую часть намагниченности, пропорциональный

$$M_{osc} \propto \sqrt{H}\,\frac{2\pi^2 T/\omega_c}{\mathrm{sh}(2\pi^2 T/\omega_c)}\exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c\tau}\right)\sin\left(\frac{2\pi F}{H}+\Phi\right). \tag{1}$$

Здесь $\omega_c = eH/m^*c$ — циклотронная частота, $F = (c/2\pi e)S$, S — площадь экстремального сечения поверхности Ферми, τ — время рассеяния электронов на примесях. Постоянная Планка $\hbar$ всюду положена равной единице. Величину $1/2\pi\tau$ принято называть температурой Дингла. Как температурный, так и примесный множители в формуле (1) быстро убывают с уменьшением магнитного поля, которое не должно превышать верхнее критическое поле сверхпроводника H_{c2}. Поэтому появление заметных осцилляций намагниченности можно ожидать лишь в области очень низких температур:

$$T < \frac{eH_{c2}}{2\pi^2 m^* c} \sim \frac{T_c^2}{\mu}. \tag{2}$$

Здесь T_c — температура перехода в сверхпроводящее состояние в нулевом поле, μ — энергия Ферми. С другой стороны, из-за рассеяния на примесях [2] осцилляции де Гааза–ван Альфена заметны лишь в достаточно чистых металлах, т. е. при выполнении условия $\omega_c\tau \gg 1$, которое можно переписать также как $l_{imp} \gg R_c$. Здесь $l_{imp} = v_F\tau$ — длина свободного пробега и $R_c = k_F\lambda^2$ — циклотронный радиус, k_F — фермиевский волновой вектор, $\lambda = \sqrt{c/eH}$ — магнитная длина, которая в поле порядка H_{c2} совпадает с длиной когерентности $\xi(T)$. Поэтому требование к чистоте образца, достаточной для наблюдения осцилляций де Гааза–ван Альфена в полях порядка H_{c2},

$$l_{imp} \gg k_F\xi^2, \tag{3}$$

значительно сильнее обычного условия чистоты сверхпроводника $l_{imp} \gg \xi_0$.

Таким образом, наблюдать эффект де Гааза–ван Альфена в области полей и температур, характерных для сверхпроводников второго рода, можно только в довольно редко встречающихся ультрачистых сверхпроводниках с большой величиной верхнего критического поля. К ним относятся соединения со структурой A-15 (V_3Si, Nb_3Sn) [3, 4], борокарбиды ($YNiB_2C$) [5], а также некоторые органические и слоистые сверхпроводники (см. обзоры [6, 7]). Так, в V_3Si [3], где $H_{c2} = 18.5$ Тл, $T_c = 17$ K, $\xi_0 = 6.3$ нм и при этом $l_{imp} > R_c = 130$ нм, осцилляции де Гааза–ван Альфена в полях порядка H_{c2} доступны для наблюдения при температурах порядка 1 K.

Эффект де Гааза–ван Альфена в указанных веществах сохраняется и при переходе в смешанное состояние ($H < H_{c2}$). При этом частота осцилляций не претерпевает изменений, а амплитуда убывает с уменьшением поля быстрее, чем в нормальном состоянии.

Подавление амплитуды осцилляций намагниченности в сверхпроводниках второго рода вычислялось в теоретических работах [8] и [9]. Было показано, что в смешанном состоянии рассеяние квазичастиц на пространственно-неоднородном распределении параметра порядка $\Delta(\mathbf{R})$ приводит к дополнительному уширению уровней Ландау

$$\frac{1}{\tau_s} \sim \sqrt{\mu\omega_c}\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}. \tag{4}$$

В результате амплитуда эффекта де Гааза–ван Альфена помимо фактора Дингла приобретает еще один не зависящий от температуры множитель $\exp(-\pi/\omega_c\tau_s)$ и достаточно быстро убывает по мере отхода от линии фазового перехода H_{c2}.

В теоретическом плане вывод выражения (4) неудовлетворителен. Дело в том, что спектр электронов и величина уширения уровней получены в работе [8] формальной заменой спектра, найденного в статье [10] в импульсном представлении, на соответствующее квантовое выражение. Описание в терминах непрерывных переменных $\xi = k^2/2m - \mu$ и полярного угла θ вполне адекватно, когда расстояние между уровнями Ландау мало по сравнению с температурой T или шириной уровней $\Gamma = 1/2\tau$. При изучении эффекта де Гааза–ван Альфена мы имеем дело как раз с противоположной ситуацией: $\omega_c > 2\pi^2 T$ и $\omega_c > \pi\Gamma$, поэтому пользоваться импульсным представлением при вычислениях спектра нельзя. Кроме того, средний квадрат модуля параметра порядка фигурирует в работе [8] как феноменологический параметр, в то время как он должен определяться из уравнения самосогласования.

Квантовый подход, развитый Стефеном [9], тем не менее подтвердил результаты Маки [8]. В работе [9], однако, при вычислении собственной энергии квазичастиц была выполнена замена суммирования по главному квантовому числу интегрированием, что допустимо только при условии, что ширина уровней превосходит расстояние между ними. Это и привело к совпадению результатов работ [8] и [9].

Описания эффекта де Гааза–ван Альфена в сверхпроводниках предлагались также в работах [11–13]. При всей разнице подходов авторами так или иначе использовался спектр типа БКШ

$$E = \sqrt{E_n^2(k_z) + \Delta^2}, \tag{5}$$

где

$$E_n(k_z) = \omega_c(n + 1/2) + k_z^2/2m - \mu. \tag{6}$$

Стефеном [9] было показано, что спектр (5) реализуется лишь в достаточно слабых полях $\sqrt{\mu\omega_c} \ll T$, поэтому в силу условия (2) наблюдение осцилляций намагниченности в этой области невозможно.

Спектр (5) формально также получается в ультраквантовом пределе $\omega_c \sim \mu$ [14]. Известно, однако, что в ультраквантовом пределе в теории сверхпроводимости неприменимо приближение среднего поля (см. [15]), тем самым, использованная в [14] математическая модель не дает адекватного описания сверхпроводимости в сильных полях.

В настоящей работе развита самосогласованная квантовая теория эффекта в смешанном состоянии. Показано, что при конечной концентрации примесей, несмотря на требование высокой чистоты $\omega_c > \pi\Gamma$, необходимое для наблюдения эффекта де Гааза–ван Альфена, в смешанном состоянии вблизи верхнего критического поля H_{c2} имеется область бесщелевой сверхпроводимости, в которой плотность состояний на поверхности Ферми остается конечной:

$$N(E=0) = N_0\left(1 - \frac{2\sqrt{\pi^3 n_F}}{L\ln n_F}\,\frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}\right). \tag{7}$$

Здесь N_0 — плотность состояний в нормальном металле, $n_F = \mu/\omega_c$ — число уровней Ландау под уровнем Ферми, L — численная константа, $L \approx 2$.

Осциллирующая часть плотности состояний, а стало быть и осциллирующая часть намагниченности M_{osc}^s, в смешанном состоянии также оказывается подавлена по сравнению с ее значением в нормальном состоянии M_{osc}^n (1):

$$\frac{M_{osc}^s}{M_{osc}^n} = 1 - \frac{2\sqrt{\pi n_F}}{L\ln n_F}\,\frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}. \tag{8}$$

Результаты (7) и (8) получены в линейном приближении по квадрату параметра порядка $\Delta^2 \sim (H_{c2} - H)/H_{c2}$ при выполнении условий $T < \Gamma < \omega_c$. Выход за пределы линейного приближения сопряжен со значительными математическими трудностями, связанными с недиагональностью матрицы собственной энергии, неизбежно возникающей вследствие пространственно-неоднородного распределения параметра порядка.

Изложение построено следующим образом. В следующем разделе выписываются уравнения Горькова для электронной функции Грина в смешанном состоянии сверхпроводника. Затем определяется явный вид волновых функций, осуществляющих представление магнитных решеток — наиболее адекватное для решения задачи о квантовании Ландау в поле периодического потенциала параметра порядка. В двух последующих разделах приведены решения уравнений самосогласования для примесной собственно-энергетической части и параметр порядка сверхпроводника. В шестом разделе вычислена плотность электронных состояний вблизи фермиевской поверхности. По известной плотности состояний вычислен термодинамический потенциал и магнитный момент сверхпроводника.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЭЛЕКТРОНОВ В СВЕРХПРОВОДНИКЕ С ПРИМЕСЯМИ

Уравнения Горькова для сверхпроводника с примесями записываются в виде

$$\left(i\omega - \hat{H}_0(\mathbf{r}) - \hat{\Delta}(\mathbf{r}) - \hat{u}(\mathbf{r})\right)\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \hat{1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{9}$$

где

$$\hat{H}_0(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} H_0(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & -H_0^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{u}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & -u(\mathbf{r}) \end{pmatrix},$$

$u(\mathbf{r})$ — потенциал рассеяния на примесях, а

$$H_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\left(-i\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 - \mu \tag{10}$$

— одночастичный гамильтониан электронов в магнитном поле, μ — химический потенциал. Магнитное поле считается однородным и совпадающим с внешним полем, что заведомо оправдано при $H \sim H_{c2}$ в сверхпроводниках с большим значением параметра Гинзбурга–Ландау κ, в которых наблюдается эффект де Гааза–ван Альфена ($\kappa \approx 17$ в V_3Si). Для простоты вычислений мы не рассматриваем действие магнитного поля на спины электронов. Собственными функциями $\phi_l(\mathbf{r})$ оператора $H_0(\mathbf{r})$ являются волновые функции Ландау, записанные в соответствующей калибровке, или любые их линейные комбинации, удовлетворяющие условию ортонормированности. Явный вид функций $\phi_l(\mathbf{r})$ и калибровка магнитного поля будут указаны в следующем разделе. Матрица $\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$, содержащая как нормальную $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$, так и аномальную $F(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ функции Грина, может быть записана как в координатном представлении, так и в представлении состояний $\phi_l(\mathbf{r})$:

$$\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \begin{pmatrix} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) & F(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) \\ F^+(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) & -G(\mathbf{r}',\mathbf{r},-\omega) \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{ll'} \begin{pmatrix} \phi_l(\mathbf{r})G_{ll'}(\omega)\phi_{l'}^*(\mathbf{r}') & \phi_l(\mathbf{r})F_{ll'}(\omega)\phi_{l'}(\mathbf{r}') \\ \phi_l^*(\mathbf{r})F_{ll'}^+(\omega)\phi_{l'}^*(\mathbf{r}') & -\phi_{l'}(\mathbf{r}')G_{l'l}(-\omega)\phi_l^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ определяется из уравнения самосогласования:

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = |g|T\sum_\omega F^+(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega), \tag{12}$$

g — потенциал притяжения электронов вблизи фермиевской поверхности.

Для изотропного рассеяния на примесях в приближении низкой концентрации примесей ($l_{imp} \gg k_F^{-1}$) будем считать, что среднее по возможным примесным конфигурациям от произведения $u(\mathbf{r}_1)u(\mathbf{r}_2)$ равно

$$\overline{u(\mathbf{r}_1)u(\mathbf{r}_2)} = n_{imp}u^2\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{13}$$

Здесь u — характерная величина потенциала рассеяния на примеси, а n_{imp} — концентрация примесей. Кроме того, пренебрежем многократным рассеянием на одной примеси (борновское приближение). В этих предположениях, сохраняя для усредненной по положениям примесей функции Грина обозначение (11), получаем для нее следующее уравнение [16]:

$$\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \hat{g}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) + \int d\mathbf{r}_1\hat{g}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\omega)\hat{\Delta}(\mathbf{r}_1)\hat{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}',\omega) + \\ + \int d\mathbf{r}_1\hat{g}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\omega)\hat{\Sigma}_{imp}(\mathbf{r}_1)\hat{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}',\omega). \tag{14}$$

Примесная собственно-энергетическая часть удовлетворяет уравнению самосогласования:

$$\hat{\Sigma}_{imp}(\mathbf{r},\omega) = \begin{pmatrix} \bar{G}(\mathbf{r},\omega) & \bar{F}(\mathbf{r},\omega) \\ \bar{F}^+(\mathbf{r},\omega) & -\bar{G}(\mathbf{r},-\omega) \end{pmatrix} = n_{imp}u^2\hat{\tau}_3\hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega)\hat{\tau}_3. \tag{15}$$

Матричная функция Грина нормального металла в магнитном поле в отсутствие примесей имеет вид

$$\hat{g}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) & 0 \\ 0 & -g(\mathbf{r}',\mathbf{r},-\omega) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Функция Грина $g(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ выражается через собственные функции оператора H_0 следующим образом:

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \sum_l \phi_l(\mathbf{r})g_l(\omega)\phi_l^*(\mathbf{r}'), \tag{17}$$

где

$$g_l(\omega) = (i\omega - \xi_l)^{-1}. \tag{18}$$

Уравнение (14) также перепишем в представлении функций $\phi_l(\mathbf{r})$:

$$\begin{pmatrix} G_{ll'}(\omega) & F_{ll'}(\omega) \\ F^+_{ll'}(\omega) & -G_{l'l}(-\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_l(\omega)\delta_{ll'} & 0 \\ 0 & -g_l(-\omega)\delta_{ll'} \end{pmatrix} + \\ + \sum_{l_1} \begin{pmatrix} g_l(\omega)\left(\bar{G}_{l_1l}(\omega)G_{l_1l'}(\omega) + \right. & g_l(\omega)\left(\bar{G}_{l_1l}(\omega)F_{l_1l'}(\omega) - \right. \\ \left. + \tilde{\Delta}_{ll_1}F^+_{l_1l'}(\omega)\right) & \left. - \tilde{\Delta}_{ll_1}G_{l'l_1}(-\omega)\right) \\ -g_l(-\omega)\left(\tilde{\Delta}^*_{ll_1}(\omega)G_{l_1l'}(\omega) + \right. & -g_l(\omega)\left(\tilde{\Delta}^*_{ll_1}(\omega)F_{l_1l'}(\omega) - \right. \\ \left. + \bar{G}_{ll_1}(\omega)F^+_{l_1l'}(\omega)\right) & \left. - \bar{G}_{ll_1}(\omega)G_{l'l_1}(-\omega)\right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{G}_{ll'} = \int d\mathbf{r}\phi_l(\mathbf{r})\phi_{l'}(\mathbf{r})\bar{G}(\mathbf{r},\omega), \tag{20}$$

$$\bar{F}_{ll'}(\omega) = \int d\mathbf{r}\phi_l^*(\mathbf{r})\phi_{l'}^*(\mathbf{r})\bar{F}(\mathbf{r},\omega), \tag{21}$$

$$\Delta_{ll'} = \int d\mathbf{r}\phi_l^*(\mathbf{r})\phi_{l'}^*(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r}), \tag{22}$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbf{r},\omega) = \Delta(\mathbf{r}) + \bar{F}(\mathbf{r},\omega). \tag{23}$$

Величины $\bar{G}(\mathbf{r},\omega)$ и $\bar{F}(\mathbf{r},\omega)$ определены формулой (15).

Нашей целью является вычисление плотности состояний и решение уравнения самосогласования для Δ с точностью до второго порядка по Δ. Для этого всё функции, входящие в (19), представим в виде суммы двух слагаемых, первое из которых содержит наименьшую степень Δ, а второе является следующим членом в разложении по Δ. Имеем, отмечая степень Δ соответствующим индексом,

$$G_{ll'}(\omega) = G_{ll'}^{(0)}(\omega) + G_{ll'}^{(2)}(\omega), \tag{24}$$

$$F_{ll'}(\omega) = F_{ll'}^{(1)}(\omega) + F_{ll'}^{(3)}(\omega), \tag{25}$$

$$\bar{G}_{ll'}(\omega) = \bar{G}_{ll'}^{(0)}(\omega) + \bar{G}_{ll'}^{(2)}(\omega). \tag{26}$$

Заметим, что $\bar{G}_{ll'}^{(0)}(\omega)$ есть не что иное, как собственно-энергетическая часть функции Грина нормального металла с примесями. Величина $\bar{G}^{(0)}(\mathbf{r})$ не зависит от координаты $\mathbf{r}$, и в силу ортонормированности волновых функций $\phi_l(\mathbf{r})$ имеем $\bar{G}_{ll'}^{(0)}(\omega) = \delta_{ll'}\bar{G}^{(0)}(\omega)$.

Из уравнения (19) можно получить следующие соотношения:

$$G_{ll'}^{(0)}(\omega) = \delta_{ll'}G_l^{(0)}(\omega) = \frac{\delta_{ll'}}{g_l^{-1}(\omega) - \bar{G}_l^{(0)}}, \tag{27}$$

$$G_{ll'}^{(2)}(\omega) = G_l^{(0)}(\omega)\bar{G}_{l'l}^{(2)}(\omega)G_{l'}^{(0)}(\omega) + \sum_{l_1} G_l^{(0)}(\omega)\tilde{\Delta}_{ll_1}(\omega)F_{l_1l'}^{+(1)}(\omega), \tag{28}$$

а для аномальной функции Грина —

$$F_{ll'}^{+(1)}(\omega) = -G_l^{(0)}(-\omega)\tilde{\Delta}_{ll'}^*(\omega)G_{l'}^{(0)}(\omega), \tag{29}$$

$$F_{ll'}^{+(3)}(\omega) = -\sum_{l_1} G_l^{(0)}(-\omega)\tilde{\Delta}_{ll_1}^*(\omega)G_{l_1l'}^{(2)}(\omega) - \sum_{l_1} G_l^{(0)}(-\omega)\bar{G}_{ll_1}^{(2)}(\omega)F_{l_1l'}^{+(1)}(\omega). \tag{30}$$

Решением уравнения самосогласования для примесной собственно-энергетической части в нормальном металле является $\bar{G}_l^{(0)}(\omega) = -i\Gamma_{imp}\mathrm{sign}\omega$, где $\Gamma_{imp} = \pi n_{imp}u^2N_0$. Поправка второго порядка по Δ определяется из уравнения

$$\bar{G}_{ll'}^{(2)}(\omega) = n_{imp}u^2\sum_{pp'}\int d\mathbf{r}\phi_l(\mathbf{r})\phi_p(\mathbf{r})\phi_{p'}^*(\mathbf{r})\phi_{l'}^*(\mathbf{r})G_{pp'}^{(2)}(\omega). \tag{31}$$

В следующем разделе приведем явный вид функций $\phi_l(\mathbf{r})$ и матричных элементов $\Delta_{ll'}$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНЫХ РЕШЕТОК

Смешанное состояние в сверхпроводниках второго рода представляет собой вихревую решетку Абрикосова, на каждую элементарную ячейку которой приходится один квант потока $\phi_0 = \pi c/e$. Для простоты вычислений выберем решетку вихрей квадратной формы со стороной a, такой что $a^2 = \pi\lambda^2$. Форма решетки может повлиять на зависимость амплитуды параметра порядка Δ от величины поля и температуры. Остальные результаты не зависят от типа решетки.

Решением линеаризованного уравнения для параметра порядка является функция

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta f_0(\mathbf{r}), \tag{32}$$

где

$$f_0(\mathbf{r}) = \sqrt[4]{2}\sum_{\nu} \exp\left(i\frac{2\pi\nu}{a}y\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{\pi\nu}{a}\lambda\right)^2\right] \tag{33}$$

в калибровке Ландау $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, Hx, 0)$.

Для вычислений матричных элементов параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ оказывается удобным выбрать полную систему функций гамильтониана H_0 в виде следующих линейных комбинаций функций Ландау (представление магнитных решеток [17]):

$$\phi_l(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{a}{\lambda}}\exp(ik_z z)\sum_m \exp(-iq_x am)\exp\left[i\left(q_y+\frac{\pi m}{a}\right)y\right]\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}+\left(q_y+\frac{\pi m}{a}\right)\lambda\right), \tag{34}$$

где

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)H_n(s), \tag{35}$$

$$H_n(s) = (-1)^n e^{s^2}\frac{d^n}{ds^n}e^{-s^2} \tag{36}$$

— полиномы Эрмита. На каждую элементарную ячейку в решетке магнитных трансляций приходится два кванта потока ϕ_0 (заряд куперовской пары вдвое больше заряда электрона), поэтому мы выбираем ее в виде прямоугольника со сторонами $a_x = a$, $a_y = 2a$. При этом $l = \{n, k_z, \vec{q}\}$ и $\vec{q}$ — вектор из первой зоны Бриллюэна: $-\pi/a < q_x < \pi/a$ и $-\pi/2a < q_y < \pi/2a$. Суммирование по квантовым числам в предыдущем разделе надо понимать как

$$\sum_l = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{dk_z}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{dq_x}{2\pi}\int_{-\pi/2a}^{\pi/2a}\frac{dq_y}{2\pi}. \tag{37}$$

Уровни энергии одночастичного гамильтониана (10) есть

$$\xi_l = \xi_n(k_z) = \omega_c(n+1/2) + k_z^2/2m^* - \mu. \tag{38}$$

Функции $g_l(\omega)$ и $G_l^{(0)}(\omega)$, определенные формулами (18) и (27), не зависят от волнового вектора $\vec{q}$.

Матричный элемент $\Delta_{ll'}$ в представлении магнитных решеток имеет вид (см. Приложение А):

$$\Delta_{ll'} = (2\pi)^3\delta(k_z + k_z')\delta(\vec{q} + \vec{q}\,')\Delta_{nn'}(\vec{q}), \tag{39}$$

$$\Delta_{nn'}(\vec{q}) = (-1)^{n'}\Delta\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}}\sum_{\nu}\exp(2i\nu q_x a)\varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right). \tag{40}$$

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРИМЕСНОЙ СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Функцию $\tilde{\Delta}(\mathbf{r},\omega)$, определенную в (23), ищем в виде $\tilde{\Delta}(\mathbf{r},\omega) = \Delta(\mathbf{r})[1+\alpha(\omega)]$. Подставляя выражение для $\Delta_{ll'}$ в выражение (29) и переходя обратно в координатное представление (см. Приложение Б), получаем

$$F^{+(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega) = -\Delta^*(\mathbf{r})\,[1+\alpha(\omega)]\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\int\frac{dk_z}{2\pi}\sum_{nn'}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}G_n^{(0)}(-\omega,k_z)G_{n'}^{(0)}(\omega,k_z). \tag{41}$$

Сравнивая это выражение с (23), находим $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{1-\beta(\omega)}, \tag{42}$$

где

$$\beta(\omega) = n_{imp}u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\int\frac{dk_z}{2\pi}\sum_{nn'}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}G_n^{(0)}(-\omega,k_z)G_{n'}^{(0)}(\omega,k_z). \tag{43}$$

С помощью формулы Стирлинга можно получить следующую оценку:

$$\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!} \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi n}}\exp\left(-\frac{(n-n')^2}{4n}\right). \tag{44}$$

Положим $m = n' - n$ и заменим по формуле Пуассона суммирование по n на соответствующее интегрирование:

$$\beta(\omega) = -n_{imp}u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\int\frac{dk_z}{2\pi}\sum_m\int dn\frac{1}{\sqrt{4\pi n}}\exp\left(-\frac{m^2}{4n}\right)\times$$
$$\times\sum_r e^{2i\pi rn}\frac{1}{i\omega+\xi_n(k_z)+i\Gamma_{imp}\mathrm{sign}\omega}\,\frac{1}{i\omega-\xi_n(k_z)-\omega_c m+i\Gamma_{imp}\mathrm{sign}\omega}. \tag{45}$$

При этом оказывается, что в сумме по r мы можем пренебречь осциллирующими слагаемыми с $r \neq 0$, содержащими дополнительный малый множитель $\sqrt{\omega_c/r\mu}\exp(-2\pi r\Gamma_{imp}/\omega_c)$. Этот множитель возникает вследствие того, что при $r \neq 0$ в интеграл по k_z существенный вклад дает только область вблизи экстремального сечения фермиевской поверхности, тогда как при $r = 0$ — вся фермиевская поверхность. Мы не приводим здесь вычислений для слагаемых с $r \neq 0$, поскольку они вполне аналогичны проделанным в разд. 6 при нахождении осциллирующей плотности состояний.

В оставшемся члене с $r = 0$ перейдем от интегрирования по n к интегрированию по координатам двумерного вектора $\vec{k}_\perp$ такого, что $\omega_c(n + 1/2) = k_\perp^2/2m^*$, а затем выполним интегрирование по компонентам трехмерного вектора $\mathbf{k}$, рассматривая $\mathbf{k}$ как вектор, составленный из $\vec{k}_\perp$ и k_z:

$$\int_0^\infty \frac{dn}{2\pi\lambda^2}\int \frac{dk_z}{2\pi} = \int \frac{2\pi k_\perp dk_\perp}{(2\pi)^2}\int \frac{dk_z}{2\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = N_0 \int d\xi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta. \tag{46}$$

При $\omega \ll \Gamma_{imp} \ll \omega_c$ в сумме по m достаточно оставить слагаемое с $m = 0$, и, выполняя интегрирование, получаем

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{\pi\omega_c}{8\mu}}. \tag{47}$$

В пределе $\omega > \omega_c$ применимо квазиклассическое приближение. Поэтому суммирование по квантовому числу $n' = n + m$ можно заменить интегрированием. Для оценки интеграла положим $\exp(-m^2/4n) \approx 1$. В результате найдем, что при больших ω величина $\beta(\omega)$ не превосходит

$$\sqrt{\frac{\pi^3\omega_c}{8\mu}\frac{\Gamma_{imp}}{\omega_c}}. \tag{48}$$

Таким образом, при условии $n_F = \mu/\omega_c \gg 1$ величина $\beta(\omega)$ мала, и в дальнейших вычислениях мы будем игнорировать отличие $\tilde{\Delta}(\mathbf{r},\omega)$ от $\Delta(\mathbf{r})$.

Из последующих вычислений будет видно (см. разд. 6), что для нахождения плотности состояний с точностью до Δ^2 достаточно знать проинтегрированное по квазиимпульсу $\vec{q}$ значение примесной собственно-энергетической части:

$$\overline{\tilde{G}^{(2)}}_{nn'}(\omega) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\tilde{G}^{(2)}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega).$$

Проинтегрируем правую и левую части уравнения (31) по квазиимпульсу $\vec{q}$ и, используя (28) и (29), получим (см. Приложение В)

$$\overline{\tilde{G}^{(2)}}_{nn'}(\omega) = \frac{\delta_{nn'}n_{imp}u^2}{2\pi\lambda^2}\sum_m \int \frac{dk_z}{2\pi}\left\{ \left[G^{(0)}_m(k_z,\omega)\right]^2 \overline{\tilde{G}^{(2)}}_{mm}(\omega) - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta^2}{2\pi\lambda^2}\left[G^{(0)}_m(k_z,\omega)\right]^2 \sum_{m_1}\frac{(m+m_1)!}{2^{m+m_1+1}m!m_1!}G^{(0)}_{m_1}(k_z,-\omega)\right\}. \tag{49}$$

При выводе (49) мы воспользовались следующим фактом:

$$\int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\phi_{n\vec{q}k_z}(\mathbf{r})\phi^*_{n'\vec{q}k_z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\lambda^2}\delta_{nn'}, \tag{50}$$

где интеграл берется по первой зоне Бриллюэна.

Дальнейшие вычисления аналогичны вычислению $\beta(\omega)$. Именно, применяем соотношение (44), выполняем переход от суммирования по m к интегрированию и отбрасываем малые осциллирующие слагаемые. В неосциллирующем слагаемом выполняем переход от интегрирования по m и k_z к интегрированию по $\xi = \xi_m(k_z)$ с помощью соотношения (46). Поскольку $\overline{\bar{G}^{(2)}}_{mm}(\omega)$ не зависит от m, то первое слагаемое в (49), проинтегрированное по ξ, равно нулю. Следовательно, величина $\overline{\bar{G}^{(2)}}_{nn'}(\omega)$ определяется вторым слагаемым в (49). В случае $\omega \ll \Gamma_{imp} \ll \omega_c$, оставляя в сумме по m_1 лишь член с $m_1 = m$, получаем

$$\overline{\bar{G}^{(2)}}_{mm}(\omega) \approx \frac{i}{16\pi\lambda^2}\sqrt{\frac{\pi\omega_c}{\mu}}\,\frac{\tilde{\Delta}^2}{\Gamma_{imp}}. \tag{51}$$

Если $\omega > \omega_c$, неосциллирующая часть $\overline{\bar{G}^{(2)}}$ равна нулю, так как в этом пределе суммирование по m_1 во втором слагаемом в (49) можно заменить интегрированием и последующее интегрирование по m дает нуль.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Параметр порядка сверхпроводника является решением уравнения самосогласования (12). Линеаризованное по $\Delta(\mathbf{r})$ уравнение (12),

$$\Delta(\mathbf{r}) = -|g|T\sum_{\omega}\int d\mathbf{r}'G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',-\omega)\Delta(\mathbf{r}'), \tag{52}$$

определяет линию фазового перехода металл–сверхпроводник как функцию температуры и магнитного поля. Оно обладает бесконечным количеством решений $f_N(\mathbf{r})$, являющихся собственными функциями уравнения Шредингера для частицы с зарядом $2e$ в магнитном поле H [18]. Подстановка в (52) $\Delta(\mathbf{r}) = f_N(\mathbf{r})$ дает уравнение для определения верхнего критического поля H_N, в котором могла бы появиться сверхпроводимость с пространственной зависимостью параметра порядка, задаваемой $f_N(\mathbf{r})$. Наибольшее значение верхнего критического поля H_{c2} достигается при $N = 0$ на функции $f_0(\mathbf{r})$, заданной (33).

Любое решение уравнения самосогласования (12) может быть представлено как линейная комбинация функций $f_N(\mathbf{r})$:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta\sum_{N=0}^{\infty} a_N f_N(\mathbf{r}). \tag{53}$$

С целью найти зависимость амплитуды параметра порядка от отклонения магнитного поля от верхнего критического, домножим обе части уравнения (12) на $\Delta f_N(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по $\mathbf{r}$. В результате мы придем к алгебраической системе уравнений для коэффициентов a_N. Положим $a_0 = 1$. Из структуры системы уравнений для коэффициентов a_N нетрудно убедиться, что все a_N при $N \neq 0$ малы как $(H_{c2}-H)/H_{c2}$. Поэтому достаточно оставить только уравнение с $N = 0$, которое с точностью до членов порядка Δ^4 имеет вид

$$\Delta^2 = |g|T\sum_{\omega}\sum_{nn'}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\int\frac{dk_z}{2\pi}\Delta_{nn'}(\vec{q})\left[F^{(1)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega) + F^{(3)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)\right]. \tag{54}$$

Вычислим первый член в выражении (54), содержащий $F^{(1)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)$, при значениях поля H меньших верхнего критического поля H_{c2}. Воспользовавшись результатом Приложения B и формулой (44), запишем его в явном виде:

$$-|g|T\Delta^2\sum_{\omega}\frac{1}{2\pi\lambda^2}\sum_{nn'}\frac{\exp\left[-(n'-n)^2/4n\right]}{\sqrt{4\pi n}}\int\frac{dk_z}{2\pi}G^{(0)}_n(k_z,-\omega)G^{(0)}_{n'}(k_z,\omega). \qquad (55)$$

В этом выражении расходящуюся сумму по частотам необходимо обрезать на частоте порядка ϵ_c — характерной толщине слоя вблизи фермиевской поверхности, внутри которого электроны испытывают притяжение. Наличие расходимости фактически означает, что основной вклад в (55) дают большие значения $\omega\sim\epsilon_c$. Следовательно, при вычислении первого слагаемого в (54) мы можем заменить суммирование по квантовым числам n и m интегрированием соответственно по $k_\perp^2=2m^*\omega_c n$ и $p_\perp^2=2m^*\omega_c n'$. Интегрирование выполним следующим образом: интеграл по $p_\perp$ заменим на интеграл по $\tilde{p}_\perp=p_\perp-k_\perp$ и от интегралов по k_z и $\vec{k}_\perp$ перейдем к интегралу по компонентам трехмерного вектора $\mathbf{k}=(\vec{k}_\perp,\ k_z)$ (ср. с (46)). Получаем

$$2\pi i\frac{\Delta^2|g|N_0}{\sqrt{2\pi}}\lambda T\sum_{\omega}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\frac{1}{\tilde{p}_\perp v_F\sin\theta-2i(|\omega|+\Gamma_{imp})}\exp\left(-\frac{\tilde{p}_\perp^2\lambda^2}{2}\right)d\tilde{p}_\perp. \qquad (56)$$

Подставляя фурье-образы для обоих множителей под знаком интеграла по $\tilde{p}_\perp$, находим

$$|g|N_0\Delta^2 2\pi T\sum_{\omega}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\frac{\lambda d\rho}{v_F}\exp\left[-\frac{(\rho\sin\theta)^2}{2}\right]\exp\left[-\frac{2(|\omega|+\Gamma_{imp})\lambda\rho}{v_F}\right]. \qquad (57)$$

Получившееся выражение, как и следовало ожидать, совпадает с квазиклассическим результатом. Далее, следуя стандартной процедуре [19], в пределе $T\to 0$ приходим к выражению для амплитуды параметра порядка Δ^2:

$$N_0\Delta^2\ln\sqrt{\frac{H_{c2}}{H}}=$$
$$=T\sum_{\omega}\sum_{\substack{n\,n\\ m\,m'}}\int\frac{dk_z}{2\pi}G^{(0)}_n(k_z,-\omega)G^{(0)}_m(k_z,\omega)G^{(0)}_{n'}(k_z,-\omega)G^{(0)}_{m'}(k_z,\omega)Y^{nn'}_{mm'}, \qquad (58)$$

где

$$Y^{nn'}_{mm'}=\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\Delta_{nm}(\vec{q})\Delta^*_{nm'}(\vec{q})\Delta_{n'm}(\vec{q})\Delta^*_{n'm'}(\vec{q}).$$

Мы учли, что входящие в $F^{(3)+}_{nn'}(k_z,\vec{q},\omega)$ два слагаемых, содержащих $\bar{G}^{(2)}_{ll'}$, после суммирования по частотам ω взаимно сокращаются. В пределе $\Gamma_{imp}\ll\omega_c$ оставим слагаемое, соответствующее $n=m=n'=m'$, а остальными пренебрежем как малыми в меру малости отношения Γ_{imp}/ω_c. Следовательно,

$$N_0\Delta^2\ln\left(\frac{H_{c2}}{H}\right)^{1/2}=T\sum_{\omega}\sum_{n}\int\frac{dk_z}{2\pi}\frac{1}{\left[(\omega+\Gamma_{imp})^2+\xi_n^2(k_z)\right]^2}Y^{nn}_{nn}. \qquad (59)$$

Интеграл Y_{nn}^{nn} перепишем в виде

$$Y_{nn}^{nn} = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \sum_{\vec{Q}} \sigma_n(\vec{Q})\sigma_n(-\vec{Q}), \tag{60}$$

и фурье-образы $\sigma_n(\vec{Q})$ определены как

$$\sigma_n(\vec{Q}) = 2\pi\lambda^2 \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}\vec{Q}} \Delta_{nn}(\vec{q})\Delta_{nn}^*(\vec{q}). \tag{61}$$

Векторы $\vec{Q} = (2aN_x,\ 2aN_y)$. Вычисление величины (61) выполнено в Приложении Г. Подставляя в (60) выражение для $\sigma_n(\vec{Q})$, находим

$$Y_{nn}^{nn} = \frac{\Delta^4}{2\pi\lambda^2}\Sigma_n, \tag{62}$$

где

$$\Sigma_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!n!}\right)^2 \sum_{N_x, N_y} \exp\left[-\pi(N_x^2+N_y^2)\right] L_{2n}^2\left(\pi(N_x^2+N_y^2)\right). \tag{63}$$

Здесь $L_n(s)$ — полиномы Лагерра.

Если в (63) вместо суммирования по N_x и N_y выполнить интегрирование, то значение интеграла будет равно единице для всех n. Сумма же зависит от числа n и принимает значения, примерно равные двум, с разбросом значений в десять процентов. Для дальнейших вычислений пренебрежем зависимостью суммы от n и положим ее значение равным некоторому числу $L \approx 2$. Отбрасывая, как обычно, осциллирующие слагаемые в ряде Пуассона, выполним в (59) интегрирование по $\xi_n(k_z)$. Суммирование по ω в пределе низких температур можно заменить интегрированием. Интеграл по углам θ расходится вблизи $\theta = 0$. Поскольку написанные выражения справедливы при $n_F \gg 1$, имеется естественный предел $\theta_c \approx 1/k_F\lambda$, на котором происходит обрезание. Окончательно находим

$$\Delta^2(H) \approx \frac{16\pi n_F}{L\ln n_F}\Gamma_{imp}^2 \frac{H_{c2}-H}{H_{c2}}, \tag{64}$$

где $n_F = \mu/\omega_c$. Здесь $\ln(H_{c2}/H)$ заменен разложением по разности $H_{c2} - H$.

Подчеркнем, что результат (63) справедлив при выполнении неравенств $T < \Gamma_{imp} \ll \omega_c$.

6. ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Плотность состояний $N(E)$ стандартным образом выражается через функцию Грина

$$N(E) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_l G_{ll}(E),$$
$$G_{ll'}(E) = G_l^{(0)}\delta_{ll'} + G_{ll'}^{(2)}. \tag{65}$$

Запишем в явном виде выражение для плотности состояний на единицу объема с точностью до первого порядка по Δ^2:

$$N(E) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\frac{1}{2\pi\lambda^2}\sum_n \int \frac{dk_z}{2\pi} G_n^{(0)}(k_z, E) - \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_n \int \frac{dk_z}{2\pi} G_n^{(0)2}(k_z, E) \times$$
$$\times \left(\overline{\bar{G}^{(2)}}_{nn}(E) - \frac{1}{2\pi\lambda^2}\Delta^2 \sum_{n'} \frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!} G_{n'}^{(0)}(k_z, -E) \right). \tag{66}$$

Первое слагаемое есть плотность состояний нормального металла. Видно, что поправка к плотности состояний выражается через величину $\overline{\bar{G}^{(2)}}(T)$, найденную в разд. 4.

Суммирование по номерам уровней Ландау проведем с помощью формулы Пуассона:

$$\sum_n \ldots = \sum_r \int dn e^{2\pi i r n} \ldots$$

и для плотности состояний получим выражение вида

$$N(E) = \sum_r N^{(r)}(E).$$

Слагаемому с $r = 0$ соответствует неосциллирующее «усредненное» значение плотности состояний $N^{(0)}(E)$. При вычислении этого слагаемого удобно перейти от интегрирования по n к интегрированию по координатам двумерного вектора $\vec{k}_\perp$, такого что $\vec{k}_\perp^2 = 2m\omega_c n$. Рассматривая $\vec{k}$ и k_z как составляющие трехмерного вектора $\mathbf{k}$, приходим к квазиклассическому интегрированию, которое выполняется заменой (46). Первое слагаемое в правой части (66), содержащее $\overline{\bar{G}^{(2)}}$, после интегрирования по ξ равно нулю. В последнем члене (66), как и при вычислениях (47) и (51), в случае $E < \Gamma_{imp} \ll \omega_c$, воспользовавшись соотношением (44), оставляя в сумме по n' только член[1)] с $n' = n$, выполняем интегрирование по ξ и θ. В результате находим

$$N^{(0)}(E) = N_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{n_F}} \frac{\Delta^2}{\Gamma_{imp}^2} \right). \tag{67}$$

Подставим значение Δ, определенное в (64):

$$N^{(0)}(E) = N_0 \left(1 - \frac{2\sqrt{\pi^3 n_F}}{L \ln n_F} \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} \right). \tag{68}$$

Из этого выражения находим область существования бесщелевой сверхпроводимости[2)]:

$$\frac{H_{c2} - H}{H_{c2}} < \frac{L \ln n_F}{2\pi^{3/2}\sqrt{n_F}}. \tag{69}$$

[1)] Именно в этом месте Стефен [9] выполняет интегрирование по n', что допустимо лишь при $\Gamma_{imp} > \omega_c$, т. е. вне области наблюдаемости эффекта де Гааза–ван Альфена.

[2)] Подавление плотности состояний может быть обнаружено экспериментально. Для этого нужно измерить зависимость теплоемкости от величины магнитного поля при достаточно низких температурах.

Рассмотрим теперь осциллирующие добавки к плотности состояний. Перейдем от интегрирования по n к интегрированию по $\xi_n(k_z) = \xi$. Интегрирование по ξ и k_z проводится независимо. При этом

$$\int \frac{dk_z}{2\pi} \exp\left(-2\pi i \frac{k_z^2}{2m\omega_c} r\right) = \frac{1}{2\pi\lambda\sqrt{r}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Для r-го члена ряда Пуассона ($r \neq 0$) получаем выражение

$$N^{(r)}(E) = \frac{\sqrt{m^3\omega_c}}{2\pi^2} \frac{(-1)^r}{\sqrt{r}} A_r(\Delta) \mathrm{Im} \exp\left[i\frac{2\pi r}{\omega_c}(E+\mu) - i\frac{\pi}{4}\right] \exp\left(-\frac{2\pi r \Gamma_{imp}}{\omega_c}\right), \tag{70}$$

где

$$A_r(\Delta) = \left(1 - \frac{\Delta^2}{\sqrt{4\pi n_F}} \frac{1}{4\Gamma_{imp}^2}\right). \tag{71}$$

При выводе (70) мы опустили слагаемые, малые в меру Γ_{imp}/ω_c. Таким образом, осциллирующая добавка к плотности состояний при переходе в сверхпроводящее состояние также оказывается подавленной по сравнению с ее значением в нормальном состоянии.

7. ОСЦИЛЛЯЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Термодинамический потенциал

$$\Omega = -2T \int dE N(E) \ln\left(1 + e^{-E/T}\right).$$

Интегрируя по частям, для r-й осциллирующей гармоники $\Omega^{(r)}$ имеем

$$\Omega^{(r)} = \frac{\sqrt{m^{*3}\omega_c^5}}{(2\pi^2)^2} \frac{(-1)^r}{r^{3/2}} A_r(\Delta) \cos\left(\frac{2\pi\mu}{\omega_c} r - \frac{\pi}{4}\right) \frac{2\pi^2 T/\omega_c}{\mathrm{sh}\left(2\pi^2 T r/\omega_c\right)} \exp\left(-\frac{2\pi r \Gamma_{imp}}{\omega_c}\right), \tag{72}$$

а множитель $A_r(\Delta)$ определен в (71). Отсюда осциллирующая часть намагниченности равна

$$M^{(r)} = -\frac{\partial \Omega^{(r)}}{\partial H} = \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{e}{c}\right)^{3/2} \sqrt{H} \mu \frac{(-1)^r}{r^{1/2}} A_r(\Delta) \times \\ \times \sin\left(\frac{2\pi r \mu}{\omega_c} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{2\pi^2 T/\omega_c}{\mathrm{sh}\left(2\pi^2 T r/\omega_c\right)} \exp\left(-\frac{2\pi r \Gamma_{imp}}{\omega_c}\right). \tag{73}$$

При вычислении $\partial\Omega^{(r)}(E)/\partial H$ достаточно продифференцировать только множитель $\exp(2i\pi r\mu/\omega_c)$. Заметим, что плотность состояний определяется через такие величины, как $\overline{\bar{G}^{(2)}}_{nn}(E)$ и Δ^2, которые в свою очередь также содержат быстроосциллирующие добавки. Тем не менее при дифференцировании плотности состояний по магнитному полю ими можно пренебречь, поскольку их вклад в значение производной от плотности состояний по сравнению с указанным выше вкладом оказывается того же порядка малости, что и величина осциллирующих поправок к $\overline{\bar{G}^{(2)}}$ и Δ^2 по сравнению с их средними значениями.

В отличие от нормального металла (см. (1)) ответ имеет дополнительный множитель $A_r(\Delta)$, соответствующий затуханию, которое приобретают квазичастицы за счет рассеяния на неоднородном распределении параметра порядка. Подставляя в (71) выражение (64), получим

$$A_r(H) = 1 - \frac{2\sqrt{\pi n_F}}{L \ln n_F} \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}. \tag{74}$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты данной работы напоминают результаты работ [8, 9]. В самом деле, в первом порядке по Δ^2 подавление амплитуды осцилляций намагниченности, найденное в работах [8, 9], пропорционально

$$1 - \frac{\pi^{3/2}\Delta^2}{\sqrt{\mu\omega_c^3}} = 1 - \alpha\sqrt{\frac{\mu}{\omega_c}} \frac{H_{c2} - H}{H_{c2}}, \tag{75}$$

α порядка единицы, что качественно совпадает с формулой (74). Заметим, однако, что в [8, 9] формула (75) получена в неявном предположении, что ширина уровней в нормальном состоянии превосходит расстояние между уровнями Ландау. Обсудим этот вопрос несколько подробнее.

Рассмотрим выражения для параметра порядка, получающиеся при различных соотношениях между величинами T, Γ_{imp} и ω_c. Стефеном [9] было показано, что в пределе слабых полей $\sqrt{\mu\omega_c} < T$ амплитуда параметра порядка имеет вид

$$\Delta^2(H) \propto T_c^2 \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right). \tag{76}$$

Поскольку рассеяние на примесях размывает уровни подобно температуре, то к слабым полям можно также отнести и поля, при которых $\sqrt{\mu\omega_c} < \Gamma_{imp}$. В таких полях амплитуда параметра порядка определяется уравнением (76). В области промежуточных полей, когда $\sqrt{\mu\omega_c} > T, \Gamma_{imp}$, но все же $\omega_c < T, \Gamma_{imp}$, дискретная структура спектра несущественна и величина параметра порядка принимает вид

$$\Delta^2(H) \propto \mu\omega_c \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right). \tag{77}$$

В работе [9] подразумевается, что результат (77) справедлив и в пределе сильных полей, где наблюдаются осцилляции намагниченности. В настоящей работе показано (см. (64)), что в области сильных полей ($\omega_c \gg \Gamma_{imp} > T$) параметр порядка определяется выражением

$$\Delta^2 \propto \mu\omega_c F\left(\frac{\Gamma_{imp}}{\omega_c}\right)\left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right),$$

где, согласно (64), $F(x) = x^2$ при $x \ll 1$. Вид функции $F(x)$ при произвольном x можно установить из уравнения (58). С ростом x функция $F(x)$ растет и при $x \sim 1$ достигает постоянного значения порядка единицы. Так осуществляется переход к результату

Стефена (77). Подобные характерные области магнитных полей имеются и при вычислении функции Грина электронов в сверхпроводящем состоянии (см. сноску 1).

Отметим также, что указанный в работах [8, 9] экспоненциальный закон подавления плотности состояний выходит за пределы точности теории. Дело в том, что вычисления в этих работах выполнены в пренебрежении точной пространственной структурой параметра порядка, что справедливо только тогда, когда рассматриваются члены не выше первой степени по Δ^2. При произвольных Δ^2 указанное упрощение достигается благодаря процедуре усреднения по случайному расположению вихрей [9], для обоснования которой приведен ряд недостаточно убедительных соображений. Кроме того, при вычислениях более высоких порядков по Δ^2 необходимо решать и уравнение самосогласования с той же степенью точности.

Сформулируем еще раз основные выводы. Условие

$$T < \Gamma_{imp} \ll \omega_c, \tag{78}$$

при выполнении которого получены результаты настоящей работы, в частности означает высокую степень чистоты сверхпроводника:

$$l_{imp} \gg k_F \lambda^2.$$

Тем не менее наличие даже столь малого количества примесей приводит к формированию вблизи H_{c2} бесщелевого сверхпроводящего состояния. Область его существования (69) в обычных сверхпроводниках II рода, где число уровней Ландау $n_F = \mu/\omega_c$, укладывающихся под уровнем Ферми, огромно, сводится к ничтожно узкой окрестности верхнего критического поля. Однако в сверхпроводниках с малыми значениями энергии Ферми и большими значениями H_{c2} n_F не столь велико. Так, в V_3Si [3] величина n_F оказывается порядка нескольких десятков и интервал магнитных полей $H_{c2} - H$, где существует бесщелевая сверхпроводимость, может составлять десятые доли H_{c2}. В этой области сохраняется квантование Ландау и, следовательно, имеется осциллирующий в магнитном поле вклад в намагниченность образца, амплитуда которого (73) достаточно быстро убывает с уменьшением поля.

Авторы благодарны А. И. Ларкину за обсуждение результатов работы, а также М. И. Каганову и Л. А. Фальковскому, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки Российской Федерации (Программа «Статфизика»), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-0216041).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычислим матричный элемент параметра порядка $\Delta_{ll'}$, определяемого выражением (32), в представлении магнитных решеток (34). Напишем явное выражение для $\Delta_{ll'}$:

$$\Delta_{ll'} = \Delta \frac{a}{\lambda} \int d\mathbf{r} e^{-i(k_z + k_z')z} \sum_{\nu, \nu', \mu} \exp(iq_x a\nu) \exp(iq_x' a\nu') \exp\left[-i\left(q_y + \frac{\pi\nu}{a} y\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-i\left(q_y' + \frac{\pi\nu'}{a}\right) y\right] \exp\left(\frac{2\pi i\mu y}{a}\right) \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda} + \left(q_y + \frac{\pi\nu}{a}\right)\lambda\right) \times$$
$$\times \varphi_{n'}\left(\frac{x}{\lambda} + \left(q_y' + \frac{\pi\nu'}{a}\right)\lambda\right) \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi\mu}{a}\lambda\right)^2\right). \tag{79}$$

Интегрирование выполняется по каждой координате отдельно:

$$\int dz \exp\left[-i(k_z + k_z')z\right] = 2\pi\delta(k_z + k_z'), \tag{80}$$

$$\int dy \exp\left[-i\left(q_y + \frac{\pi\nu}{a}\right)y\right] \exp\left[-i\left(q_y' + \frac{\pi\nu'}{a}\right)y\right] \exp\left(\frac{2\pi i\mu y}{a}\right) = \\ = 2\pi\delta(q_y + q_y')\delta_{\nu+\nu',2\mu}. \tag{81}$$

Здесь мы учли тот факт, что $\vec{q}$ и $\vec{q}\,'$ — векторы первой зоны Бриллюэна. Поскольку сумма $\nu + \nu' = \mu$ — четное число, то и разность $\nu - \nu'$ тоже является четным числом.

В интеграле по координате x сделаем замену переменной:

$$\frac{\tilde{x}}{\lambda} = \frac{x}{\lambda} + \frac{\pi\mu}{a}\lambda.$$

Воспользовавшись тем, что $\nu+\nu' = 2\mu$, можно переписать подынтегральное выражение в виде, содержащем только разность $\nu-\nu'$, которую мы обозначим через 2κ, κ — целое. Перейдем от суммирования по ν, ν' и μ, с учетом δ-символа Кронекера, к сумме по μ и κ и выполним суммирование по μ. Поскольку

$$\exp(iq_x a\nu)\exp(iq_x' a\nu') = \exp\left[\frac{i(q_x + q_x')(\nu+\nu')a}{2}\right] \exp\left[\frac{i(q_x - q_x')(\nu-\nu')a}{2}\right],$$

а интеграл по x не зависит от μ, имеем

$$\sum_\mu \exp\left[i(q_x + q_x')\mu a\right] = \frac{2\pi}{a}\delta(q_x + q_x'), \tag{82}$$

где q_x и q_x' — компоненты вектора первой зоны Бриллюэна. Осталось выполнить интегрирование по координате x. Введем обозначение $p = (q_y + \pi\kappa/a)\lambda$. Интеграл имеет вид

$$\lambda \int ds\, e^{-s^2}\varphi_n(s+p)\varphi_{n'}(s-p).$$

Используя явный вид функций $\varphi_n(s)$ (35), придем к следующему интегралу

$$(-1)^{n+n'}e^{p^2}\int ds \left(\frac{d^n}{ds^n}e^{-(s+p)^2}\right)\left(\frac{d^{n'}}{ds^{n'}}e^{-(s-p)^2}\right).$$

Здесь мы опустили нормировочные коэффициенты функций $\varphi_n(s)$. С помощью равенства

$$e^{-s^2} = \sqrt{\pi}\int \frac{d\xi}{2\pi}e^{i\xi s}e^{-\xi^2/4},$$

интеграл можно преобразовать:

$$(-1)^n\pi e^{-p^2}\int \frac{d\xi}{2\pi}(i\xi)^{n+n'}e^{2i\xi p}e^{-\xi^2/2}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, приходим к

$$(-1)^{n'}\sqrt{\frac{\pi}{2^{n+n'+1}}}e^{-p^2}H_{n+n'}(\sqrt{2}p). \tag{83}$$

Выражения (80), (81) и (82) дают возможность матричный элемент параметра порядка представить в виде (39). Собирая все множители вместе и используя (83), приходим к (40).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

При выводе выражения (41) требуется вычислить интеграл

$$\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\phi^*_{nk_z\vec{q}}(\mathbf{r})\phi^*_{n',-k_z,-\vec{q}}(\mathbf{r})\Delta^*_{nn'}(\vec{q}) = \sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}}\Delta\frac{a}{\lambda}\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\times$$
$$\times\sum_{\nu,\nu',\kappa}\exp\left[iq_xa(\nu-\nu')\right]\exp\left[-i\left(q_y+\frac{\pi\nu}{a}\right)y\right]\exp\left[-i\left(-q_y+\frac{\pi\nu'}{a}\right)y\right]\exp(-2i\kappa q_xa)\times$$
$$\times\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}+\left(q_y+\frac{\pi\nu}{a}\right)\lambda\right)\varphi_{n'}\left(\frac{x}{\lambda}+\left(-q_y+\frac{\pi\nu'}{a}\right)\lambda\right)\varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda+\frac{\pi\kappa\lambda}{a}\right)\right). \tag{84}$$

Интегрирование по q_x тривиально:

$$\int\limits_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{dq_x}{2\pi}\exp\left[iq_xa(\nu-\nu'-2\kappa)\right] = \frac{1}{a}\delta_{\nu-\nu',2\kappa}.$$

При вычислении интеграла по q_y воспользуемся равенством $\nu-\nu'=2\kappa$, перейдем от суммирования по ν, ν' и κ к суммированию по $\nu-\nu'=2\kappa$ и $\nu+\nu'=2\mu$ и перегруппируем слагаемые в аргументах функций $\varphi_n(s)$ так, чтобы получить следующее выражение:

$$(-1)^{n'}\sqrt{\sqrt{2\pi}\frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}}\frac{1}{\lambda}\sum_\kappa\int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a}\frac{dq_y}{2\pi}\sum_\mu\exp\left(-\frac{2\pi i\mu y}{a}\right)\varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}q_y\lambda+\frac{\pi\kappa\lambda}{a}\right)\times$$
$$\times\varphi_n\left(q_y\lambda+\frac{\pi\kappa\lambda}{a}+\xi\right)\varphi_{n'}\left(q_y\lambda+\frac{\pi\kappa\lambda}{a}-\xi\right),$$

где $\xi = x/\lambda+\pi\mu\lambda/a$. Заметим, что

$$\sum_\kappa\int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a}\frac{dq_y}{2\pi}f\left(q_y\lambda+\frac{\pi\kappa\lambda}{a}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_y}{2\pi}f(q_y\lambda), \tag{85}$$

и подставим в подынтегральное выражение функции $\varphi_n(s)$ из (35). Кроме того, воспользуемся явным выражением для полинома Эрмита $H_{n+n'}(\sqrt{2}s)$ (см. (36)). Опуская множители, приведем вид получающегося интеграла:

$$\int dsH_n(s+\xi)H_{n'}(s-\xi)\frac{d^{n+n'}}{ds^{n+n'}}e^{-s^2}.$$

Интегрируя по частям $n + n'$ раз и учитывая, что

$$\frac{d^{n+n'}}{ds^{n+n'}} H_n(s+\xi)H_{n'}(s-\xi) = 2^{n+n'}(n+n')!,$$

приходим к интегралу $\int ds \exp(-s^2) = \sqrt{2}$. Окончательно находим

$$\int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \phi^*_{nk_z\vec{q}}(\mathbf{r})\phi^*_{n',-k_z,-\vec{q}}(\mathbf{r})\Delta^*_{nn'}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\lambda^2} \frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!} \Delta^*(\mathbf{r}), \tag{86}$$

где $\Delta(\mathbf{r})$ дается формулой (32).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

При выводе (49) необходимо вычислить интеграл:

$$I = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \Delta_{nn'}(\vec{q})\Delta^*_{nn'}(\vec{q}).$$

Подставим матричный элемент параметра порядка в виде (40):

$$I = \sqrt{2\pi}\Delta^2 \frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!} \sum_{\nu,\nu'} \int\limits_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dq_x}{2\pi} \exp\left[2iq_x(\nu-\nu')a\right] \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \frac{dq_y}{2\pi} \varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right) \varphi_{n+n'}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu'}{a}\right)\right).$$

Выполним интегрирование по q_x. Получим, что $\nu' = \nu$, и тогда

$$I = \sqrt{2\pi}\Delta^2 \frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!} \sum_{\nu} \int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \frac{dq_y}{2\pi a} \varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{2a}\right)\right) \varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right).$$

Воспользовавшись (85), находим

$$I = \frac{\Delta^2}{2\pi\lambda^2} \frac{(n+n')!}{2^{n+n'+1}n!n'!}. \tag{87}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Выполним преобразование Фурье в выражении (61). Подставим в (61) матричный элемент параметра порядка в виде (40):

$$\sigma_n(\vec{Q}) = \sqrt{2\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!^2} \sum_{\nu,\nu'} \int\limits_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dq_x}{2\pi} \exp\left[2iq_x(N_x+\nu-\nu')a\right] \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \frac{dq_y}{2\pi} \exp(2iN_yq_ya)\varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a}\right)\right) \varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu'}{a}\right)\right). \tag{88}$$

Здесь мы положили $\vec{Q} = (2aN_x, 2aN_y)$. Выполним интегрирование по q_x. Получим, что $\nu' - \nu = N_x$, и тогда

$$\sigma_n(\vec{Q}) = \sqrt{2\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!^2}\sum_\nu \int\limits_{-\pi/2a}^{\pi/2a} \frac{dq_y}{2\pi a}\exp(2iN_yq_ya)\varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{2a}\right)\right) \times$$
$$\times \varphi_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda\nu}{a} + \frac{\pi\lambda N_x}{a}\right)\right).$$

Воспользуемся (85), а затем в интеграле по q_y сделаем замену переменной

$$\tilde{q}_y\lambda = q_y\lambda + \frac{\pi\lambda N_x}{2a}.$$

Приходим к

$$\sigma_n(\vec{Q}) = \frac{\sqrt{2}}{2^{4n}n!^2}\frac{1}{2a\lambda}\exp(-i\pi N_xN_y)\exp\left(-\frac{\pi N_x^2}{2}\right)\int\frac{dq_y}{2\pi a}\exp(2iN_yq_ya)\exp(-2q_y^2\lambda^2)\times$$
$$\times H_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda - \frac{\pi\lambda N_x}{2a}\right)\right)H_{2n}\left(\sqrt{2}\left(q_y\lambda + \frac{\pi\lambda N_x}{2a}\right)\right).$$

Входящий в правую часть этого выражения интеграл вычислен в работе [17]. Окончательно находим

$$\sigma_n(\vec{Q}) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!^2}\frac{\exp(-i\pi N_xN_y)}{2\pi\lambda^2}\exp\left[-\frac{\pi}{2}(N_x^2+N_y^2)\right]L_{2n}\left(\pi(N_x^2+N_y^2)\right), \qquad (89)$$

$L_n(s)$ — полиномы Лагерра.

Литература

1. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ЖЭТФ **29**, 730 (1955).
2. Ю. А. Бычков, ЖЭТФ **39**, 1401 (1961).
3. R. Corcoran, N. Harrison, S. M. Hayden, P. Meeson, M. Springford, and P. J. van der Wel, Phys. Rev. Lett. **72**, 701 (1994).
4. N. Harrison, S. M. Hayden, P. Meeson, M. Springford, P. J. van der Wel, and A. A. Menovsky, Phys. Rev. B **50**, 4208 (1994).
5. G. Goll, M. Heinecke, A. J. M. Jansen, W. Joss, L. Nguyen, E. Steep, K. Winzer, and P. Wyber, Phys. Rev. B **53**, 8871 (1996).
6. R. Corcoran, N. Harrison, C. J. Haworth et. al., Physica B **206-207**, 534 (1995).
7. M. Springford and A. Wasserman, J. Low Temp. Phys. **105**, 273 (1996).
8. K. Maki, Phys. Rev. B **44**, 2861 (1991).
9. M. J. Stephen, Phys. Rev. B **45**, 5481 (1992).
10. U. Brandt, W. Pesch, and L. Tewordt, Z. Physik. **201**, 209 (1967).
11. S. Dukan and Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. **74**, 2311 (1995).
12. P. Miller and B. L. Györffy, J. Phys.: Cond. Matt. **7**, 5579 (1995).
13. K. Miyake, Physica B **186–188**, 115 (1993).
14. M. Rasolt and Z. Tesanovich, Rev. Mod. Phys. **64**, 709 (1992).
15. V. M. Yakovenko, Phys. Rev. B **47**, 8851 (1993).
16. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, М. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1960).
17. Ю. А. Бычков, Е. И. Рашба, ЖЭТФ **85**, 1826 (1983).
18. L. W. Gruenberg and L. Günther, Phys. Rev. **176**, 606 (1968).
19. E. Helfand and N. R. Werthamer, Phys. Rev. **147**, 288 (1966).