РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД
МОСКВА

ТОМ 112, ВЫПУСК 6(12)
ДЕКАБРЬ, 1997
«НАУКА»

РАСЩЕПЛЕНИЕ ФОТОНА ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 1997 г.

Точно по параметру $Z\alpha$ найдены спиральные амплитуды процесса расщепления фотона большой энергии во внешнем кулоновском поле. Исследуются случаи экранированного и неэкранированного потенциалов. Рассмотрение проводится в рамках квазиклассического подхода, справедливого для малых углов между импульсами всех фотонов. Используется новое представление для квазиклассической функции Грина электрона. Проводится детальный анализ полученных выражений для случая больших по сравнению с массой электрона поперечных компонент импульсов конечных фотонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что рождение виртуальной электрон-позитронной пары приводит к возникновению во внешнем кулоновском поле таких нелинейных эффектов квантовой электродинамики, как дельбрюковское рассеяние (когерентное рассеяние фотона [1]) и расщепление фотона на два. В настоящее время процесс дельбрюковского рассеяния детально изучен и теоретически, и экспериментально (см. недавний обзор [2]). При больших энергиях фотона, $\omega \gg m$ (m — масса электрона, $\hbar = c = 1$), амплитуда рассеяния фотона найдена точно по параметру $Z\alpha$ ($Z|e|$ — заряд ядра, $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, e — заряд электрона). При этом использованные подходы существенно зависели от передачи импульса $\Delta = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|$ ($\mathbf{k}_1$ — импульс начального фотона, $\mathbf{k}_2$ — импульс конечного фотона). Основной вклад в полное сечение дельбрюковского рассеяния при большой энергии фотона дает область малых передач импульса

$\Delta \ll \omega$ (угол рассеяния $\theta \sim \Delta/\omega \ll 1$). В этом случае амплитуды были найдены в [3–5] посредством суммирования в определенном приближении диаграмм теории возмущений по взаимодействию с кулоновским полем и в [6, 7] с помощью квазиклассического подхода. Оказалось, что при $\omega \gg m$ и $Z\alpha \sim 1$ точный по $Z\alpha$ результат существенно отличается от полученного в низшем порядке теории возмущений.

Возможность использования квазиклассического приближения связана с тем, что в соответствии с соотношением неопределенности характерный прицельный параметр ρ является величиной порядка $1/\Delta$ и угловой момент $l \sim \omega\rho \sim \omega/\Delta$ много больше единицы при малых углах рассеяния. Это обстоятельство было использовано в работах [6, 7], где получена квазиклассическая функция Грина из удобного интегрального представления для точной функции Грина уравнения Дирака в кулоновском поле [8]. В [9, 10] была найдена квазиклассическая функция Грина электрона для произвольного центрально-симметричного убывающего потенциала, что позволило вычислить амплитуды дельбрюковского рассеяния в экранированном кулоновском потенциале.

Процесс расщепления фотона в кулоновском поле ядра до сих пор не наблюдался, хотя некоторые события в эксперименте, выполненном в DESY [11], ошибочно интерпретировались как расщепление фотона. В работе [12] было показано, что эти события соответствовали рождению электрон-позитронной пары и жесткого фотона. Возможная схема проведения эксперимента обсуждалась в [13]. Теоретически расщепление фотона изучалось в работах [14–18] в низшем по $Z\alpha$ порядке теории возмущений. Полученные в [14, 15] выражения являются очень громоздкими, и их сложно использовать для численных расчетов. Тем не менее такие расчеты были проведены в [17, 18]. В работе [16] амплитуды процесса были получены в существенно более простом виде, но с логарифмической точностью (с помощью метода эквивалентных фотонов). Проведенное в [17] сравнение точного борновского сечения с приближенным результатом [16] показало, что в рассматриваемой области энергий максимальное различие достигает 20%. Величина кулоновских поправок в процессе расщепления фотона до сих пор была неизвестной. В настоящее время в Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН проводится эксперимент по наблюдению расщепления фотона большой энергии ($\omega \gg m$) в кулоновском поле тяжелых ядер. Поэтому теоретическое исследование этого процесса представляет несомненный интерес.

В настоящей работе амплитуда расщепления фотона высокой энергии вычисляется точно по параметру $Z\alpha$ при малых углах f_2 и f_3 между импульсами $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ конечных фотонов и импульсом $\mathbf{k}_1$ начального фотона. Именно область малых углов дает основной вклад в полное сечение процесса. Кроме того, малые углы и большие энергии фотонов позволяют использовать квазиклассический подход, развитый в [6, 7, 9, 10] при рассмотрении дельбрюковского рассеяния. Мы обсуждаем случай неэкранированного кулоновского потенциала, а также влияние экранировки. Начальное выражение для амплитуды расщепления фотона является весьма сложным и содержит с учетом параметризации функций Грина в кулоновском поле тринадцатикратный интеграл. Квазиклассический подход дает ясную картину процесса и позволяет определить область интегрирования, соответствующую основному вкладу в амплитуду. Без этого вычисление амплитуды, по-видимому, было бы невозможно.

Наша статья имеет следующую структуру. В разд. 2 мы проводим преобразование точной амплитуды, которое существенно упрощает дальнейшие вычисления. В разд. 3 обсуждается кинематика процесса. В разд. 4 выводится квазиклассическая функция Грина в приближении малых углов. В разд. 5 эта функция Грина используется для вычисления амплитуды расщепления фотона. В разд. 6 мы рассматриваем случай больших поперечных компонент импульсов конечных фотонов ($\omega_2 f_2 \gg m$, $\omega_3 f_3 \gg m$). Асимптотики полученного результата при малых передачах импульса и при $Z\alpha \ll 1$ обсуждаются в разд. 7 и 8. В заключительном разделе точные борновские сечения сравниваются с сечениями, полученными с помощью метода эквивалентных фотонов (метод Вейцзекера–Вильямса).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА

Согласно правилам Фейнмана, в представлении Фарри амплитуда расщепления фотона имеет вид

$$M = ie^3 \int d^4x \mathrm{Tr}\langle x|\hat{e}_1 \exp(-ik_1x)\mathscr{G}\hat{e}_2^* \exp(ik_2x)\mathscr{G}\hat{e}_3^* \exp(ik_3x)\mathscr{G}|x\rangle + \\ + \{k_2^\mu \leftrightarrow k_3^\mu,\, e_2^\mu \leftrightarrow e_3^\mu\}. \tag{1}$$

Здесь e_1^μ и $e_{2,3}^\mu$ — векторы поляризаций начального и конечных фотонов, $\hat{e} = e^\mu\gamma_\mu = -\mathbf{e}\boldsymbol{\gamma}$, γ^μ — матрицы Дирака, $\mathscr{G} = 1/(\hat{\mathscr{P}} - m + i0)$, и $\mathscr{P}_\mu = i\partial_\mu + g_{\mu 0}(Z\alpha/r)$. Матричный элемент оператора $\mathscr{G}$ является функцией Грина уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле: $G(x,x') = \langle x|\mathscr{G}|x'\rangle$.

Удобно переписать выражение (1) в виде, содержащем только функции Грина квадрированного уравнения Дирака:

$$D(x,x') = \langle x|\mathscr{D}|x'\rangle = \langle x|1/(\hat{\mathscr{P}}^2 - m^2 + i0)|x'\rangle.$$

Для этого представим в (1) левый оператор $\mathscr{G}$ в виде $\mathscr{G} = \mathscr{D}(\hat{\mathscr{P}} + m)$ и используем коммутационное соотношение

$$(\hat{\mathscr{P}} + m)\hat{e}\exp(ikx) = \exp(ikx)[-\hat{e}\,\mathscr{G}^{-1} + \hat{e}\hat{k} - 2\mathbf{ep}], \quad \mathbf{p} = -i\nabla.$$

Проведем теперь такое же преобразование для правого оператора $\mathscr{G}$ в (1) и возьмем полусумму полученных выражений. С учетом того, что для произвольных операторов A_1 и A_2 выполняется равенство

$$\int dx\,\mathrm{Tr}\langle x|A_1A_2|x\rangle = \int dx\,\mathrm{Tr}\langle x|A_2A_1|x\rangle,$$

получаем

$$M = ie^3\int d^4x \mathrm{Tr}\left\{\left[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* \exp[i(k_2-k_1)x]\,\langle x|\mathscr{D}\exp(ik_3x)(\hat{e}_3^*\hat{k}_3 - 2\mathbf{e}_3^*\mathbf{p})\mathscr{D}|x\rangle + \right.\right. \\ + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^*\exp[i(k_3-k_1)x]\,\langle x|\mathscr{D}\exp(ik_2x)(\hat{e}_2^*\hat{k}_2 - 2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p})\mathscr{D}|x\rangle + \\ \left. + \mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*\exp[-i(k_2+k_3)x]\,\langle x|\mathscr{D}\exp(-ik_1x)(-\hat{e}_1\hat{k}_1 - 2\mathbf{e}_1\mathbf{p})\mathscr{D}|x\rangle\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\langle x|\exp(-ik_1x)(-\hat{e}_1\hat{k}_1 - 2\mathbf{e}_1\mathbf{p})\mathscr{D}\exp(ik_2x)(\hat{e}_2^*\hat{k}_2 - 2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p})\,\times\right. \\ \left.\left.\times\,\mathscr{D}\exp(ik_3x)(\hat{e}_3^*\hat{k}_3 - 2\mathbf{e}_3^*\mathbf{p})\mathscr{D}|x\rangle + (2\leftrightarrow 3)\right]\right\}. \tag{2}$$

Таким образом, представление (2) является суммой вкладов, содержащих две и три функции Грина: $M = M^{(2)} + M^{(3)}$. Амплитуда, записанная в виде (1), содержит члены

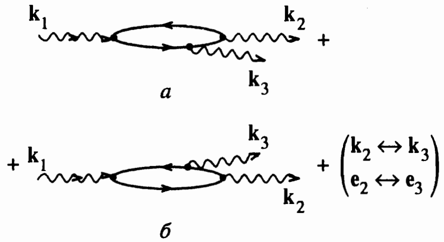

Рис. 1. Диаграммы теории возмущений, соответствующие амплитуде $M^{(3)}$ (3)

различного порядка величины. При этом возникает необходимость учитывать компенсацию старших членов. Удобство формулы (2) состоит в том, что после взятия следа матриц выражение содержит только члены необходимого порядка.

Переходя в (2) от зависящей от времени функции Грина к зависящей от энергии функции Грина, беря интеграл по времени и опуская стандартный множитель $2\pi\delta(\omega_1 - -\omega_2 - \omega_3)$, для вклада, содержащего три функции Грина, получаем

$$M^{(3)} = \frac{i}{2}e^3 \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \exp\left[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_3\mathbf{r}_3)\right] \times$$
$$\times \operatorname{Tr}\left\{ [(-\hat{e}_1\hat{k}_1 - 2\mathbf{e}_1\mathbf{p})D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\,|\varepsilon - \omega_2)][(\hat{e}_2^*\hat{k}_2 - 2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p})D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\,|\varepsilon)] \times \right.$$
$$\left. \times [(\hat{e}_3^*\hat{k}_3 - 2\mathbf{e}_3^*\mathbf{p})D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1\,|\varepsilon + \omega_3)] \right\} + (k_2^\mu \leftrightarrow k_3^\mu,\ \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_3). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{p} = -i\nabla$ дифференцирует соответствующую функции Грина D квадрированного уравнения Дирака по первому аргументу.

Далее будем называть функцию Грина $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\,|\varepsilon)$ с положительной энергией ε электронной функцией Грина, а с отрицательной энергией — позитронной функцией Грина. Пусть начальный фотон распространяется вдоль оси z. Тогда в соответствии с квазиклассическим подходом, развитым в [6, 7, 9, 10], при высоких энергиях основной вклад в амплитуду дает область интегрирования по переменным z_i, такая что $z' < z$ для электронной функции Грина $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon)$ и $z' > z$ для позитронной функции Грина. На языке нековариантной теории возмущений это соответствует тому, что в указанной области интегрирования разница между энергией E_n любого промежуточного состояния и энергией начального состояния $E_0 = \omega_1$ мала по сравнению с E_0. Во всех остальных случаях по крайней мере одно из промежуточных состояний имеет $|E_n - E_0| \sim E_0$ и соответствующий вклад в амплитуду подавлен. Кроме того, существует еще одно ограничение для области интегрирования, дающей основной вклад в амплитуду. Оно связано со свойствами квазиклассической функции Грина и имеет вид

$$z_1 < z_2, z_3, \quad z_1 < 0, \quad \max(z_2, z_3) > 0.$$

Все указанные неравенства позволяют изобразить главный вклад в амплитуду $M^{(3)}$ в виде диаграмм, показанных на рис. 1. Выражения для вершин очевидны из формулы (3). На рис. 1 электронные функции Грина показаны стрелками, идущими слева направо, а позитронные функции Грина — справа налево. Расположение всех вершин на этих диаграммах является пространственно упорядоченным. Пользуясь рисунком, легко написать пределы интегрирования по энергии и координатам. В результате диаграммам *а* и *б* на рис. 1 отвечает следующая картина. Фотон с импульсом $\mathbf{k}_1$ рождает в

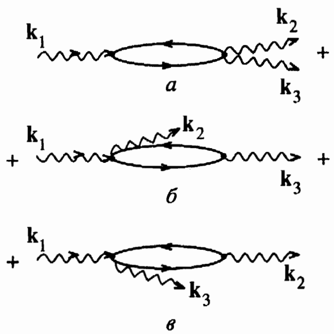

Рис. 2. Диаграммы теории возмущений, соответствующие амплитуде $M^{(2)}$ (4)

точке $\mathbf{r}_1$ пару виртуальных частиц, которая в точке $\mathbf{r}_2$ превращается в фотон с импульсом $\mathbf{k}_2$. Между этими двумя событиями фотон с импульсом k_3 излучается в точке r_3 электроном (*а*) или позитроном (*б*).

Аналогично выражение для вклада $M^{(2)}$, содержащего две функции Грина, имеет вид

$$M^{(2)} = ie^3 \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \,\mathrm{Tr}\Big\{ \exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_3\mathbf{r}_2)]\, \mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^* \times$$
$$\times [(-\hat{e}_1\hat{k}_1 - 2\mathbf{e}_1\mathbf{p})D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\,|\varepsilon-\omega_1)\, D(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1\,|\varepsilon)] + \Big[\exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_3\mathbf{r}_1)]\, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^* \times$$
$$\times D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\,|\varepsilon-\omega_2)\, [(\hat{e}_2^*\hat{k}_2 - 2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p})D(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1\,|\varepsilon)] + (k_2^\mu \leftrightarrow k_3^\mu,\ \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_3)\Big]\Big\}. \quad (4)$$

Диаграммы, соответствующие представлению амплитуды (4), показаны на рис. 2.

3. КИНЕМАТИКА ПРОЦЕССА

Время жизни виртуальной электрон-позитронной пары (длину петли) можно оценить из соотношения неопределенности: $\tau \sim |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim \omega_1/(m^2 + \tilde{\Delta}^2)$, где $\tilde{\Delta} = \max(|\mathbf{k}_{2\perp}|, |\mathbf{k}_{3\perp}|) \ll \omega_1$, $\mathbf{k}_{2\perp}$ и $\mathbf{k}_{3\perp}$ — перпендикулярные $\mathbf{k}_1$ компоненты импульсов конечных фотонов. Характерное поперечное расстояние между виртуальными частицами можно оценить как $(m^2+\tilde{\Delta}^2)^{-1/2}$. Видно, что длина электрон-позитронной петли много больше ее поперечных размеров. Характерный прицельный параметр равен $\rho \sim 1/\Delta$, где передача импульса $\mathbf{\Delta} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$. При малых $\mathbf{k}_{2\perp}$ и $\mathbf{k}_{3\perp}$ ($f_{2,3} \ll 1$) имеем

$$\mathbf{\Delta}^2 = (\mathbf{k}_{2\perp} + \mathbf{k}_{3\perp})^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2}{\omega_2} + \frac{\mathbf{k}_{3\perp}^2}{\omega_3}\right)^2. \quad (5)$$

Характерный орбитальный момент $l \sim \omega/\Delta$ много больше единицы, и справедливо квазиклассическое приближение.

Рассмотрим экранированный кулоновский потенциал. В модели Томаса–Ферми радиус экранировки равен $r_c \sim (m\alpha)^{-1}Z^{-1/3}$. Если $R \ll 1/\Delta \ll r_c$ (R — радиус ядра), то экранировка несущественна и амплитуда совпадает с амплитудой в кулоновском поле. Если $1/\Delta \sim r_c$, то необходимо учитывать экранировку. Ясно, что прицельные параметры $\rho \gg r_c$ не дают вклада в полное сечение. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только область передач импульсов, которая соответствует прицельным параметрам $\rho \leq r_c$. Если $|\Delta_\parallel| = (\mathbf{k}_{2\perp}^2/\omega_2 + \mathbf{k}_{3\perp}^2/\omega_3)/2 \ll r_c^{-1}$, то из (5) следует, что условие $\rho \leq r_c$ выполняется только при $|\Delta_\perp| = |\mathbf{k}_{2\perp} + \mathbf{k}_{3\perp}| \geq r_c^{-1}$. Таким образом, основной вклад в сечение дает ограниченная снизу область поперечных импульсов $\Delta_\perp$. В этой области $|\Delta_\perp| \gg |\Delta_\parallel|$, т. е. $\Delta \approx \Delta_\perp$. Кроме того, при $\omega/(m^2 + \tilde{\Delta}^2) \gg r_c$ углы между векторами $\mathbf{k}_{1,2,3}$ и $\mathbf{r}_{1,2,3}$ или малы, или близки к π, $|z_i| \gg r_c$ и можно воспользоваться соответствующим разложением.

Согласно теореме Фарри, в процессе расщепления фотона происходит обмен нечетным числом квантов с источником внешнего поля, т. е. амплитуда нечетна по параметру $Z\alpha$. Область очень маленьких передач импульса $\Delta \leq r_c^{-1}$ существенна только в низшем (линейном по $Z\alpha$) порядке теории возмущений за счет сингулярного поведения кулоновского потенциала в импульсном представлении $(-4\pi Z\alpha/\Delta^2)$. В этом порядке применим метод эквивалентных фотонов, и в сечении, проинтегрированном по углам одного из конечных фотонов, возникает соответствующий большой логарифм [16]. В высших порядках теории возмущений по $Z\alpha$ необходимо взять интеграл по всем импульсам, соответствующим внешнему полю, при условии, что сумма этих импульсов равна $\mathbf{\Delta}$. Поэтому, даже если $\Delta \sim r_c^{-1}$, каждый из импульсов внешнего поля не является малым и экранировкой можно пренебречь. В низшем порядке теории возмущений экранировку можно учесть, умножив амплитуду на $1 - F(\Delta^2)$, где $F(\Delta^2)$ — формфактор атомных электронов. Таким образом, для того чтобы найти амплитуду расщепления фотона в случае экранированного кулоновского потенциала, достаточно решить задачу для неэкранированного кулоновского потенциала.

4. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Перейдем теперь к рассмотрению функции Грина $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon)$, входящей в (3) и (4). В работах [9, 10] с использованием квазиклассического приближения было найдено представление этой функции для произвольного центрально-симметричного убывающего потенциала. В случае кулоновского потенциала при малом угле θ между векторами $\mathbf{r}$ и $-\mathbf{r}'$ из формулы (14) работы [9] получаем

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\,\varepsilon) = \frac{i\exp\left[i\kappa(r+r')\right]}{4\pi\kappa r r'} \int\limits_0^\infty dl\, l \left[J_0(l\theta) + iZ\alpha\frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{n}+\mathbf{n}')}{l\theta}J_1(l\theta)\right] \times \\ \times \exp\left[i\frac{l^2(r+r')}{2\kappa r r'}\right]\left(\frac{4\kappa^2 r r'}{l^2}\right)^{iZ\alpha\lambda}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\kappa^2 = \varepsilon^2 - m^2$, $\lambda = \varepsilon/\kappa$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$. С учетом того, что

$$\int dl l J_0(l\theta) g(l^2) = \frac{1}{2\pi}\int d\mathbf{q}\, \exp(i\mathbf{q}\boldsymbol{\theta})\, g(q^2), \quad \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}J_1(l\theta) = -\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}J_0(l\theta),$$

где $g(l^2)$ — произвольная функция и $\mathbf{q}$ — двумерный вектор, формулу (6) можно переписать в виде

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\,\varepsilon) = \frac{i\exp\left[i\kappa(r+r')\right]}{8\pi^2\kappa r r'}\int d\mathbf{q}\left(1 + Z\alpha\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}}{q^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{q^2(r+r')}{2\kappa rr'} + i\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}')\right]\left(\frac{4\kappa^2 rr'}{q^2}\right)^{iZ\alpha\lambda}. \tag{7}$$

Здесь $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_\perp/r$, $\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{r}'_\perp/r'$. Формула (7) содержит только элементарные функции, а углы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}'$ входят только в виде множителя $\exp\{i\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}')\}$. Поэтому представление (7) для функции Грина очень удобно для вычислений. Если мал угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, то в случае кулоновского поля из формулы (15) [9] находим

$$D(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\,\varepsilon) = -\frac{\exp\left(i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{r}{r'}\right)^{iZ\alpha\,\lambda\,\mathrm{sign}\,(r-r')}. \tag{8}$$

Видно, что в этом случае функция Грина отличается от свободной только фазовым множителем. Легко убедиться, что все фазовые множители вида $r^{\pm iZ\alpha}$, входящие в представления (7) и (8) для функций Грина, сокращаются при подстановке этих функций в выражения для амплитуд (3) и (4). Заметим также, что в (7) и (8) можно заменить κ на $|\varepsilon| - m^2/(2|\varepsilon|)$, причем с нужной точностью поправка $m^2/(2|\varepsilon|)$ существенна только в фазовом множителе $\exp[i\kappa(r+r')]$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУД $M^{(3)}$ И $M^{(2)}$

Перейдем теперь к вычислению диаграмм, содержащих три функции Грина (см. рис. 1). Ясно, что вклад диаграммы *б* получается из вклада диаграммы *а* заменой $Z\alpha \to -Z\alpha$ и изменением общего знака. Это обеспечивает выполнение теоремы Фарри (сумма вкладов нечетна по $Z\alpha$). Поэтому сумма вкладов *а* и *б* на рис. 1 получается из вклада *а* выделением нечетной по $Z\alpha$ части и умножением на два. Далее, при вычислении диаграммы *а* область интегрирования по переменной z_3 разбивается на две: $z_3 > 0$ (фотон с импульсом $\mathbf{k}_3$ впереди) и $z_3 < 0$ (фотон сзади). В первой области малы углы между векторами $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и $-\mathbf{r}_1$. Во второй области малы углы между векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ и $-\mathbf{r}_2$. Обозначим вклад первой области в диаграмму *а* через $M_1^{(3)}$, а вклад второй области — через $M_2^{(3)}$. Введем в рассмотрение векторы $\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_{2\perp}/\omega_2$ и $\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_{3\perp}/\omega_3$ ($|\mathbf{f}_{2,3}| \ll 1$), а также $\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{r}_{i\perp}/r_i = \mathbf{n}_{i\perp}$ ($i = 1,2,3$). С учетом малости углов имеем $d\mathbf{r}_i = r_i^2\,dr_i\,d\boldsymbol{\theta}_i$. Вычисление удобно проводить для спиральных амплитуд $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$. Достаточно найти три амплитуды: $M_{+--}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$, $M_{+++}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$ и $M_{++-}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$. Все остальные могут быть получены с помощью замен переменных. Заметим, что в рассматриваемом приближении нет необходимости учитывать поправки к поперечной части векторов поляризаций $\mathbf{e}_{2,3}$, а продольную часть векторов $\mathbf{e}_{2,3}$ можно выразить через поперечную, используя соотношение $\mathbf{e}\,\mathbf{k} = 0$: $(\mathbf{e}_{2,3})_z = -\mathbf{e}_{2,3}\mathbf{f}_{2,3}$. Таким образом, мы можем считать поперечную часть вектора поляризации конечного фотона с заданной спиральностью равной вектору поляризации фотона с такой же спиральностью, распространяющегося вдоль оси z. Далее для этого вектора поляризации в случае положительной спиральности мы используем обозначение $\mathbf{e}$, тогда вектор поляризации с отрицательной спиральностью будет равен $\mathbf{e}^*$. Заметим, что так как в нашем подходе расположение вершин на диаграммах является пространственно упорядоченным, то для вычисления амплитуды M_{++-} необходимо найти две амплитуды $M^{(3)}$, а именно $M^{(3)}_{++-}$ и $M^{(3)}_{+-+}$.

Подставим выражения (7) и (8) в (3) и проведем очевидное разложение при малых углах, учитывая квадратичные члены по $\mathbf{f}_i$ и $\boldsymbol{\theta}_i$. Введем обозначения $\kappa_2 = \omega_2 - \varepsilon$,

$\kappa_3 = \omega_3 + \varepsilon$ и перейдем к переменным

$$\mathbf{q}_2 \to \kappa_2 \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_3 \to \kappa_3 \mathbf{q}_3, \quad R_1 = \frac{\omega_1}{\kappa_2\kappa_3} r_1, \quad R_2 = \frac{\omega_2}{\varepsilon\kappa_2} r_2, \quad R_3 = \frac{\omega_3}{\varepsilon\kappa_3} r_3.$$

После простого интегрирования по $\boldsymbol{\theta}_i$ получаем

$$M_1^{(3)} = \frac{e^3}{32\pi^3\omega_1\omega_2\omega_3} \int\limits_0^{\omega_2} \varepsilon\kappa_2\kappa_3\, d\varepsilon \int\limits_0^{\infty} dR_1 \int\limits_0^{\infty} dR_2 \int\limits_0^{L} \frac{dR_3}{R_1 R} \iint d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3 \left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha} \exp(i\Phi) T, \quad (9)$$

где $L = R_2\omega_3\kappa_2/\omega_2\kappa_3$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left\{ \left(1 + \frac{Z\alpha\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}_3}{\kappa_3 q_3^2}\right)\left(\frac{2}{R_1}\mathbf{e}_1\mathbf{Q} - \hat{e}_1\hat{k}_1\right)\left(1 - \frac{Z\alpha\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}_2}{\kappa_2 q_2^2}\right)\times \right. \\ &\times \left.\left[\left(\frac{2}{R}\mathbf{e}_2^*(\mathbf{Q} + \varepsilon R_3 \mathbf{f}_{23}) - \hat{e}_2^*\hat{k}_2\right)\left(\frac{2}{R}\mathbf{e}_3^*(\mathbf{Q} + \varepsilon R_2\mathbf{f}_{23}) - \hat{e}_3^*\hat{k}_3\right) - \frac{4i}{R}\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*\right]\right\}, \\ \Phi &= \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\frac{\mathbf{Q}^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 R_2 R_3 \mathbf{f}_{23}^2}{2R} - \frac{(\kappa_2\mathbf{q}_2 - \kappa_3\mathbf{q}_3)\boldsymbol{\Delta}}{\omega_1} - \right. \\ &- \left.\frac{\omega_3\kappa_2 R_2 - \omega_2\kappa_3 R_3}{\omega_1 R}\mathbf{Q}\mathbf{f}_{23} - \frac{m^2}{2}(R_1 + R)\right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$R = R_2 - R_3, \quad \mathbf{f}_{23} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, \quad \boldsymbol{\Delta} = \omega_2\mathbf{f}_2 + \omega_3\mathbf{f}_3.$$

Для дальнейших вычислений удобно преобразовать функцию T в (10) так, чтобы она не содержала параметр $Z\alpha$. Для этого воспользуемся тождествами

$$Z\alpha\frac{\mathbf{q}_2}{q_2^2}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha} = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}_2}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha}, \quad Z\alpha\frac{\mathbf{q}_3}{q_3^2}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha} = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}_3}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha}$$

и проведем интегрирование по частям по $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ в (9). После этого в функции T возникают члены, содержащие переменную R_1 в виде множителей $1/R_1$, $1/R_1^2$ и не зависящие от R_1. Вычисляя след матриц и интегрируя по частям по переменной R_1 члены, содержащие $1/R_1^2$, находим для различных поляризаций

$$T_{+--} = \frac{8}{R_1 R^2}(\mathbf{eQ})(\mathbf{eQ}_2)(\mathbf{eQ}_3),$$

$$\begin{aligned} T_{+++} &= -\frac{4}{R_1R^2}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)(\mathbf{eQ})(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_3) - \frac{\omega_1}{\varepsilon R^3}\mathbf{e}^*\left(\frac{\omega_2}{\kappa_2}\mathbf{Q}_3^2\mathbf{Q}_2 - \frac{\omega_3}{\kappa_3}\mathbf{Q}_2^2\mathbf{Q}_3\right) + \\ &+ \frac{2i\omega_1^2}{\kappa_2\kappa_3R^2}\mathbf{e}^*(\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) + \frac{m^2\omega_1}{\varepsilon R}\mathbf{e}^*\left(\frac{\omega_2}{\kappa_2}\mathbf{Q}_2 - \frac{\omega_3}{\kappa_3}\mathbf{Q}_3\right), \\ T_{++-} &= -\frac{4}{R_1R^2}\left(\frac{\kappa_2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\kappa_2}\right)(\mathbf{eQ})(\mathbf{eQ}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_3) + \frac{\omega_2\omega_3}{\varepsilon\kappa_3R_1R^2}(\mathbf{Q}_2^2 + \mathbf{Q}_3^2)(\mathbf{eQ}) - \\ &- \frac{\omega_1\omega_2}{\kappa_2\kappa_3R}\left(\frac{\mathbf{Q}_3^2}{R^2} - m^2\right)(\mathbf{eQ}_2) + \frac{4i}{R_1R}\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\kappa_2\kappa_3} - 2\right)(\mathbf{eQ}) + \frac{2i\omega_1\omega_2}{\kappa_2\kappa_3R^2}\mathbf{e}(\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q} + \varepsilon R_2 \mathbf{f}_{23}$ и $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q} + \varepsilon R_3 \mathbf{f}_{23}$. Функция T_{+-+} получается из T_{++-} с помощью подстановки $\omega_2 \leftrightarrow \omega_3$, $\kappa_2 \leftrightarrow \kappa_3$, $\mathbf{Q}_2 \leftrightarrow \mathbf{Q}_3$ и $\varepsilon \to -\varepsilon$.

Аналогично для вклада $M_2^{(3)}$ получаем

$$M_2^{(3)} = \frac{e^3}{32\pi^3 \omega_1\omega_2\omega_3} \int\limits_0^{\omega_2} \varepsilon\kappa_2\kappa_3\, d\varepsilon \int\limits_0^{\infty} dR_1 \int\limits_0^{\infty} dR_2 \int\limits_0^{L_1} \frac{dR_3}{rR_2} \iint d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3 \left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha} \exp(i\tilde{\Phi})\tilde{T}, \quad (12)$$

где $L_1 = R_1\omega_3\kappa_2/\omega_1\varepsilon$, $r = R_1 + R_3$,

$$\tilde{\Phi} = \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathbf{Q}^2}{2} - \frac{\kappa_3^2 R_1 R_3\, \mathbf{f}_3^2}{2r} - \frac{(\kappa_2\mathbf{q}_2 - \varepsilon\mathbf{q}_3)\boldsymbol{\Delta}}{\omega_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_3\kappa_2 R_1 - \varepsilon\omega_1 R_3}{\omega_2 r}\mathbf{Q}\mathbf{f}_3 - \frac{m^2}{2}(R_2 + r)\right], \quad (13)$$

а функция $\tilde{T}$ для разных поляризаций равна

$$\tilde{T}_{+--} = -\frac{8}{r^2R_2}(\mathbf{e}\mathbf{Q})(\mathbf{e}\mathbf{P}_1)(\mathbf{e}\mathbf{P}_3); \quad (14)$$

$$\tilde{T}_{++-} = \frac{4}{r^2R_2}\left(\frac{\kappa_2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\kappa_2}\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q})(\mathbf{e}\mathbf{P}_1)(\mathbf{e}\mathbf{P}_3) + \frac{\omega_2}{\kappa_3 r^3}\mathbf{e}\left(\frac{\omega_1}{\kappa_2}\mathbf{P}_3^2\mathbf{P}_1 + \frac{\omega_3}{\varepsilon}\mathbf{P}_1^2\mathbf{P}_3\right) -$$
$$- \frac{2i\omega_2^2}{\kappa_2\varepsilon r^2}\mathbf{e}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) - \frac{m^2\omega_2}{\kappa_3 r}\mathbf{e}\left(\frac{\omega_1}{\kappa_2}\mathbf{P}_1 + \frac{\omega_3}{\varepsilon}\mathbf{P}_3\right),$$
$$\tilde{T}_{+++} = \frac{4}{r^2R_2}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q})(\mathbf{e}^*\mathbf{P}_1)(\mathbf{e}\mathbf{P}_3) + \frac{\omega_1\omega_3}{\varepsilon\kappa_3 r^2 R_2}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_3^2)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}) +$$
$$+ \frac{\omega_1\omega_2}{\kappa_2\varepsilon r}\left(\frac{\mathbf{P}_3^2}{r^2} - m^2\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{P}_1) - \frac{4i}{rR_2}\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\kappa_2\varepsilon} - 2\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}) - \frac{2i\omega_1\omega_2}{\kappa_2\varepsilon r^2}\mathbf{e}^*(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3),$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q} + \kappa_3 R_1 \mathbf{f}_3$ и $\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q} - \kappa_3 R_3 \mathbf{f}_3$. Функция $\tilde{T}_{+-+}$ получается из $\tilde{T}_{+++}$ с помощью подстановки $\omega_1 \leftrightarrow -\omega_3$, $\kappa_2 \leftrightarrow -\varepsilon$, $\mathbf{P}_1 \leftrightarrow \mathbf{P}_3$ и $\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}^*$. Заметим, что подынтегральное выражение для спиральных амплитуд $M_2^{(3)}$ в (12), (14) может быть получено из подынтегрального выражения для спиральных амплитуд $M_1^{(3)}$ в (9), (11) с помощью подстановок

$$\begin{gathered} \mathbf{q}_{2,3} \to -\mathbf{q}_{2,3}, \quad \omega_1 \leftrightarrow \omega_2, \quad \omega_3 \to -\omega_3, \quad \kappa_3 \leftrightarrow \varepsilon, \\ R_1 \leftrightarrow R_2, \quad R_3 \to -R_3, \quad \mathbf{f}_{23} \leftrightarrow -\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{f}_2 \to -\mathbf{f}_2. \end{gathered} \quad (15)$$

При этом $T_{+--} \to \tilde{T}_{+--}$, $T_{+-+} \to \tilde{T}_{+-+}$, $T_{+++} \to \tilde{T}_{++-}(\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}^*)$, $T_{++-} \to \tilde{T}_{+++}(\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}^*)$.

Аналогично, для амплитуд $M^{(2)}$ находим

$$\begin{gathered} M_{+--}^{(2)} = 0, \quad M_{+++}^{(2)} = \mathbf{e}^*(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}), \\ M_{++-}^{(2)} = \mathbf{e}(\mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{23}), \quad M_{+-+}^{(2)} = \mathbf{e}(\mathbf{M}_{13} + \mathbf{M}_{23}), \end{gathered} \quad (16)$$

где

$$\mathbf{M}_{23} = -\frac{ie^3}{16\pi^3}\int\limits_{-\omega_3}^{\omega_2} d\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{dR_1}{R_1^2}\int\limits_0^\infty \frac{dR_2}{R_2^2}\left[R_1 + \left(\frac{\kappa_2-\kappa_3}{\omega_1}\right)^2 R_2\right]\iint d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3 \mathbf{Q}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathbf{Q}^2}{2}+\frac{\omega_2\omega_3\kappa_2\kappa_3}{2\omega_1^2}\mathbf{f}_{23}^2 R_2 - \frac{(\kappa_2\mathbf{q}_2-\kappa_3\mathbf{q}_3)\boldsymbol{\Delta}}{\omega_1} - \frac{m^2}{2}(R_1+R_2)\right]\right\},$$
$$\mathbf{M}_{13} = \frac{ie^3}{16\pi^3}\int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{dR_1}{R_1^2}\int\limits_0^\infty \frac{dR_2}{R_2^2}\left[R_2 + \left(\frac{\kappa_2-\varepsilon}{\omega_2}\right)^2 R_1\right]\iint d\mathbf{q}_2\, d\mathbf{q}_3 \mathbf{Q}\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathbf{Q}^2}{2}-\frac{\omega_1\omega_3\varepsilon\kappa_2}{2\omega_2^2}\mathbf{f}_3^2 R_1 - \frac{(\kappa_2\mathbf{q}_2-\varepsilon\mathbf{q}_3)\boldsymbol{\Delta}}{\omega_2} - \frac{m^2}{2}(R_1+R_2)\right]\right\}, \quad (17)$$

а вектор $\mathbf{M}_{12}$ получается из $\mathbf{M}_{13}$ заменой $\omega_2 \leftrightarrow \omega_3$ и $\mathbf{f}_3 \leftrightarrow \mathbf{f}_2$. Как мы увидим, в сумме $M^{(2)} + M^{(3)}$ большое количество членов сокращается.

В общем случае дальнейшее преобразование полученных выражений приводит к четырехкратным интегралам от элементарных функций, и эта задача требует отдельного подробного рассмотрения. Ниже мы ограничимся детальным обсуждением случая $|\mathbf{k}_{2\perp}| = |\omega_2\mathbf{f}_2| \gg m$, $|\mathbf{k}_{3\perp}| = |\omega_3\mathbf{f}_3| \gg m$, когда выражения для амплитуд существенно упрощаются. Эта область параметров соответствует большой виртуальности электрон-позитронной пары по сравнению с массой электрона, которой в этом случае можно пренебречь. Заметим, что при этом соотношение между передачей импульса $\Delta = |\boldsymbol{\Delta}|$ и массой электрона m может быть произвольным, поскольку Δ определяет не виртуальность пары, а характерный прицельный параметр $\rho \sim 1/\Delta$.

6. ПРЕДЕЛ НУЛЕВОЙ МАССЫ

Нетрудно заметить, что если в полученных выражениях положить $m = 0$, то это приведет к логарифмическим расходимостям в отдельных членах (т. е. к появлению $\ln m$ при конечной массе). Например, в амплитуде $M_1^{(3)}$ такие логарифмы возникают при интегрировании по R_1 членов в T, не содержащих множителя $1/R_1$ (см. (11)). Окончательный ответ, как и должно быть, не содержит логарифмов массы. Однако сокращение этих логарифмов между отдельными вкладами является весьма нетривиальным.

При взятии интеграла по R_1 в формуле (9) для $T = T_{+--}$ логарифмы не возникают, а $M_{+--}^{(2)} = 0$. В формуле (11) для T_{+++} и T_{++-} содержатся члены пропорциональные $\mathbf{Q}_2^2$. В этих членах удобно перейти от переменных R_2 и R_3 к R_2 и $y = R_3/R$ и проинтегрировать по частям по y. В членах, содержащих $\mathbf{Q}_3^2$, перейдем к переменным R_3 и $y = R_3/R$ и также проинтегрируем по частям по y. В результате в двойном интеграле по R_2 и R_3 все члены, в которых возникает логарифм массы, сокращаются, и можно положить $m = 0$. После этого T_{+++} и T_{++-} переходят в

$$\begin{aligned} T_{+++} &= -\frac{4}{R_1R^2}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}+\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)(\mathbf{eQ})(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_3), \\ T_{++-} &= -\frac{4}{R_1R^2}\left(\frac{\kappa_2}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\kappa_2}\right)(\mathbf{eQ})\left[(\mathbf{eQ}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q}_3) - iR\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, возникают внеинтегральные члены при $y = \omega_3\kappa_2/\omega_1\varepsilon$ (верхний предел) и $y = 0$ (нижний предел). Аналогичные преобразования необходимо провести и для амплитуды $M_2^{(3)}$. Соответственно, $\tilde{T}_{+++}$ и $\tilde{T}_{++-}$ переходят в

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{++-} &= \frac{4}{r^2 R_2}\left(\frac{\kappa_2}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\kappa_2}\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q})(\mathbf{eP}_1)(\mathbf{eP}_3),\\
\tilde{T}_{+++} &= \frac{4}{r^2 R_2}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3}+\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)(\mathbf{e}^*\mathbf{Q})\left[(\mathbf{e}^*\mathbf{P}_1)(\mathbf{eP}_3)-iR\right].
\end{aligned} \tag{19}$$

На нижнем пределе внеинтегральные члены сокращаются в сумме $M_1^{(3)}$ и $M_2^{(3)}$. Напомним, что для вычисления амплитуды $M^{(3)}$ нам необходимо найти сумму $M_1^{(3)} + (\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3,\ \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_3)$, выделить нечетную по $Z\alpha$ часть и умножить на два. После этого вклады внеинтегральных членов от $M_1^{(3)}$ на верхнем пределе для амплитуды M_{+++} сокращаются, а для амплитуд M_{++-} и M_{+-+} в сумме с $(\mathbf{eM}_{23})$ дают конечное при $m = 0$ выражение. При этом для сокращения сингулярных по m вкладов необходимо использовать антисимметричность возникающих подынтегральных выражений относительно замены переменных $\varepsilon \to \omega_2 - \omega_3 - \varepsilon$, $\mathbf{q}_2 \leftrightarrow -\mathbf{q}_3$. Вклады внеинтегральных членов от $M_2^{(3)}$ на верхнем пределе обращаются в нуль для амплитуды M_{++-}, а для амплитуд M_{+++} и M_{+-+} дают конечное при $m = 0$ выражение в сумме с $(\mathbf{e}^*\mathbf{M}_{13})$ и $(\mathbf{eM}_{13})$ соответственно. Аналогично амплитуды $(\mathbf{e}^*\mathbf{M}_{12})$ и $(\mathbf{eM}_{12})$ сокращают сингулярные вклады от $M_2^{(3)}(\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3)$ для амплитуд M_{+++} и M_{++-}. Для амплитуды M_{+-+} внеинтегральные члены на верхнем пределе от $M_2^{(3)}(\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3)$ обращаются в нуль. В результате сумма внеинтегральных членов и $M^{(2)}$ дает дополнительные вклады в спиральные амплитуды, которые мы представим в виде

$$\delta M = -\frac{e^3}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty \frac{dR}{R}\iint \frac{d\mathbf{q}_2\,d\mathbf{q}_3}{\mathbf{Q}^2}\left[\left(\frac{q_2}{q_3}\right)^{2iZ\alpha}-\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^{2iZ\alpha}\right]F. \tag{20}$$

Функция F для различных спиральностей равна

$$\begin{aligned}
&F_{+--} = 0,\quad F_{+-+} = (\mathbf{eQ})\left[\int\limits_{-\omega_3}^{\omega_2} d\varepsilon\,\frac{\kappa_2\kappa_3^2}{\omega_1^2\varepsilon}\exp(i\psi_1) - \int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon\,\frac{\kappa_2\varepsilon^2}{\omega_2^2\kappa_3}\exp(i\psi_2)\right],\\
&F_{+++} = (\mathbf{e}^*\mathbf{Q})\int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon\,\frac{\varepsilon\kappa_2^2}{\omega_2^2\kappa_3}\exp(i\psi_2) + (\omega_2 \leftrightarrow \omega_3,\ \mathbf{f}_2 \leftrightarrow \mathbf{f}_3),\\
&F_{++-} = F_{+-+}(\omega_2 \leftrightarrow \omega_3,\ \mathbf{f}_2 \leftrightarrow \mathbf{f}_3),\\
&\psi_1 = \frac{\mathbf{Q}^2}{2R} + \frac{\omega_2\omega_3\kappa_2\kappa_3}{2\omega_1^2}\mathbf{f}_{23}^2 R - \frac{(\kappa_2\mathbf{q}_2 - \kappa_3\mathbf{q}_3)\boldsymbol{\Delta}}{\omega_1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Фаза ψ_2 получается из ψ_1 заменой (15). При получении формулы (20) мы взяли интеграл по одному из радиусов. Заметим, что сингулярность подынтегрального выражения (21) при $\varepsilon = 0$ является фиктивной и сокращается в полном выражении для амплитуды процесса. Поэтому она не требует доопределения.

Подставим формулы (18) и (19) в (9) и (12) соответственно, положим $m = 0$ в фазах Φ и $\tilde{\Phi}$ и возьмем элементарный интеграл по R_1 в (9) и по R_2 в (12). После этого перейдем от переменных $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ к переменным $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3$. В результате интеграл по $\mathbf{q}$ имеет вид

$$J = \int \frac{d\mathbf{q}}{\mathbf{Q}^2} \left(\frac{|\mathbf{q}+\mathbf{Q}|}{|\mathbf{q}-\mathbf{Q}|} \right)^{2iZ\alpha} \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta} \right). \tag{22}$$

Сделаем замену переменных $\mathbf{q} \to |\mathbf{Q}|\mathbf{q}$ и представим $\mathbf{Q}$ и $\boldsymbol{\Delta}$ в виде $\mathbf{Q} = |\mathbf{Q}|\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\Delta} = |\boldsymbol{\Delta}|\boldsymbol{\lambda}_2$. Нетрудно видеть, что J является функцией $S = (\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2)$ и $|\mathbf{Q}||\boldsymbol{\Delta}|$. Заметим, что в двумерном случае форма $P = \epsilon_{ij}\lambda_1^i\lambda_2^j$ также инвариантна относительно поворотов, однако четные степени P выражаются через S ($P^2 = 1 - S^2$), а нечетные степени P меняют знак при отражении относительно произвольной оси. В то же время интеграл J инвариантен при отражениях. Это становится очевидным, если одновременно с отражением $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ сделать отражение вектора $\mathbf{q}$. Таким образом, J не меняется при замене $\mathbf{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{\Delta}$. После этой замены J принимает вид

$$J = \int \frac{d\mathbf{q}}{\boldsymbol{\Delta}^2} \left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|} \right)^{2iZ\alpha} \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{q}\mathbf{Q} \right). \tag{23}$$

Используя это представление, легко взять интегралы по $\mathbf{Q}$ и по всем радиусам. Суммируя все вклады, окончательно получаем

$$M = \frac{8e^3}{\pi^2\omega_1\omega_2\omega_3\boldsymbol{\Delta}^2} \int d\mathbf{q}\, (\mathbf{T}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{q}})\, \mathrm{Im} \left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|} \right)^{2iZ\alpha}, \tag{24}$$

$$\mathbf{T}_{+--} = \omega_3\, \mathbf{e} \int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon\, \frac{\kappa_2^2}{\mathbf{e}^*\mathbf{a}} \left[\frac{(\mathbf{eb})\kappa_3}{\omega_1\mathscr{D}_1} - \frac{(\mathbf{ec})\varepsilon}{\omega_2\mathscr{D}_3} \right] + \begin{pmatrix} \omega_2 \leftrightarrow \omega_3 \\ \mathbf{f}_2 \leftrightarrow \mathbf{f}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{+++} = \omega_3 \int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon\, \kappa_2 \left[\mathbf{e}^* \frac{\varepsilon}{\omega_2\mathscr{D}_3} \left(\frac{\kappa_3 - \kappa_2}{2} + \frac{\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3}{\mathbf{e}^*\mathbf{a}}(\kappa_2^2 + \kappa_3^2) \right) - \right.$$

$$\left. - \mathbf{e}\, \frac{(\mathbf{e}^*\mathbf{b})(\kappa_2^2+\kappa_3^2)}{2(\mathbf{ea})\omega_1\mathscr{D}_1} \right] + \begin{pmatrix} \omega_2 \leftrightarrow \omega_3 \\ \mathbf{f}_2 \leftrightarrow \mathbf{f}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{++-} = \omega_3 \int\limits_0^{\omega_2} d\varepsilon\, \kappa_2 \left[\mathbf{e}\, \frac{\kappa_3}{\omega_1\mathscr{D}_1} \left(\frac{\kappa_2 - \varepsilon}{2} - \frac{\mathbf{ef}_{23}}{\mathbf{ea}}(\kappa_2^2 + \varepsilon^2) \right) + \mathbf{e}^* \frac{(\mathbf{ec})(\kappa_2^2+\varepsilon^2)}{2(\mathbf{e}^*\mathbf{a})\omega_2\mathscr{D}_3} \right] +$$

$$+ \omega_2\, \mathbf{e} \int\limits_{-\omega_3}^{0} d\varepsilon\, \kappa_3 \left[\frac{\kappa_3(\kappa_2^2+\varepsilon^2)}{\mathbf{e}^*\mathbf{b}} \left(\frac{\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23}}{\omega_1\mathscr{D}_1} + \frac{\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2}{\omega_3\mathscr{D}_2} \right) - \frac{\varepsilon\kappa_3 + \kappa_2^2}{2\omega_1\mathscr{D}_1} + \frac{\varepsilon^2 - \kappa_2\kappa_3}{2\omega_3\mathscr{D}_2} \right].$$

Очевидно, что $\mathbf{T}_{+-+}$ получается из $\mathbf{T}_{++-}$ с помощью замены $\omega_2 \leftrightarrow \omega_3$, $\mathbf{f}_2 \leftrightarrow \mathbf{f}_3$. В формуле (24) введены обозначения

$$\mathscr{D}_1 = \frac{\omega_2\kappa_3\mathbf{a}^2 - \omega_3\kappa_2\mathbf{b}^2}{\omega_1\varepsilon} - i0, \quad \mathscr{D}_2 = \frac{\omega_2\kappa_3\tilde{\mathbf{c}}^2 - \omega_1\varepsilon\mathbf{b}^2}{\omega_3\kappa_2}, \quad \mathscr{D}_3 = \frac{\omega_1\varepsilon\mathbf{a}^2 + \omega_3\kappa_2\mathbf{c}^2}{\omega_2\kappa_3},$$

$$\begin{gathered} \mathbf{a} = \mathbf{q} - \boldsymbol{\Delta} + 2\kappa_2\mathbf{f}_2, \quad \mathbf{b} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\Delta} - 2\kappa_3\mathbf{f}_3, \\ \mathbf{c} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\Delta} - 2\varepsilon\mathbf{f}_{23}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{q} - \boldsymbol{\Delta} + 2\varepsilon\mathbf{f}_{23}. \end{gathered} \tag{25}$$

При выводе (24) мы использовали тождество

$$\mathbf{Q}\exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{qQ}\right) = 2i\nabla_{\mathbf{q}}\exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{qQ}\right)$$

и проинтегрировали по частям по $\mathbf{q}$. Заметим, что в (24) векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}^*$ оказались в знаменателях в результате применения соотношения $2(\mathbf{ea})(\mathbf{e}^*\mathbf{a}) = \mathbf{a}^2$.

7. АСИМПТОТИКА ПРИ МАЛЫХ Δ

В приближении малых углов ($|\mathbf{f}_2|, |\mathbf{f}_3| \ll 1$) сечение процесса расщепления фотона имеет вид

$$d\sigma = \frac{\omega_1^2}{2^8\pi^5}|M|^2\, x(1-x)dx\, d\mathbf{f}_2\, d\mathbf{f}_3, \tag{26}$$

где $x = \omega_2/\omega_1$, при этом $\omega_3 = \omega_1(1-x)$. Введем обозначение $\boldsymbol{\rho} = (\omega_2\mathbf{f}_2 - \omega_3\mathbf{f}_3)/2$. В переменных $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\Delta}$ сечение процесса равно

$$d\sigma = |M|^2\,\frac{d\boldsymbol{\Delta}\, d\boldsymbol{\rho}\, dx}{2^8\pi^5\omega_1^2\, x(1-x)}. \tag{27}$$

Рассмотрим асимптотику полученных выражений при $|\boldsymbol{\Delta}| \ll |\boldsymbol{\rho}|$. Для ее получения умножим $\mathbf{T}$ в (24) на

$$1 = \vartheta(q_0^2 - \mathbf{q}^2) + \vartheta(\mathbf{q}^2 - q_0^2),$$

где $|\boldsymbol{\Delta}| \ll q_0 \ll |\boldsymbol{\rho}|$. Тогда для слагаемого в (24), пропорционального $\vartheta(q_0^2 - \mathbf{q}^2)$, в функции $\mathbf{T}$ можно положить $\mathbf{q} = 0$ и $\boldsymbol{\Delta} = 0$ и проинтегрировать по частям по $\mathbf{q}$. Используя соотношение

$$\nabla_{\mathbf{q}}\vartheta(q_0^2 - \mathbf{q}^2) = -2\mathbf{q}\,\delta(q_0^2 - \mathbf{q}^2),$$

легко вычислить интеграл по $\mathbf{q}$, так как при $|\mathbf{q}| = q_0 \gg |\boldsymbol{\Delta}|$ имеем

$$\mathrm{Im}\left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|}\right)^{2iZ\alpha} \approx 4Z\alpha\,\frac{\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{q}^2}.$$

В результате в области $|\mathbf{q}| < q_0$ вклад пропорциональный $Z\alpha$ не зависит от q_0, а следующие по $Z\alpha$ члены являются малыми по параметру $|\boldsymbol{\Delta}|/q_0$.

Для слагаемого пропорционального $\vartheta(\mathbf{q}^2 - q_0^2)$ имеем

$$\nabla_{\mathbf{q}}\mathrm{Im}\left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|}\right)^{2iZ\alpha} \approx 4Z\alpha\,\frac{\mathbf{q}^2\boldsymbol{\Delta} - 2\mathbf{q}(\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta})}{|\mathbf{q}|^4}.$$

Полагая $\boldsymbol{\Delta} = 0$ в функции $\mathbf{T}$, вычисляем сначала интеграл по углам вектора $\mathbf{q}$, а затем по его модулю. В результате главный по $q_0/|\boldsymbol{\rho}|$ вклад не зависит от q_0 и пропорционален $Z\alpha$. Возьмем сумму вкладов двух областей по $\mathbf{q}$ и вычислим интеграл по энергии ε. Окончательно получаем

$$M_{+--} = \frac{4iN(\mathbf{e}\boldsymbol{\rho})^3}{\boldsymbol{\rho}^4}[\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\rho}]_z, \quad N = \frac{4Z\alpha e^3\omega_2\omega_3}{\pi\omega_1\boldsymbol{\Delta}^2\boldsymbol{\rho}^2},$$

$$
\begin{aligned}
M_{+++} &= N\left[\mathbf{e}^*\boldsymbol{\Delta} + 2(\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta})\frac{(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\rho})^2}{\boldsymbol{\rho}^2}\left(1 + \frac{\omega_2-\omega_3}{\omega_1}\ln\frac{\omega_3}{\omega_2} + \frac{\omega_2^2+\omega_3^2}{2\omega_1^2}\left(\ln^2\frac{\omega_3}{\omega_2} + \pi^2\right)\right)\right], \\
M_{++-} &= N\left[\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta} + 2(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\Delta})\frac{(\mathbf{e}\boldsymbol{\rho})^2}{\boldsymbol{\rho}^2}\left(1 + \frac{\omega_1+\omega_3}{\omega_2}\left(\ln\frac{\omega_3}{\omega_1} + i\pi\right) + \frac{\omega_1^2+\omega_3^2}{2\omega_2^2}\left(\ln^2\frac{\omega_3}{\omega_1} + 2i\pi\ln\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{28}
$$

где A_z — компонента вектора $\mathbf{A}$ вдоль $\mathbf{k}_1$. После подстановки (28) в (27) и взятия элементарных интегралов по углам векторов $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\rho}$ приходим к выражению

$$
d\sigma = \frac{4Z^2\alpha^5}{\pi^2}\,\frac{d\rho^2\,d\Delta^2\,dx}{\rho^4\Delta^2}\,g(x), \tag{29}
$$

где функции $g(x)$ для различных поляризаций имеют вид

$$
\begin{aligned}
& g_{+--}(x) = x(1-x), \\
& g_{+++}(x) = \frac{1}{2}x(1-x)\left[1 + \left(1 + (2x-1)\ln\frac{1-x}{x} + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{x^2+(1-x)^2}{2}\left(\ln^2\frac{1-x}{x} + \pi^2\right)\right)^2\right], \\
& g_{++-}(x) = \frac{1}{2}x(1-x)\left[1 + \left|1 + \left(\frac{2}{x}-1\right)(\ln(1-x)+i\pi) + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{1+(1-x)^2}{2x^2}\left(\ln^2(1-x) + 2i\pi\ln(1-x)\right)\right|^2\right], \\
& g_{+-+}(x) = g_{++-}(1-x).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Формулы (29) и (30) согласуются с соответствующими результатами работы [16], полученными с помощью метода эквивалентных фотонов. Однако этот метод не позволяет получить сами амплитуды (28). Большой логарифм появляется в сечении в результате интегрирования (29) по Δ^2 от Δ^2_{min} до ρ^2, где для экранированного кулоновского потенциала $\Delta_{min} \sim r_c^{-1}$, а для неэкранированного кулоновского потенциала $\Delta_{min} \sim \rho^2/\omega_1$. Интересно сравнить вклады различных спиральных амплитуд в сечение процесса при $\Delta \to 0$. На рис. 3 показана функция $g(x)$ для различных спиральных состояний, а также функция

$$
\bar{g}(x) = g_{+--}(x) + g_{+++}(x) + g_{++-}(x) + g_{+-+}(x), \tag{31}
$$

которая возникает при суммировании по поляризациям конечных фотонов. Видно, что $\bar{g}(x)$ слабо меняется в широком диапазоне x.

Кулоновские поправки к амплитуде расщепления фотона при $\Delta \to 0$ являются малыми по сравнению с борновским вкладом (28). Они становятся существенными при $\Delta \sim \rho$, и требуется отдельный подробный анализ их роли.

8. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как уже говорилось, амплитуда расщепления фотона, полученная в [14, 15] в низшем борновском приближении при произвольных энергиях и передачах импульса, является весьма сложной для приложений. Поэтому интересно найти линейный по $Z\alpha$ член разложения амплитуд (24). Для этого сделаем в (24) подстановку

$$(\mathbf{e}\nabla_{\mathbf{q}})\,\mathrm{Im}\left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|}\right)^{2iZ\alpha} \longrightarrow Z\alpha\left[\frac{1}{\mathbf{e}^*(\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta})}-\frac{1}{\mathbf{e}^*(\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta})}\right]$$

и запишем функции $\mathscr{D}_{1,2,3}$ из (25) в виде

$$\begin{gathered}\mathscr{D}_1=\left(\mathbf{q}+\frac{\kappa_2-\kappa_3}{\omega_1}\boldsymbol{\Delta}\right)^2-\frac{4\omega_2\omega_3\kappa_2\kappa_3}{\omega_1^2}\mathbf{f}_{23}^2-i0,\\ \mathscr{D}_2=\left(\mathbf{q}-\frac{\kappa_3+\varepsilon}{\omega_3}\boldsymbol{\Delta}\right)^2-\frac{4\omega_1\omega_2\kappa_3\varepsilon}{\omega_3^2}\mathbf{f}_2^2,\quad \mathscr{D}_3=\left(\mathbf{q}+\frac{\kappa_2-\varepsilon}{\omega_2}\boldsymbol{\Delta}\right)^2+\frac{4\omega_1\omega_3\kappa_2\varepsilon}{\omega_2^2}\mathbf{f}_3^2.\end{gathered}\tag{32}$$

В каждом члене сделаем сдвиг переменной интегрирования $\mathbf{q}$ так, чтобы функции $\mathscr{D}_{1,2,3}$ перестали зависеть от угла ϕ вектора $\mathbf{q}$. Например, в членах, содержащих $\mathscr{D}_1$, мы делаем подстановку

$$\mathbf{q}\to\mathbf{q}-\frac{\kappa_2-\kappa_3}{\omega_1}\boldsymbol{\Delta}.$$

В результате, переходя к переменной $z=\exp(i\phi)$, легко берем интеграл по z с помощью вычетов. Вычисляя элементарные интегралы по $|\mathbf{q}|$ и по ε, получаем для борновских амплитуд

$$M_{+--}=\frac{2iZ\alpha e^3[\mathbf{f}_2\,\mathbf{f}_3]_z}{\pi\boldsymbol{\Delta}^2(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3)(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23})},$$

$$\begin{aligned}M_{+++}=\frac{2(Z\alpha)e^3\omega_1}{\pi\boldsymbol{\Delta}^2(\mathbf{ef}_{23})^2\omega_2\omega_3}\Bigg\{(\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta})\Bigg[1+\frac{\mathbf{ef}_2+\mathbf{ef}_3}{\mathbf{ef}_{23}}\ln\frac{a_2}{a_3}&+\\ +\frac{(\mathbf{ef}_2)^2+(\mathbf{ef}_3)^2}{(\mathbf{ef}_{23})^2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{a_2}{a_3}+\mathrm{Li}_2(1-a_2)+\mathrm{Li}_2(1-a_3)\right)\Bigg]&+\\ +\frac{1}{\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta}}\left[\omega_3^2(\mathbf{ef}_3)^2\frac{a_2}{1-a_2}\left(1+\frac{a_2\ln a_2}{1-a_2}\right)+\omega_2^2(\mathbf{ef}_2)^2\frac{a_3}{1-a_3}\left(1+\frac{a_3\ln a_3}{1-a_3}\right)\right]&+\end{aligned}$$

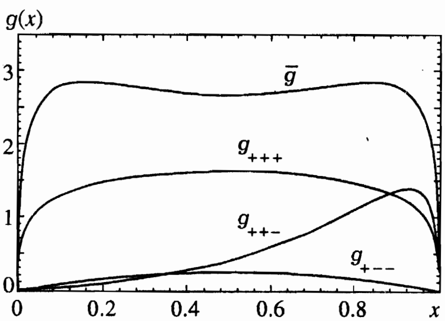

Рис. 3. Функции $g(x)$ (30) для различных поляризаций и $\bar{g}(x)$ (31)

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(\mathbf{ef}_2)(\mathbf{ef}_3)}{\mathbf{ef}_{23}}\left(\omega_3\frac{a_2\ln a_2}{1-a_2}-\omega_2\frac{a_3\ln a_3}{1-a_3}\right)\Bigg\},\\
&M_{++-}=\frac{2(Z\alpha)e^3\omega_2}{\pi\mathbf{\Delta}^2(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3)^2\omega_1\omega_3}\Bigg\{(\mathbf{e}^*\mathbf{\Delta})\Bigg[1-\frac{(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2)+(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23})}{(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3)}\ln\frac{-a_1}{a_2}+\\
&+\frac{(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2)^2+(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23})^2}{(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3)^2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2\frac{-a_1}{a_2}+\mathrm{Li}_2(1-a_2)+\mathrm{Li}_2(1+a_1)\right)\Bigg]+\\
&+\frac{1}{\mathbf{e}^*\mathbf{\Delta}}\left[\omega_3^2(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23})^2\frac{a_2}{1-a_2}\left(1+\frac{a_2\ln a_2}{1-a_2}\right)-\omega_1^2(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2)^2\frac{a_1}{1+a_1}\left(1-\frac{a_1\ln(-a_1)}{1+a_1}\right)\right]+\\
&+\frac{2(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_2)(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_{23})}{(\mathbf{e}^*\mathbf{f}_3)}\left[\omega_1\frac{a_1\ln(-a_1)}{1+a_1}-\omega_3\frac{a_2\ln a_2}{1-a_2}\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где

$$
a_1=\frac{\mathbf{\Delta}^2}{\omega_2\omega_3\mathbf{f}_{23}^2},\quad a_2=\frac{\mathbf{\Delta}^2}{\omega_1\omega_2\mathbf{f}_2^2},\quad a_3=\frac{\mathbf{\Delta}^2}{\omega_1\omega_3\mathbf{f}_3^2},\quad \mathrm{Li}_2(x)=-\int\limits_0^x\frac{dt}{t}\ln(1-t).
$$

Из (25) следует, что $\ln(-a_1)$ следует понимать как $\ln(-a_1+i0)=\ln a_1+i\pi$. Кроме того,

$$
\mathrm{Li}_2(1+a_1)=\mathrm{Li}_2(1+a_1-i0)=\frac{\pi^2}{6}-\ln(1+a_1)[\ln a_1+i\pi]-\mathrm{Li}_2(-a_1).
$$

Результат (33) получен при условии $|\mathbf{\Delta}_\perp|\gg|\mathbf{\Delta}_\parallel|$. Можно показать, что он остается верным и в случае $|\mathbf{\Delta}_\perp|\sim|\mathbf{\Delta}_\parallel|$, если в формулах (33) использовать выражение (5) для $\mathbf{\Delta}^2$. В действительности в (33) разница между $\mathbf{\Delta}^2$ и $\mathbf{\Delta}_\perp^2$ существенна только во внешнем множителе $1/\mathbf{\Delta}^2$. Для экранированного кулоновского потенциала амплитуды (33) должны быть умножены на атомный формфактор $1-F(\Delta^2)$. В случае потенциала Мольер [19] он равен

$$
1-F(\Delta^2)=\Delta^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i}{\Delta^2+\beta_i^2},
\tag{34}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=0.1,\quad \alpha_2=0.55,\quad \alpha_3=0.35,\quad \beta_i=\beta_0 b_i,\\
&b_1=6,\quad b_2=1.2,\quad b_3=0.3,\quad \beta_0=mZ^{1/3}/121.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Напомним, что формула (33) справедлива при $|\mathbf{k}_{2\perp}|, |\mathbf{k}_{3\perp}|\gg m$.

9. СЕЧЕНИЕ ПРОЦЕССА

Как было предложено в [13], для того чтобы при наблюдении расщепления фотона преодолеть связанные с фоном трудности, необходимо регистрировать события с

$|\mathbf{f}_{2,3}| \geq f_0$, где угол $f_0 \ll 1$ определяется экспериментальными условиями. Рассмотрим сечение процесса, проинтегрированное по $\mathbf{f}_3$ в области $|\mathbf{f}_3| > f_0$. Интересно сравнить результат для этого сечения $(d\sigma/dx\, d\mathbf{f}_2)$, полученный из (33) и (26), с сечением, найденным с помощью метода эквивалентных фотонов $(d\sigma_{approx}/dx\, d\mathbf{f}_2)$. Большой логарифм соответствует вкладу области $\Delta \ll \rho = |\omega_2\mathbf{f}_2 - \omega_3\mathbf{f}_3)/2|$, где $f_3 \approx xf_2/(1-x)$. Взяв интеграл по Δ^2 в (29) от Δ^2_{min} до Δ^2_{eff}, где (см. [16])

$$\Delta^2_{min} = \Delta^2_{\parallel} = \left[\omega_1 f_2^2 x/2(1-x)\right]^2, \quad \Delta^2_{eff} = \rho^2 = (\omega_1 x f_2)^2,$$

и просуммировав по поляризациям конечных фотонов, получаем в случае неэкранированного кулоновского потенциала

$$\frac{d\sigma_{approx}}{dx\, d\mathbf{f}_2} = \frac{8Z^2\alpha^5}{\pi^3\omega_1^2}\, \frac{\bar{g}(x)}{x^2 f_2^4} \ln\frac{2(1-x)}{f_2}\, \vartheta\left(\frac{x}{1-x}f_2 - f_0\right). \tag{36}$$

Для случая экранированного потенциала приближенное сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma_{approx}}{dx\, d\mathbf{f}_2} = \frac{4Z^2\alpha^5}{\pi^3\omega_1^2}\, \frac{\bar{g}(x)}{x^2 f_2^4} \left(2\ln\frac{\omega_1 x f_2}{\beta_0} + \gamma\right) \vartheta\left(\frac{x}{1-x}f_2 - f_0\right). \tag{37}$$

Функция γ в (37) равна

$$\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2(\ln a_i + 1) - 2\sum_{i>j} \alpha_i\alpha_j \frac{a_i \ln a_i - a_j \ln a_j}{a_i - a_j}, \quad a_i = b_i^2 + \frac{\Delta^2_{min}}{\beta_0^2}, \tag{38}$$

а коэффициенты α_i, b_i и β_0 определены в (35). Если $\Delta^2_{min}/\beta_0^2 \gg 1$, то $\gamma = -\ln(\Delta^2_{min}/\beta_0^2)$ и выражение (37) переходит в (36). Если $\Delta^2_{min}/\beta_0^2 \ll 1$, то $\gamma = -0.158$. Для случая неэкранированного потенциала зависимость $\sigma_0^{-1} d\sigma/dx d\mathbf{f}_2$ от f_2/f_0 показана на рис. 4 при $f_0 = 10^{-3}$ и $x = 0.7$ (кривая *1*), $x = 0.3$ (кривая *2*), где

$$\sigma_0 = \frac{4Z^2\alpha^5 \bar{g}(x)}{\pi^3\omega_1^2 f_0^4},$$

а функция $\bar{g}(x)$ определена в (31). При $x = 0.7$ кривая, соответствующая сечению (36), практически совпадает с кривой *1*. При $x = 0.3$ различие между приближенным и точным сечениями является весьма существенным (на рис. 4 кривая *3* соответствует сечению, найденному в приближении эквивалентных фотонов при $x = 0.3$). Однако при $x = 0.3$ сечение $d\sigma/dx$ с хорошей точностью совпадает с сечением, найденным из (36). Это является следствием того, что $d\sigma/dx$ не меняется при замене $x \to 1-x$, а при $x = 0.7$, как мы уже отмечали, приближенный результат (36) хорошо согласуется с точным. При $x = 0.5$ существует заметное различие между точным и приближенным результатами (см. рис. 5). Это связано с тем, что большой логарифм возникает в результате интегрирования по $\mathbf{f}_3$ в области $|(1-x)\mathbf{f}_3 + x\mathbf{f}_2| \ll xf_2$. После интегрирования по азимутальному углу φ между векторами $\mathbf{f}_2$ и $-\mathbf{f}_3$ мы должны интегрировать по f_3 от f_0 до $xf_2/(1-x)$ и от $xf_2/(1-x)$ до бесконечности. Если $xf_2/(1-x) \approx f_0$, то вклад первой области исчезает и сечение становится приблизительно в два раза меньше, чем сечение (36), что видно на рис. 5.

Так как амплитуды (33) получены в приближении нулевой массы, интересно оценить точность этого приближения. Численные результаты для сечения $d\sigma/dx\, d\mathbf{f}_2$ были

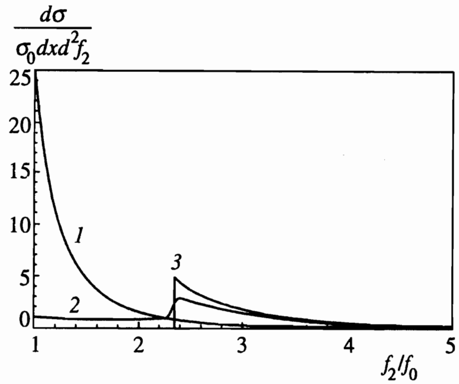

Рис. 4

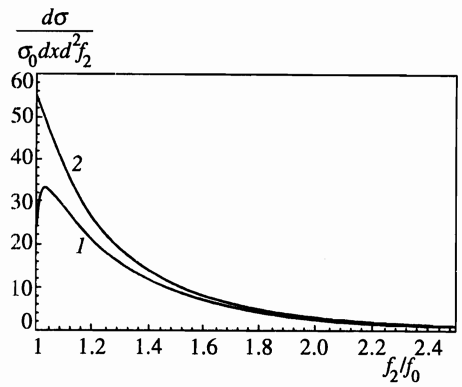

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость $\sigma_0^{-1} d\sigma/dxd\mathbf{f}_2$ от f_2/f_0 для неэкранированного потенциала, $f_0 = 10^{-3}$, $x = 0.7$ (кривая *1*), $x = 0.3$ (кривая *2*), величина σ_0 определена в тексте. Кривая *3* соответствует приближению эквивалентных фотонов при $x = 0.3$

Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для $x = 0.5$ (кривая *1*). Кривая *2* соответствует приближению эквивалентных фотонов

Сечение расщепления фотона $d\sigma/\omega_1 dx\, d\mathbf{f}_2$ в барн/ГэВ для $Z = 79$, $x = 0.87$

f_2 мрад	$\omega_1 = 1.7$ ГэВ		$\omega_1 = 3.4$ ГэВ		$\omega_1 = 6.1$ ГэВ	
	Настоящая работа	Работа [17]	Настоящая работа	Работа [17]	Настоящая работа	Работа [17]
1.2	22.7	21.1	3.11	3.25	0.57	0.56
1.6	7.5	7.4	0.99	1.03	0.18	0.18
2.0	3.09	3.12	0.40	0.41	0.071	0.072
2.4	1.48	1.51	0.19	0.19	0.034	0.034
2.8	0.79	0.80	0.10	0.10	0.018	0.018

получены в работе [17] (см. табл. V в [17]) для $Z = 79$, $x = 0.87$, $\omega_1 = 1.7$ ГэВ, 3.4 ГэВ, 6.1 ГэВ и для пяти значений угла f_2 в интервале 1.2–2.8 мрад. В этих расчетах масса электрона учитывалась точно. Данные, приведенные в таблице, показывают хорошее согласие наших результатов с результатами [17]. Только в точке, соответствующей наименьшему значению поперечной компоненты импульса $k_{2\perp} = 1.77$ МэВ, ошибка достигает 7%.

Для случая неэкранированного потенциала сечение $d\sigma/dx$ с хорошей точностью аппроксимируется формулой

$$\frac{d\sigma_{coul}}{dx} = \pi f_0^2 \sigma_0 \left[\frac{\vartheta(x-1/2)}{x^2}\left(2\ln\frac{2(1-x)}{f_0} - 1 - F(x)\right) + (x \leftrightarrow 1-x)\right], \qquad (39)$$

где

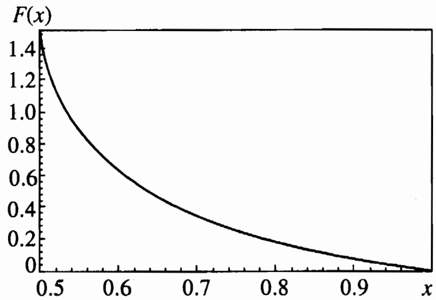

Рис. 6

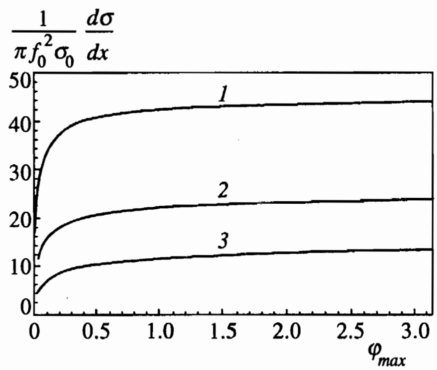

Рис. 7

Рис. 6. Функция $F(x)$ (40)

Рис. 7. Зависимость $(\pi f_0^2\sigma_0)^{-1}d\sigma(\varphi_{max})/dx$ от φ_{max} для неэкранированного потенциала при различных x: *1* — $x = 0.5$, *2* — $x = 0.7$, *3* — $x = 0.9$; $f_0 = 10^{-3}$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1-x} + \frac{2x-1}{(1-x)^2}\ln\left(2-\frac{1}{x}\right). \tag{40}$$

Если $\omega_1^2 f_0^4/\beta_0^2 \ll 1$, то соответствующее выражение для сечения в экранированном потенциале имеет вид

$$\frac{d\sigma_{scr}}{dx} = \pi f_0^2\sigma_0\left[\frac{\vartheta(x-1/2)}{x^2}\left(2\ln\frac{\omega_1 x f_0}{\beta_0} + 0.842 - F(x)\right) + (x \leftrightarrow 1-x)\right], \tag{41}$$

где функция $F(x)$ определена в (40). Функция $F(x)$ характеризует разницу между точным сечением и сечением, полученным с помощью метода эквивалентных фотонов. Из рис. 6 видно, что эта разница становится существенной только при значениях x близких к 0.5. Для полных же сечений она составляет несколько процентов.

Неравенство $\Delta \ll \rho$, обеспечивающее применимость метода эквивалентных фотонов, соответствует малому углу φ между векторами $\mathbf{f}_2$ и $-\mathbf{f}_3$ (т.е. ситуации, когда векторы $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ имеют почти противоположные направления). Поэтому интересно рассмотреть сечение $d\sigma(\varphi_{max})/dx$, проинтегрированное по углу φ от $-\varphi_{max}$ до φ_{max}. В случае неэкранированного потенциала зависимость $(\pi f_0^2\sigma_0)^{-1}d\sigma(\varphi_{max})/dx$ от φ_{max} показана на рис. 7 для $f_0 = 10^{-3}$ и различных значений x. Видно, что сечение приближается к своему полному значению при сравнительно больших углах φ_{max}. Такое же заключение верно для случая экранированного потенциала.

Один из авторов (Р. Н. Л.) благодарен Международному центру фундаментальной физики в Москве за поддержку работы (грант INTAS 93-2492-ext).

Литература

1. L. Meitner, H. Kösters (and M. Delbrück), Z. Phys. **84**, 137 (1933).
2. A. I. Milstein and M. Schumacher, Phys. Rep. **243**, 183 (1994).
3. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. **182**, 1873 (1969).
4. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **2**, 2444 (1970).
5. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **5**, 3077 (1972).
6. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko, Phys. Lett. A **95**, 135 (1983).
7. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **85**, 14 (1983).
8. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko, Phys. Lett. A **90**, 447 (1982).
9. R. N. Lee and A. I. Milstein, Phys. Lett. A **198**, 217 (1995).
10. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, ЖЭТФ **107**, 1393 (1995).
11. G. Jarlskog, L. Jönsson, S. Prünster et al., Phys. Rev. D **8**, 3813 (1973).
12. Р. М. Джилкибаев, Э. А. Кураев, В. С. Фадин, В. А. Хозе, Письма в ЖЭТФ **19**, 73 (1974).
13. A. I. Milstein and B. B. Wojttsekhowski, Preprint INP 91-14, Novosibirsk (1991).
14. Y. Shima, Phys. Rev. **142**, 944 (1966).
15. V. Costantini, B. De Tollis, and G. Pistoni, Nuovo Cimento A **2**, 733 (1971).
16. V. N. Baier, V. M. Katkov, E. A. Kuraev, and V. S. Fadin, Phys. Lett. B **49**, 385 (1974).
17. A. M. Johannessen, K. J. Mork, and I. Overbo, Phys. Rev. D **22**, 1051 (1980).
18. H.-D. Steinhofer, Z. Phys. C **18**, 139 (1983).
19. G. Z. Moliere, Naturforsch. **2a**, 133 (1947).