

МАГНИТОГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В СИЛЬНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

С. В. Старченко

*Геофизическая обсерватория «Борок», отделение Института физики Земли
Российской академии наук
152742, Борок, Ярославская обл., Россия*

Поступила в редакцию 15 мая 1997 г.

Предлагается аналитическое решение классической магнитогидродинамической (МГД) задачи о почти твердотельном вращении вязкого и проводящего сферического слоя жидкости в осесимметричном потенциальном магнитном поле. Впервые в новом приближении сильного поля описаны крупномасштабные потоки, ограниченные жесткими сферами. Решены две задачи: 1) обе сферы — изоляторы; 2) внешняя сфера — изолятор, а внутренняя — проводник. Осесимметричные течения и азимутальные магнитные поля поддерживаются слегка более быстрым вращением внутренней сферы. Основная регенерация происходит в пограничных и сдвиговых МГД-слоях. Описанные здесь впервые сдвиговые слои сглаживают сильные градиенты на границах МГД-структур, охваченных ими. Азимутальное магнитное поле практически отсутствует внутри этих оригинальных структур, ограниченных потенциальными изолиниями, касающимися сфер. Наложенное постоянное магнитное поле создает жесткую МГД-структуру вне осевого цилиндра, касающегося внутренней сферы. Внутри цилиндра вращение быстрее, а меридиональный поток зависит от высоты. Магнитный диполь формирует структуру, касающуюся внешнего экватора. Вне структуры вращение тоже твердотельно в случае, когда обе сферы — изоляторы. При наличии проводящей сферы жидкость вращается везде дифференциально, а у оси и внутри МГД-структуры даже быстрее внутренней сферы. Последний пример общего решения — квадрупольное магнитное поле. В этом случае образуются две экваториально-симметричные МГД-структуры, которые вращаются вместе с внутренней сферой. Вне структур, как и в наиболее общем случае, вращение дифференциально, азимутальное магнитное поле убывает как первая степень наложенного поля, а меридиональный поток — как квадрат в первой задаче и как куб во второй.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В середине нашего века Праудман [1] сформулировал задачу о почти твердотельном вращении вязкой несжимаемой жидкости между концентрическими сферами. Он линеаризовал задачу, пользуясь малостью разности угловых скоростей $\Delta\Omega$ вращения сфер, характеризуемой очень малым параметром

$$\epsilon \equiv \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \ll 1. \quad (1)$$

Аналитическое описание крупномасштабного течения было проведено [1] в приближении быстрого вращения ($\delta \ll 1$) при малой толщине вязкого слоя Экмана

$$\delta \equiv \frac{\sqrt{\nu/\Omega}}{L}. \quad (2)$$

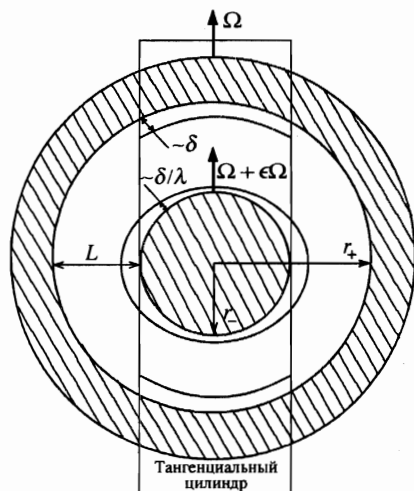


Рис. 1. Вращение внутренней сферы радиуса r_+ на $\epsilon\Omega$ быстрее вращения внешней (r_-) сферы имеющей угловую скорость Ω . Изображены пограничные слои Экмана ($\sim \delta$) и Гартмана ($\sim \delta/\lambda$). Толщина ($r_+ - r_-$) сферического слоя равна L

Здесь ν — кинематическая вязкость, Ω — угловая скорость вращения внешней сферы и L — толщина сферического слоя жидкости изображенного на рис. 1.

Крупномасштабное течение состоит из дифференциального вращения и слабого, $O(\delta)$, меридионального потока, зависящих только от цилиндрического радиуса s внутри осевого тангенциального цилиндра, касающегося внутренней сферы. Вся жидкость вне тангенциального цилиндра твердотельно вращается вместе с внешней сферой. С последней мы свяжем систему цилиндрических координат (s, φ, z) , где расстояния измеряются в L . Мелкомасштабные течения сконцентрированы в пограничном слое Экмана и в свободном сдвиговом слое, который обеспечивает возвратный меридиональный поток и сглаживает сильные градиенты у тангенциального цилиндра. Структура этого слоя определена Стюартсоном [2] лишь через десять лет после публикации работы [1].

Значительно позже Рузмайкин [5, 6] обратил внимание на важность решения Праудмана–Стюартсона для геодинамо, а Старченко [7] обосновал возможность аналитического решения соответствующей более сложной магнитогидродинамической (МГД) задачи. С тех пор эта задача находится в центре внимания исследователей, использующих многочисленные модели гидромагнитной конвекции, динамо и недр планет (см. [8–11] и ссылки в них). Семь лет предпринимались неоднократные, но безуспешные попытки найти максимально общее аналитическое решение этой МГД задачи (см. [12, 13]). И только совсем недавно [14] стало ясно, что надо начать с корректной постановки задачи.

Первый шаг в этом направлении был уже сделан в численной модели Холлербаха [15]. Он рассмотрел действие центрального осевого магнитного диполя на систему Праудмана–Стюартсона (см. рис. 1), в которой жидкость с постоянной проводимостью σ и плотностью ρ подвержена сильному влиянию малого потенциального магнитного поля. Воздействие на рассматриваемое осесимметричное течение даже большого азимутального магнитного поля значительно слабее, поскольку азимутальное поле не может пересекать ни один из очень тонких слоев, формирующих течение [16–18]. К сожалению, Холлербах и авторы последующей важной аналитической работы [14] не сделали следующего шага в постановке задачи — не сформулировали приближение сильного потенциального поля, а ограничились только исследованием влияния очень слабых по-

лей. Даже эти слабые и не представляющие потому практического интереса поля, как оказалось, коренным образом изменяют течение Праудмана–Стюартсона. Поэтому логично в настоящей работе сформулировать приближение сильного поля для успешного аналитического разрешения МГД-задачи.

Итак, мы считаем, что изображенная на рис. 1 система находится в сильном потенциальном магнитном поле \mathbf{B} , измеряемом размерной величиной B_p . Соответственно очень велик главный безразмерный параметр задачи

$$\lambda = \frac{B_p}{\sqrt{\rho\Omega/\sigma}} \gg 1. \quad (3)$$

Такой подход позволяет практически не ограничивать другие базовые параметры задачи, т. е. считать, что мы применяем любые δ и

$$R_m = \mu\sigma\Omega L^2, \quad (4)$$

где R_m — магнитное число Рейнольдса, а μ — магнитная проницаемость жидкости, обычно принимаемая равной проницаемости вакуума μ_0 в системе СИ.

Важно отметить, что в отличие от всех предыдущих работ (включая численные) мы не ограничиваем себя ни приближением быстрого вращения ($\delta \ll 1$), ни большими и ни малыми числами Рейнольдса R_m . Поэтому результаты работы могут быть применены не только в геофизике или теории МГД-динамо. Их можно использовать в астрофизике, моделируя магнитоактивные недра планет, Солнца и звезд. Интересно сравнить наши результаты с соответствующим численным экспериментом. Более того, излагаемую здесь теорию вполне можно использовать как для постановки эксперимента, так и для сравнения с результатами уже проведенных и проводящихся лабораторных исследований весьма разнообразных жидких систем, вращающихся в магнитном поле.

Представим размерные поля скорости \mathbf{v} и магнитной индукции \mathbf{b} , пользуясь их соленоидальностью и осесимметричностью, в стандартном виде [8–14] с учетом последующей линеаризации задачи:

$$\mathbf{v} = \epsilon L\Omega([\nabla(\mathbf{e}_\varphi s^{-1}\chi)] + s\zeta\mathbf{e}_\varphi), \quad (5)$$

$$\mathbf{b} = B_p(\mathbf{B} + \epsilon R_m [\nabla(\mathbf{e}_\varphi s^{-1}\Psi)] + \epsilon R_m s\mathbf{J}\mathbf{e}_\varphi), \quad (6)$$

где безразмерные величины \mathbf{e}_φ , $s\mathbf{J}$ и ζ — соответственно единичный вектор в направлении роста φ , азимутальное магнитное поле и локальная угловая скорость вращения, а Ψ и χ — безразмерные функции меридионального потока полей магнитной индукции и скорости. Магнитное поле (6) и течение (5) подчиняются линеаризованной по малому параметру ϵ полной МГД-системе (подробности вывода см. в [14]):

$$2\frac{\partial\chi}{\partial z} + \delta^2 s \mathcal{D}(s\zeta) + \lambda^2 \mathbf{B}\nabla(s^2 J) \equiv [A] = 0, \quad (7)$$

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \delta^2 s^{-1} \mathcal{D}^2(s^{-1}\chi) + \lambda^2 \mathbf{B}\nabla(s^{-2} \mathbf{B}\nabla\chi) \equiv [B] = 0, \quad (8)$$

$$s^{-1} \mathcal{D}(sJ) + \mathbf{B}\nabla\zeta \equiv [C] = 0, \quad (9)$$

$$s \mathcal{D}(s^{-1}\Psi) + \mathbf{B}\nabla\chi \equiv [D] = 0, \quad (10)$$

где модифицированный лапласиан $\mathcal{D} = \Delta - s^{-2}$.

Граничные условия прилипания на жестких границах внутренней и внешней сфер с радиусами соответственно r_- и r_+ следующие:

$$\chi = \frac{\partial\chi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_-, r_+, \quad (11)$$

$$\zeta = 1 \quad \text{при} \quad r = r_-, \quad (12)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{при} \quad r = r_+. \quad (13)$$

Граничное условие для отсутствия азимутального магнитного поля у изолированной сферы имеет вид

$$J = 0. \quad (14)$$

На границе проводящей сферы должны выполняться условия непрерывности:

$$J = j, \quad \frac{\partial(r^2 J)}{\partial r} = H \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r}, \quad (15)$$

где H — отношение проводимости сферы к проводимости σ жидкости, а j — азимутальное магнитное поле внутри жесткой проводящей сферы. Уравнение для определения этого поля получается из (9) и имеет вид

$$\mathcal{D}(sj) = 0. \quad (16)$$

Закончим раздел постановкой двух весьма различных МГД-задач, представляющих наибольший практический интерес.

Задача 1: изолятор–изолятор. Обе сферы — изоляторы. Мы ищем ζ, J, χ из уравнений (7)–(9), применяя граничные условия (11)–(14) для обеих сфер.

Задача 2: изолятор–проводник. Внешняя сфера — изолятор, внутренняя — проводник. Ищем ζ, J, χ, j из уравнений (7)–(9), (16) применяя граничные условия (11)–(13) для обеих сфер, затем применяем (14) для внешней сферы и (15) для внутренней.

После того как найдена функция χ , меридиональное магнитное поле Ψ можно легко определить из (10), добавляя соответствующие граничные условия. Но поскольку реальное меридиональное поле $[\nabla(s^{-1}\Psi\mathbf{e}_\varphi)]$ практически неразличимо на фоне наложенного потенциального поля \mathbf{B} , мы не будем здесь исследовать Ψ .

2. ИЗОЛЯТОР–ИЗОЛЯТОР: АСИМПТОТИКИ И СТРУКТУРЫ

Здесь мы представим главные асимптотики и соответствующие им структуры общего аналитического решения первой МГД-задачи, поставленной выше.

В приближении большого потенциального поля (3) мы имеем малый параметр λ^{-2} при старших производных в исходных гидромагнитных уравнениях (7)–(9). Это позволяет существенно понизить порядок системы, учитывая соответствующие вязкие эффекты, $O(\delta^2)$, только в узких пограничных и сдвиговых МГД-слоях. Сдвиговые слои описаны в следующем разделе. Задача о граничных слоях Гартмана–Экмана уже была решена Лопером [19, 20] и Старченко [7] в приближении быстрого вращения. Далее решается аналогичная задача в приближении сильного наложенного поля (3).

2.1. Пограничные слои и асимптотические уравнения

Радиальная производная перпендикулярна к тонкому пограничному слою. Поэтому здесь можно пренебречь другими производными, записывая исходную систему (7)–(9) в сферической системе координат (r, ϑ) . Интегрируя (9), получим внутри слоя

$$\frac{\partial J_s}{\partial r} = -B_r(\zeta_s - \zeta). \quad (17)$$

Здесь и далее индекс s обозначает мелкомасштабные величины, сконцентрированные в узких слоях, а r — радиальные компоненты. Все величины без индекса s условимся считать крупномасштабными и практически неизменными поперек слоя. Интегрируя (7) и (8) поперек рассматриваемого радиального слоя, получим с учетом (17)

$$\frac{2 \cos \vartheta}{s^2} \frac{\partial \chi_s}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial r^2} - \lambda^2 B_r^2 (\zeta_s - \zeta) = 0, \quad (18)$$

$$2 \cos \vartheta s^2 (\zeta_s - \zeta) - \delta^2 \frac{\partial^3 \chi_s}{\partial r^3} + \lambda^2 B_r^2 \frac{\partial \chi_s}{\partial r} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнений (18), (19), удовлетворяющее граничным условиям прилипания (11)–(13) без условия непроникновения $\chi_s = 0$, удобно записать в комплексном виде

$$\zeta_s + \frac{i}{s^2} \frac{\partial \chi_s}{\partial r} = \zeta + (\zeta_{\pm} - \zeta) \exp \left(\pm \frac{r - r_{\pm}}{\delta} \sqrt{\lambda^2 B_r^2 + 2i \cos \vartheta} \right). \quad (20)$$

Здесь верхний знак (+) соответствует внешней сфере $r = r_+$, где $\zeta_+ = 0$, а нижний знак (–) — внутренней сфере $r = r_-$, где $\zeta_- = 1$.

Интегрируя теперь (20), (17) и применяя граничное условие непроникновения вместе с условием (14), получим у внешней границы тонкого МГД-слоя

$$\chi = \pm \delta s^2 (\zeta_{\pm} - \zeta) \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 B_r^4 + 4 \cos^2 \vartheta} - \lambda^2 B_r^2}{2\lambda^4 B_r^4 + 8 \cos^2 \vartheta}}, \quad (21)$$

$$J = \pm \delta B_r (\zeta_{\pm} - \zeta) \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 B_r^4 + 4 \cos^2 \vartheta} + \lambda^2 B_r^2}{2\lambda^4 B_r^4 + 8 \cos^2 \vartheta}}. \quad (22)$$

Это — граничные условия для крупномасштабных величин вне разрешенных здесь пограничных слоев Гартмана–Экмана. Раскладывая (21), (22) в ряды по малому параметру $\lambda^{-1} \ll 1$, получим асимптотические условия на границах слоя Гартмана:

$$\chi = -\lambda^{-3} \delta s^2 \left| \frac{\cos \vartheta}{B_r^3} \right| \zeta + O(\lambda^{-7}), \quad J = -\lambda^{-1} \delta S \zeta + O(\lambda^{-5}) \quad (23)$$

для внешней сферы $r = r_+$ и

$$\chi = \lambda^{-3} \delta (\zeta - 1) s^2 \left| \frac{\cos \vartheta}{B_r^3} \right| + O(\lambda^{-7}), \quad J = \lambda^{-1} \delta S (\zeta - 1) + O(\lambda^{-5}) \quad (24)$$

для внутренней сферы $r = r_-$. Здесь $S = \pm 1$ — знак радиальной компоненты B_r наложенного потенциального поля. Итак, мы получили всего четыре граничных условия

в (23), (24) вместо восьми в (11)–(14). Соответственно в два раза должен понизиться порядок системы, описывающей крупномасштабные поля, по сравнению с исходной системой. Такое понижение достигается тем, что в первом приближении опускается не только кинематическая вязкость ($\delta^2 s \mathcal{D}(s\zeta)$ в (7) и $\delta^2 s^{-1} \mathcal{D}^2(\chi/s)$ в (8)), но и магнитная ($(s^{-1} \mathcal{D}(sJ))$ в (9)). Корректность такого пренебрежения будет подтверждена еще раз ниже, когда мы получим общее решение задачи.

Соответствующее формальное разложение по малому параметру λ^{-1} ,

$$\zeta = \zeta_0 + \lambda^{-1} \zeta_1 + \dots, \quad J = \lambda^{-1} J_0 + \lambda^{-2} J_1 + \dots, \quad \chi = \lambda^{-2} \chi_0 + \lambda^{-3} \chi_1 + \dots, \quad (25)$$

позволит нам найти далее решение не только в первом (индекс «0»), но и во втором (индекс «1») приближениях. Система первого приближения получается подстановкой (25) в (7)–(9) и приравниванием коэффициентов при главных степенях $\lambda \gg 1$:

$$\mathbf{B}\nabla(s^2 J_0) = 0, \quad 2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} + \mathbf{B}\nabla(s^{-2} \mathbf{B}\nabla \chi_0) = 0, \quad \mathbf{B}\nabla \zeta_0 = 0. \quad (26)$$

Эта система четвертого порядка должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$J_0 = -\delta S \zeta_0, \quad \chi_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = r_+, \quad (27)$$

$$J_0 = \delta S(\zeta_0 - 1), \quad \chi_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = r_-, \quad (28)$$

которые выводятся соответственно из (23) и (24). Аналогично выводится следующая система второго приближения (29) вместе со своими граничными условиями (30):

$$\delta^2 s \mathcal{D}(s\zeta_0) + \mathbf{B}\nabla(s^2 J_1) = 0, \quad (29a)$$

$$2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \mathbf{B}\nabla(s^{-2} \mathbf{B}_0 \nabla \chi_1) = 0, \quad (29b)$$

$$s^{-1} \mathcal{D}(sJ_0) + \mathbf{B}\nabla \zeta_1 = 0, \quad (29b)$$

$$J_1 = -\delta S \zeta_1, \quad \chi_1 = -\delta s^2 \left| \frac{\cos \vartheta}{B_r^3} \right| \zeta_0 \quad \text{при} \quad r = r_+, \quad (30a)$$

$$J_1 = \delta S \zeta_1, \quad \chi_1 = \delta s^2 \left| \frac{\cos \vartheta}{B_r^3} \right| (\zeta_0 - 1) \quad \text{при} \quad r = r_-. \quad (30b)$$

Первое и второе уравнения в (26) формируют простую систему

$$\mathbf{B}\nabla(s^2 J_0) = \mathbf{B}\nabla \zeta_0 = 0,$$

которая является полной для нахождения крупномасштабных величин J и ζ с применением только первых граничных условий в (27) и (28). Слабый меридиональный поток $\chi = O(\lambda^{-2})$ находится позже с использованием оставшихся граничных условий в (27), (28). В вырожденном случае ($\zeta_0 = \text{const}$) вращение твердотельно везде, и тогда $\chi = O(\lambda^{-3} \delta)$ ищется из системы второго приближения (29b) со вторыми граничными условиями из (30).

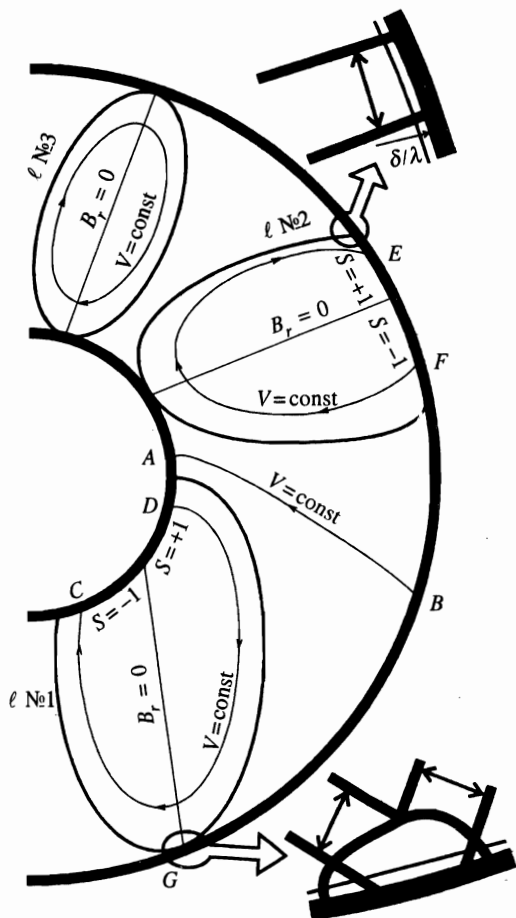


Рис. 2. Три топологически возможных позиции кривых ℓ (№ 1, 2, 3), охватывающих МГД-структуры в сферическом слое, изображенном на рис. 1. На увеличенных фрагментах приведены структуры МГД-слоев: сверху — сдвиговый слой толщиной $\sqrt{\delta/\lambda}$ обозначен стрелкой, внизу — холмообразный слой пересекает два сдвиговых слоя

2.2. Общие решения внутри и вне кривых ℓ

Общее решение системы (26) без среднего уравнения удобно записать в виде

$$\zeta_0 = G(V), \quad J_0 = s^{-2}F(V), \quad (31)$$

где G, F — свободные функции, определяемые граничными условиями, а заданная потоковая функция V определяет наложенное потенциальное поле $\mathbf{V} = [\nabla(Ve_\varphi/s)]$. Из полученного решения следует, что характеристики систем (26) и (30) параллельны наложенному магнитному полю \mathbf{V} или, другими словами, лежат на изолиниях $V = \text{const}$. Если изолиния пересекает обе сферические границы, то разные граничные условия (27), (28) прилагаются у разных сфер (см. точки A и B на рис. 2). Иначе, либо одно и то же граничное условие дважды прилагается у разных точек одной сферы (C и D, E и F на рис. 2), либо изолиния совсем не пересекает границ (см. кривую ℓ № 3 на рис. 2).

Итак, внутри сферического слоя есть два типа изолиний $V = \text{const}$, разделяемых специальной кривой, касающейся только одной точки у одной из двух сфер. Назовем эту кривую кривой ℓ . Всего три топологически разных кривых ℓ могут существовать

в нашем сферическом слое, что и отражено качественно на рис. 2. Начнем с кривой, № 1, наиболее распространенной в астрофизических приложениях. Эта кривая ℓ касается внешней сферы в нижней части рисунка. Такая кривая пересекает две точки у внутренней сферы, образуя с ней замкнутую область. Внутри этой области решение (31) с примененными дважды первыми граничными условиями из (28) имеет вид

$$J_0 = 0, \quad \zeta_0 = 1, \quad (32)$$

поскольку знак функции $S = \pm 1$ различен в граничных точках C и D , соединенных изолинией $V = \text{const}$ в нижней части рис. 2. Соответственно область внутри кривой ℓ вращается вместе с внутренней сферой и оттуда «изгоняется» азимутальное поле J_0 .

Кривая ℓ № 2 характерна для лабораторных систем и расположена в середине рис. 2. Эта кривая касается одной точки у внутренней сферы. Пересекая в двух точках внешнюю сферу, она образует вместе с ней другую замкнутую область, внутри которой, действуя по аналогии с предыдущим случаем, получим

$$J_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0. \quad (33)$$

Таким образом, область вращается вместе с внешней сферой и тоже «изгоняет» поле J_0 .

Последняя из возможных кривая ℓ № 3 находится в верхней части рис. 2. Она касается обеих сфер и поэтому весьма маловероятна в любых практических приложениях. Кривая замкнута и внутри нее, по аналогии с предыдущими случаями,

$$J_0 = 0, \quad \zeta_0 = \zeta_3 = \text{const}, \quad (34)$$

где постоянная $0 \leq \zeta_3 \leq 1$ может быть определена только после решения сопряженной задачи для оригинального МГД-слоя вдоль кривой ℓ (см. ниже).

Вне любой из описанных выше кривых ℓ мы получим, вообще говоря, нетривиальные решения J_0 и ζ_0 , поскольку будем прилагать разные граничные условия, (27) и (28), у разных сфер (см. точки A и B на рис. 2). Эти решения запишем в виде, удобном для последующих практических приложений:

$$\zeta_0 = [1 + S_+(s_+/s_-)^2/S_-]^{-1}, \quad (35)$$

$$J_0 = -\delta S_+(s_+/s_-)^2 \zeta_0. \quad (36)$$

Здесь расстояния от оси вращения $s_{\pm}(V)$ измеряются до соответствующих точек пересечения изолинии $V = \text{const}$ с внешней (+) и внутренней (-) сферами. Аналогично связаны со сферами функции $S_{\pm}(V)$, определяющее знак компоненты B_r .

Получив общее решение (32)–(36), оценим диапазон, в котором оно корректно, и тем самым подтвердим правомочность изначально сделанных упрощений. По порядку величины в пространстве параметров (λ, δ) в невырожденном случае из (25), (35), (36) имеем

$$J = O(\delta/\lambda), \quad \zeta = O(1), \quad \chi = O(1/\lambda^2). \quad (37)$$

Помещая эти оценки в исходную систему (7)–(9), получим неравенства

$$\lambda^{-2} + \delta^2 \ll \lambda\delta, \quad \lambda^{-2}\delta^2 \ll 1, \quad \lambda^{-1}\delta \ll 1,$$

которые являются условиями правомочности сделанных здесь пренебрежений «вязкими» членами с оператором \mathcal{D} в исходной системе (7)–(9). Все неравенства удовлетворяются, если при любом δ

$$\lambda \gg \max(1, \delta^{-1/3}), \quad (38)$$

что подтверждает корректность наших допущений в приближении сильного наложенного потенциального поля (3) в невырожденном случае. В вырожденном случае получаемая из (35) угловая скоростью вращения постоянна, $\zeta_0 = \text{const}$. Поэтому оценка для χ в (37) заменяется, а диапазон корректности (38) расширяется:

$$\chi = O(\delta\lambda^{-3}), \quad \lambda \gg 1. \quad (39)$$

3. ОРИГИНАЛЬНЫЕ СВОБОДНЫЕ СДВИГОВЫЕ МГД-СЛОИ

Обычно найденное общее нетривиальное решение (35), (36) существенно отличается от любого из тривиальных решений (32)–(34) внутри всевозможных кривых ℓ (см. рис. 2 и разд. 4 этой работы), т. е. величины ζ_0 и J_0 разрывны на кривой ℓ . Эти разрывы сглаживаются вязкостью в свободном сдвиговом МГД-слое вдоль кривой ℓ . Исследования подобных МГД-слоев, насколько нам известно, ранее не предпринимались.

Выведем основные уравнения, описывающие такой оригинальный слой, идущий вдоль кривой ℓ , определяемой частным значением потоковой функции $V(r, \theta) = V_l = \text{const}$. Наиболее подходит для описания слоя ортогональная система координат (V, U) , связанная с наложенным потенциальным полем

$$\mathbf{B} = [\nabla(V\mathbf{e}_\varphi/s)] = \nabla U. \quad (40)$$

На выделенной слоем кривой ℓ координата $V = V_l = \text{const}$, а U меняется. Вне и внутри ℓ угловая скорость ζ и преобразованное азимутальное поле

$$P \equiv (\lambda/\delta)s^2 J \quad (41)$$

являются константами порядка единицы. Вне кривой ℓ на внешней границе нашего свободного слоя получим из (34), (35) граничные условия для мелкомасштабных величин ζ_s и P_s , сконцентрированных в слое:

$$\zeta_s = \zeta(V_l) \equiv \zeta_l = \text{const}, \quad P_s = -s_-^2(\zeta_l - 1) = \text{const}. \quad (42)$$

Внутри кривой ℓ на внутренней границе слоя получим из (32)–(34) другие граничные условия для мелкомасштабных величин в слое:

$$P_s = 0, \quad \zeta_s = (1, 0, \zeta_3). \quad (43)$$

Сравнивая (42) и (43), еще раз убеждаемся в разрывности крупномасштабных величин на кривой ℓ . Разрыв идет вдоль координаты V , поэтому, описывая мелкомасштабные поля в слое, мы должны добавить соответствующие «вязкие» члены из уравнений (9) и (7) к асимптотической системе первого порядка (26). В результате получим

$$\frac{\delta}{\lambda}(\nabla V)^2 \frac{\partial^2 P_s}{\partial V^2} + s^2(\nabla U)^2 \frac{\partial \zeta_s}{\partial U} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\lambda}(\nabla V)^2 \frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial V^2} + s^{-2}(\nabla U)^2 \frac{\partial P_s}{\partial U} = 0,$$

где $(\nabla V)^2 \partial^2 / \partial V^2$ — главный член в разложении модифицированного лапласиана $\mathcal{D} = \Delta - s^{-2}$, описывающего магнитную и кинематическую вязкости соответственно в первом и втором уравнениях. Используя «растянутую» поперек слоя переменную

$$x = (V - V_l) \sqrt{\frac{\lambda}{\delta}}, \quad (44)$$

получим из приведенных выше уравнений окончательную систему уравнений в узком слое:

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial x^2} + F_Z \frac{\partial \zeta_s}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta_s}{\partial x^2} + F_P \frac{\partial P_s}{\partial U} = 0. \quad (45)$$

Здесь функции $F_Z(U) = s^2(\nabla U)^2 / (\nabla V)^2$ и $F_P(U) = s^{-2}(\nabla U)^2 / (\nabla V)^2$ заданы и зависят только от координаты U при $V = V_l = \text{const}$.

Система (45) для слоя должна удовлетворять граничным условиям (43) и (42) при x , стремящемся соответственно к $+\infty$ и $-\infty$. Кроме того, должны удовлетворяться некоторые граничные условия у одной и у другой сфер, т. е. на обоих концах слоя в направлении координаты U . Чтобы определить эти краевые условия, сравним следующую из (44), (45) характерную толщину нашего свободного слоя

$$\delta_s = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}}, \quad (46)$$

с известной толщиной δ/λ рассмотренного выше пограничного слоя Гартмана. Очевидно, что в рассматриваемых условиях $\delta_s \gg \delta/\lambda$, и поэтому мы вправе применять условие (42) или (43) как краевое условие там, где наш слой пересекает одну из сфер (например, рядом с точками E , F , D и C на рис. 2). Для мелкомасштабных переменных гартмановские краевые условия принимают вид

$$P_s = \begin{cases} s_-^2(\zeta_s - 1), & r = r_-, \\ -s_+^2 \zeta_s, & r = r_+, \end{cases} \quad (47)$$

а соответствующая структура МГД-слоев качественно изображена на верхнем фрагменте, увеличенном у точки E на рис. 2.

Значительно более сложная ситуация возникает у края слоя, где кривая ℓ лишь касается сферы (см. точку G на рис. 2). Здесь радиальная компонента наложенного поля $B_r = 0$, и поэтому слой Гартмана вырождается в особый холмообразный слой (hilly layer), который обычно толще гартмановского (см. [2, 14]). Если этот холмообразный слой все еще тоньше рассматриваемого свободного слоя (см. (46)), то мы вправе применять (47) у этого конца слоя и завершить постановку задачи для нашего свободного слоя. Иначе, нам необходимо сначала решить задачу для холмообразного слоя. Ситуация с холмообразным слоем, который толще свободного, изображена на нижнем фрагменте, увеличенном у точки G на рис. 2.

К сожалению, не существует общего аналитического решения системы для слоя (45), хотя она и довольно проста. Ее можно легко разрешить, когда конкретизировано наложенное магнитное поле. Однако и тогда мы должны преодолеть дополнительные трудности, обусловленные холмообразным слоем, подобно тому, как это сделал Стюартсон [2] лишь спустя десять лет после работы Праудмана [1]. Мы ограничимся подробным описанием только крупномасштабных полей, которое, как видно из изложенного выше, может быть сделано независимо от свободных МГД-слоев.

4. ИЗОЛЯТОР-ПРОВОДНИК: АСИМПТОТИКИ И СТРУКТУРЫ

В этом разделе мы представим общее асимптотическое решение второй задачи, поставленной в первом разделе и названной «изоляция-проводник». Поиск решения во многом аналогичен проведенному во втором разделе для первой задачи, названной «изоляция-изоляция». Поэтому далее в этом разделе мы сконцентрируем внимание лишь на том, что существенно отличает общее решение второй задачи от первой.

4.1. Пограничные слои и асимптотические уравнения

Вывод модифицированных граничных условий повторяет сделанное в п. 2.1 вплоть до условия (21). Далее мы имеем окончательно у внешней изоляционной сферы те же асимптотические граничные условия, что и (23). У внутренней проводящей сферы сохраняется неизменным только первое модифицированное граничное условие прилипания из (24). Величина мелкомасштабного магнитного поля J_s на внутренней сферической границе — это правая часть (22), взятая с верхним знаком (+). Соответственно исходные граничные условия (15) с учетом (17) принимают следующий вид для наших крупномасштабных величин (см. (16) для азимутального поля j внутри этой сферы):

$$J + B_r \delta (1 - \zeta) \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 B_r^2 + 2i \cos \vartheta}} = j, \quad 2rj - r^2 B_r (1 - \zeta) = H \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r}. \quad (48)$$

Исходя из очевидных порядковых оценок $j = O(\partial j / \partial r) \ll O(1) = \zeta$ и из всех полученных граничных условий мы вправе искать крупномасштабные величины в виде разложений

$$\zeta = 1 + \delta \lambda^{-1} \zeta_0 + \dots, \quad (J, j) = \delta \lambda^{-1} (J_0, j_0) + \dots, \quad \chi = \delta \lambda^{-3} \chi_0 + \dots \quad (49)$$

Видно, что вся жидкость стремится вращаться вместе с внутренней сферой: $\zeta \approx 1$. Поэтому ограничимся первым асимптотическим приближением (индекс «0»), которое, по существу, является аналогом второго приближения (29), рассмотренного в разд. 2. Выводя соответствующие асимптотические граничные условия, получим на изолирующей внешней сфере ($r = r_+$)

$$J_0 = -\frac{B_r}{|B_r|}, \quad \chi_0 = -s^2 \left| \frac{\cos \vartheta}{B_r^3} \right|. \quad (50)$$

На проводящей внутренней сфере при $r = r_-$ граничные условия имеют вид

$$J_0 = j_0, \quad B_r \zeta_0 = H \frac{\partial j_0}{\partial r} + 2r(H - 1)j, \quad \chi_0 = 0. \quad (51)$$

Система уравнений первого порядка существенно отличается от систем для первой задачи (см. (26), (29)), и ее удобно записать более подробно:

$$\mathbf{B}\nabla(s^2 J_0) = 0, \quad (52)$$

$$s^{-1} \mathcal{D}(s J_0) + \mathbf{B}\nabla\zeta_0 = 0, \quad (53)$$

$$2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} + \mathbf{B}\nabla(s^{-2} \mathbf{B}\nabla\chi_0) = 0. \quad (54)$$

4.2. Основные МГД-структуры и получение решения

Для рассматриваемого наложенного потенциального магнитного поля (40) общее решение уравнения (52), описывающее азимутальное поле J_0 , берется из (31). В нетривиальной области, где изолинии $V = \text{const}$ пересекают один раз каждую из сфер, произвольная функция F находится из первого граничного условия в (50) и, соответственно, общее решение для азимутального поля имеет вид

$$J_0 = -(s_+/s)^2 S_+, \quad (55)$$

где $S_+(V) = B_r / |B_r|$ при $r = r_+$ и $s_+ = s(r = r_+, V)$, как и в разд. 2.

Кроме нетривиальной области, где J_0 имеет вид (55), существуют и тривиальные области с $J_0 = 0$. Они ограничены частью сферической границы и/или кривыми ℓ трех возможных типов. Здесь мы повторяем соответствующие результаты (33), (34) из разд. 2 для кривых второго и третьего типа (см. рис. 2). Следует лишь заменить в (33), (34) ζ_0 на ζ для рассматриваемой второй МГД-задачи.

Существенное отличие кривой ℓ первого типа заключается в том, что внутри ограниченной ею области величины ζ_0 и χ_0 находятся из уравнений (53), (54) с граничными условиями (52) и с нулевыми азимутальными полями $J_0 = 0$, $j(r = r_-, \theta) = 0$. Ситуация, когда присутствуют только кривые ℓ первого типа, является наиболее распространенной в практических приложениях (см. разд. 6). Поэтому в этом разделе ограничимся построением общего решения лишь для такой ситуации. В других случаях решение можно найти аналогично (см., например, следующий раздел для кривых второго типа).

Итак, в области вне кривых ℓ первого типа мы уже получили азимутальное магнитное поле (55). В области, ограниченной любой кривой, это поле равно нулю. Таким образом, мы получаем граничные условия для поля j_0 , которое легко находим из уравнения (16), принимающего вид $\mathcal{D}(s j_0) = 0$. Теперь у нас есть все, чтобы определить ζ_0 из уравнения (53) и среднего граничного условия из (51). Заканчиваем построение решения, находя χ_0 из (54) и пользуясь последними граничными условиями из (50), (51).

Завершим этот раздел оценкой диапазона корректности полученного общего решения в пространстве параметров (λ, δ) . Из изложенного выше имеем

$$\zeta = 1 + O(\delta\lambda^{-1}), \quad J = O(\delta\lambda^{-1}) = j, \quad \chi = O(\delta\lambda^{-3}). \quad (56)$$

Подставляя эти оценки в исходные уравнения (7) и (8), определяем условия корректности пренебрежения членами, опущенными в наших асимптотических уравнениях (52) и (54) соответственно (в уравнении (53) все исходные члены из (9) сохранены)

$$\delta\lambda^{-3} + \delta^2 \ll \lambda\delta \quad \text{и} \quad \lambda^{-3}\delta^3 \ll \lambda^{-1}\delta.$$

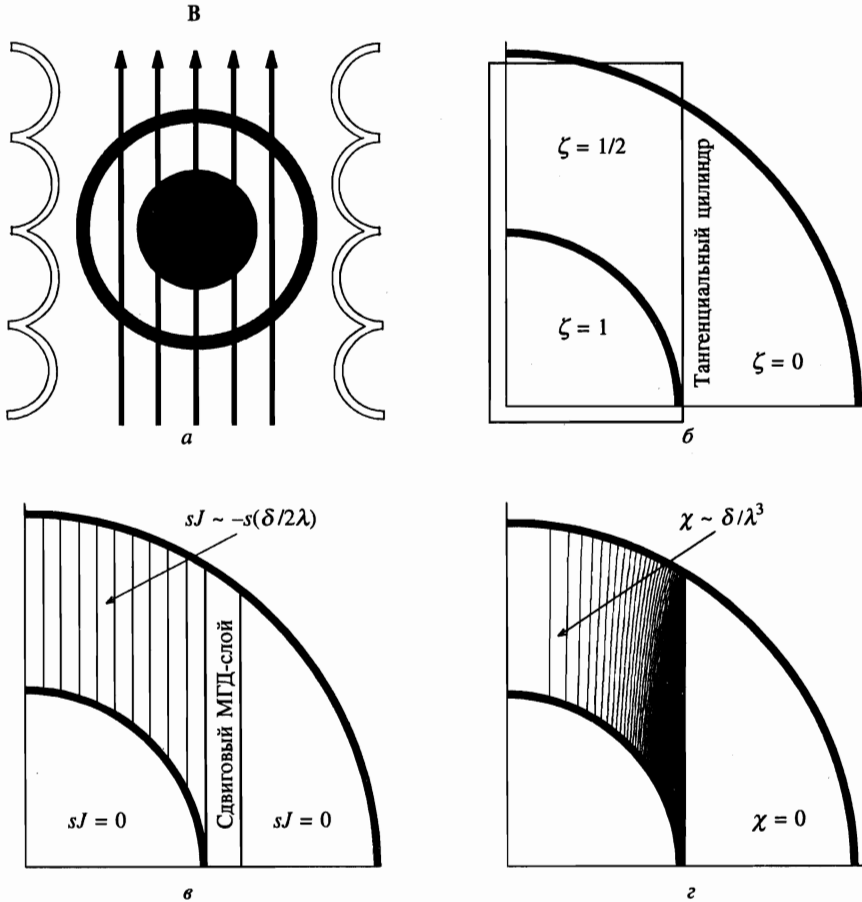


Рис. 3. а) Постоянное осевое поле, наложенное на систему, изображенную на рис. 1, когда обе сферы являются изоляторами с $r_+ = 2r_-$. б) Азимутальное вращение с угловой скоростью ζ . в) Азимутальное магнитное поле $sJ = -(\delta/\lambda)sJ_0$, изолинии проведены через 0.05 единиц sJ_0 . г) Меридиональный поток $\chi = (\delta/\lambda^3)\chi_1$, изолинии проведены через 0.01 единиц χ_1

Окончательно получаем диапазон корректности второй задачи:

$$\lambda \gg \max(1, \delta), \tag{57}$$

который шире, чем в первой задаче (см. (38)) при обычном выборе $\delta \ll 1$.

5. ПОСТОЯННОЕ ОСЕВОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Простейшее потенциальное магнитное поле направлено вдоль оси вращения z и постоянно. Его величина варьируется параметром λ , а само поле имеет простой вид

$$\mathbf{B} = e_z, \tag{58}$$

поскольку мы нормировали \mathbf{B} в разд. 1 произвольной величиной B_p . Такое магнитное поле можно наложить на нашу систему (см. рис. 1), если поместить ее в соленоид, как изображено на рис. 3а. Решение определяется одной кривой ℓ второго типа (см. рис. 2), описанной во втором и четвертом разделах этой работы для задач соответственно изолятор–изолятор и изолятор–проводник. Рассмотренная здесь кривая ℓ — это обрабатывающая тангенциального цилиндра (см. рис. 3б).

5.1. Изолятор–изолятор

Для задачи 1, поставленной в первом разделе, крупномасштабная азимутальная угловая скорость ζ и магнитное поле sJ легко выводятся из общего тривиального (33) и нетривиального (35), (36) решений, которые принимают для постоянного поля (58) вид (см. рис. 3б и 3в)

$$\zeta = \begin{cases} 1/2, & s < r_- \quad \text{и} \quad r > r_-, \\ 0, & s > r_-, \end{cases} \quad (59)$$

$$sJ = \begin{cases} -(\delta/2\lambda)s, & s < r_- \quad \text{и} \quad r > r_-, \\ 0, & s > r_-. \end{cases} \quad (60)$$

Полученные выражения (59), (60) для гидромагнитного потока даже проще, чем для немагнитного потока, описанного Праудманом и Стюартсоном [1, 2] в приближении быстрого вращения ($\delta \ll 1$). Здесь мы не ограничены величиной δ и тем не менее имеем простое твердотельное вращение как внутри, так и вне тангенциального цилиндра.

Несколько более затруднительно получить меридиональный поток χ . Для этого нам необходимо разрешить систему второго порядка (29), (30), поскольку из-за повсеместного твердотельного вращения рассматриваемый случай вырожден и

$$\chi_0 = 0. \quad (61)$$

Легко видеть, что во втором приближении угловая скорость вращения и магнитное поле обращаются в нуль:

$$J_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0. \quad (62)$$

Это значительно упрощает уравнение (29б) и соответствующие граничные условия из (30) для рассматриваемого меридионального потока:

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (63)$$

$$\chi_1 = \begin{cases} -\delta s^2 \zeta / [1 - (s/r_+)^2], & r = r_+, \\ \delta s^2 (\zeta - 1) / [1 - (s/r_-)^2], & r = r_-. \end{cases} \quad (64)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $B_r = \cos \vartheta = z/r$ для рассматриваемого постоянного магнитного поля (58). Общее решение уравнения (63) зависит от двух произвольных функций переменной s :

$$\chi_1 = zF(s) + G(s). \quad (65)$$

Свободные функции определяются из граничных условий (64) при $r = r_-$ с $z = z_-(s)$ и при $r = r_+$ с $z = z_+(s)$, где высоты внутренней (–) и внешней (+) границы — это

$$z_-(s) = r_- \sqrt{1 - (s/r_-)^2}, \quad z_+(s) = r_+ \sqrt{1 - (s/r_+)^2}. \quad (66)$$

Подставляя (65) в граничные условия (64), получим линейную систему для F и G :

$$z_+F + G = -\delta s^2 r_+^2 \zeta / z_+^2, \quad z_-F + G = \delta s^2 r_-^2 (\zeta - 1) / z_-^2. \quad (67)$$

Итак, внутри тангенциального цилиндра ($s < r_-$) результирующий меридиональный поток (см. (65)–(67)) описывается выражением

$$\chi = \frac{\delta s^2 (z_- - z) r_+^2 z_+^{-2} - (z_+ - z) r_-^2 z_-^{-2}}{2\lambda^3 (z_+ - z_-)}, \quad (68)$$

а вне тангенциального цилиндра ($s > r_-$) поток отсутствует как в первом (61), так и во втором приближениях, $\chi_1 = 0$ (см. рис. 3з).

Поток (68) сингулярен на тангенциальном цилиндре при $s = r_-$, когда z_- из (66) обращается в нуль. Эта сингулярность сглаживается вязкостью в МГД-слое, который порождается слоем, изображенным на рис. 3в. Последний описан выше в разд. 3 и сглаживает разрывы в азимутальном вращении и магнитном поле (см. (59), (60)).

5.2. Проводник–изолятор

Для задачи 2, поставленной в разд. 1, общее нетривиальное (55) и тривиальное (33) решения дают азимутальное магнитное поле в сферическом слое:

$$sJ = \begin{cases} -(\delta/\lambda)s, & s < r_- \quad \text{и} \quad r > r_-, \\ 0, & s > r_-. \end{cases} \quad (69)$$

Это поле в два раза превышает поле (60) при непроводящей внутренней сфере.

Подставляя теперь (69) в первое граничное условие (51), ищем $j = (\delta/\lambda)j_0$ внутри проводящей сферы. Для этого наложим на (16) граничные условия

$$j_0 = \begin{cases} -1, & r = r_-, \\ 0, & z = 0, \end{cases} \quad (70)$$

которые сингулярны в точке ($\theta = \pi/2$, $r = r_-$) из-за того, что азимутальное поле антисимметрично. Нам не известны методы решения (16) с сингулярными условиями типа (70). Поэтому мы специально разработали численный метод решения (подробней см. п. 6.2). Полученное этим методом решение изображено вместе с (69) на рис. 4в.

Подставим радиальный градиент поля j у внутренней сферы из численного решения уравнения (16) во второе граничное условие (51), которое принимает вид

$$\zeta_0 = \frac{H}{\cos \vartheta} \frac{\partial j_0}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_-. \quad (71)$$

Зависящая только от s угловая скорость вращения $\zeta_0(s)$ получается из (54), и результат изображен на рис. 4б. Вблизи оси жидкость вращается быстрее, чем внутренняя сфера, что является супервращением, несколько неожиданным в подобных системах, поскольку заданное вращение у внутренней сферы быстрее, чем у внешней.

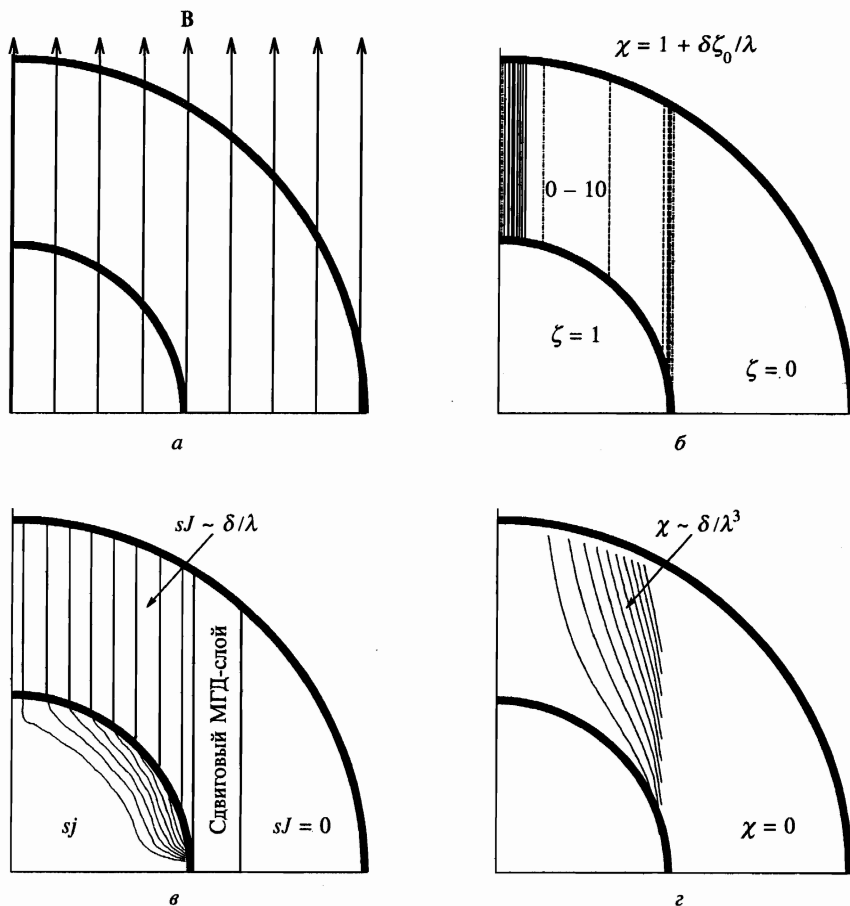


Рис. 4. То же, что и рис. 3, но с проводящей внутренней сферой

Уравнение (54) для меридионального потока χ_0 идентично уравнению (63) для χ_1 , однако граничные условия из (51), (52) проще, чем (64), и имеют вид

$$\chi_0 = \begin{cases} -s^2/[1 - (s/r_+)^2], & r = r_+, \\ 0, & r = r_-. \end{cases} \quad (72)$$

Проводя далее выкладки, аналогичные (65)–(68), но используя условия (72), получим результирующий меридиональный поток (рис. 4г) внутри тангенциального цилиндра:

$$\chi = \frac{\delta}{\lambda^3} \frac{s^2 r_+^2 (z_- - z)}{z_+^2 (z_+ - z_-)}, \quad s < r_-, \quad (73)$$

а вне цилиндра ($s > r_-$) меридионального потока нет ($\chi = 0$). Полученные распределения поля и скорости изображены на рис. 4.

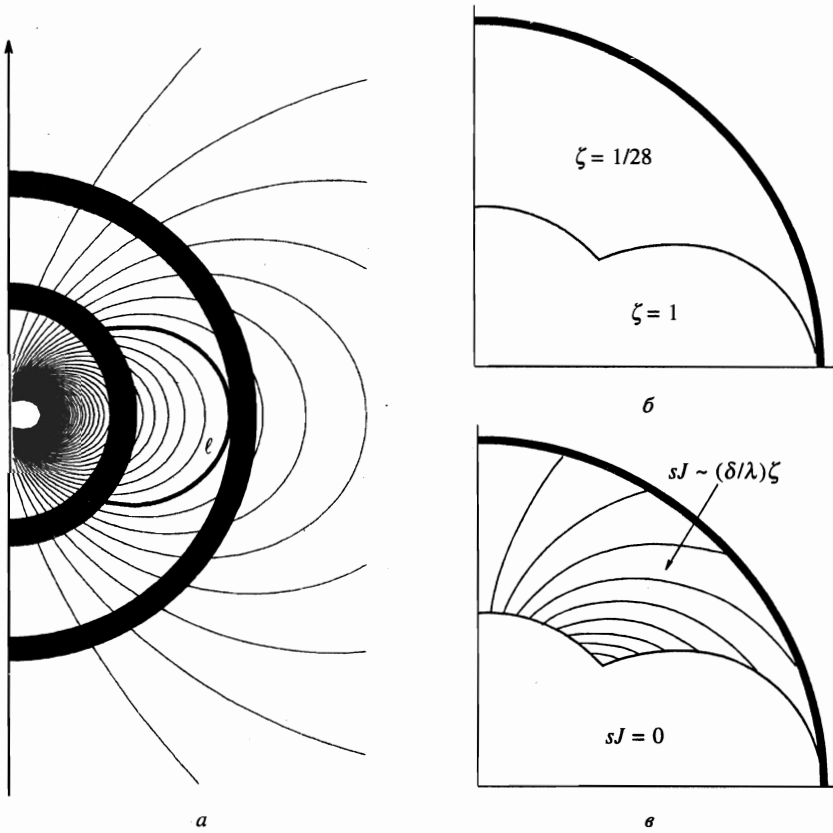


Рис. 5. Наложенный магнитный диполь (а) при изолирующих сферах с $r_+ = 3r_-$; азимутальное вращение с угловой скоростью ζ (б) и азимутальное магнитное поле sJ (в)

6. НАЛОЖЕННЫЕ ПОЛЯ ДИПОЛЯ И КВАДРУПОЛЯ

В этом разделе мы наложим на систему, изображенную на рис. 1, дипольное и квадрупольное магнитные поля (40) с источниками в центре внутренней сферы. Для диполя соответствующая ортогональная система координат (V, U) представляется через сферические координаты (r, ϑ) в виде

$$V = \frac{\sin^2 \vartheta}{r}, \quad U = -\frac{\cos \vartheta}{r^2}, \quad (74)$$

а для квадруполя имеем

$$V = 3 \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{r^2}, \quad U = \frac{1 - 3 \cos^2 \vartheta}{2r^3}. \quad (75)$$

Как для диполя, так и для квадруполя порождаемые ими кривые ℓ — это кривые первого топологического типа (см. кривую ℓ № 1 на рис. 2), описанного выше в разд. 2 и 4. Для диполя — это одна кривая, касающаяся экватора внешней сферы и удовлетворяющая (см. рис. 5а) условию

$$V = \frac{\sin^2 \vartheta}{r} = 1/r_+ \equiv V_d, \quad (76)$$

а квадруполь порождает две экваториально-симметричные (+ или -) кривые ℓ , касающиеся внешней сферы и удовлетворяющие (см. ниже рис. 7а) условию

$$V = 3 \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{r^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3} r_+^2} \equiv \pm V_q. \quad (77)$$

6.1. Диполь в задаче 1 «Изолятор–изолятор»

Для задачи «изолятор–изолятор» нетривиальное решение (34), (35) вне дипольной кривой (76) вместе с разложением (25) дают крупномасштабные величины

$$\zeta = \frac{1}{1 + (r_+/r_-)^3}, \quad J = -\frac{\delta}{\lambda} \frac{r_-^3}{r^3} \zeta. \quad (78)$$

Азимутальное магнитное поле sJ направлено противоположно твердотельному вращению ζ из (78) вне кривой ℓ (76). Внутри ℓ в первом приближении поле отсутствует ($J = 0$), и жидкость вращается вместе с внутренней сферой ($\zeta = 1$) в согласии с тривиальным решением (32).

Таким образом, мы опять имеем дело с вырожденной ситуацией, когда жидкость вращается твердотельно как вне, так и внутри кривой ℓ . Как и в п. 5.1, меридиональный поток χ появляется только во втором приближении (χ_1) и имеет порядок δ/λ^3 . Соответствующее условие корректности $\lambda \gg 1$ не зависит от величины δ . Поэтому мы можем грубо сравнить наши результаты с численными расчетами Холлербаха [15], полученными при малых δ и $\lambda \leq 1$.

Вне кривой ℓ угловая скорость твердотельного вращения из (78) зависит от отношения кубов радиусов, $(r_+/r_-)^3$. Для геофизической ситуации, обсуждаемой в работе Холлербаха, $r_+/r_- \simeq 3$ и, соответственно, $\zeta \simeq 1/28$, что согласуется с результатом Холлербаха $\zeta \simeq 0.06$ для максимального из рассмотренных им значения $\lambda \simeq 2$. При $\lambda \simeq 0.3, 0.5, 1, 2$ он получил для соответствующих характерных величин азимутального магнитного поля соотношения $9 : 7 : 4 : 2$, что очень хорошо согласуется с нашей оценкой $J = O(1/\lambda)$ даже для малых λ . Поэтому мы вправе заключить, что наши асимптотики дают хорошие результаты даже на грани $\lambda \approx 1$, сохраняя важные численные соотношения из нелинейной задачи [15].

6.2. Диполь в задаче 2 «Изолятор–проводник»

Общее нетривиальное (55) и тривиальное (32) решения дают азимутальное магнитное поле в сферическом слое (при $r_- < r < r_+$):

$$sJ = \begin{cases} -s(\delta/\lambda)(r_+/r)^3, & V < 1/r_+, \\ 0, & V = \sin^2 \vartheta / r > 1/r_+. \end{cases} \quad (79)$$

Пользуясь непрерывностью sJ (см. (51)), сформулируем теперь граничные условия при $r = r_-$ для определения из (16) поля s_j внутри проводящей сферы:

$$s_j = \begin{cases} -s(\delta/\lambda)(r_+/r_-)^3, & s^2 < r_-^3/r_+, \\ 0, & s^2 > r_-^3/r_+. \end{cases} \quad (80)$$

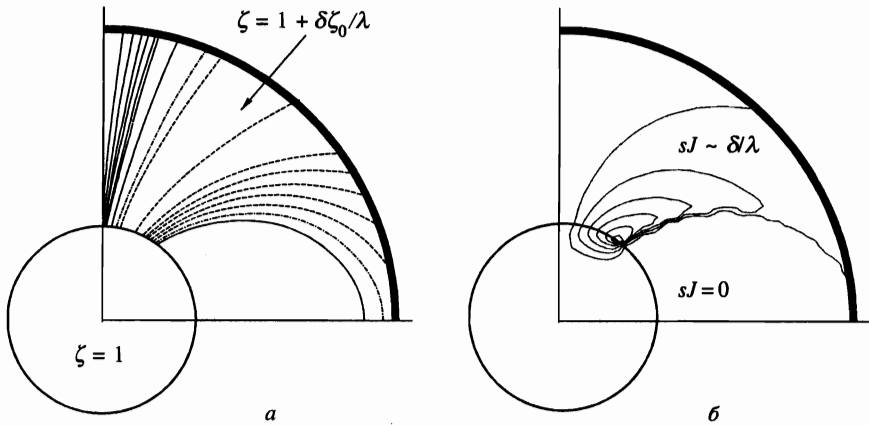


Рис. 6. Случай магнитного диполя, изображенного на рис. 5а, но при внутренней сфере с проводимостью, равной проводимости жидкости. а) Азимутальное вращение с угловой скоростью $\zeta = 1 + (\delta/\lambda)\zeta_0$, изолинии проведены через 25 единиц ζ_0 . Штрихпунктир соответствует $\zeta_0 = 0$. Там, где изолинии непрерывны, жидкость вращается быстрее внутренней сферы (супервращение с $\zeta_0 > 0$), а там где они штриховые, — медленнее ($\zeta_0 < 0$). б) Азимутальное магнитное поле sJ

Здесь видна сингулярность, аналогичная рассмотренной в (70). Величина s_j разрывна при $\vartheta = \arcsin \sqrt{r_-/r_+}$, достигая слева минимума, а справа обращаясь в нуль. С этим разрывом связаны основные трудности при получении соответствующего решения уравнения (16). Стандартные разложения по любым полиномам практически не сходятся. Чтобы преодолеть особенность в (80), пришлось воспользоваться специально разработанной версией метода конечных разностей. Результирующее азимутальное магнитное поле изображено для геофизической ситуации, $3r_- = r_+$, на рис. 6б.

Поскольку магнитное поле (79) в слое удовлетворяет (16), то уравнение (53) для определения угловой скорости вращения упрощается и теперь совпадает с последним уравнением из (26). Соответствующее общее решение — это опять (31) с граничными условиями из (51), которые для нашего наложенного диполя принимают вид

$$\zeta_0 = \frac{2Hr_-^3}{\cos \vartheta} \frac{\partial j_0}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_- \tag{81}$$

Определяя $j_r \equiv \partial j_0 / \partial r$ из (80) и полученного выше (см. рис. 6б) численного решения для $j = \delta j_0 / \lambda$, получим азимутальное вращение из (31) и (81), которое изображено на рис. 6а. Изолинии на этом рисунке проведены через каждые 25 единиц ζ_0 , что отражает относительно большую величину дифференциального вращения. Особенно интересны небольшие области супервращения (см. п. 5.2) связанные с большими положительными производными j_r у внутренней сферы вблизи оси вращения и внутри МГД-структуры. Здесь жидкость вращается значительно быстрее, чем внутренняя сфера (рис. 6а, непрерывные изолинии). Большая часть слоя, напротив, вращается медленней, чем внутренняя сфера, что может дать объяснение западному дрейфу геомагнитных неоднородностей.

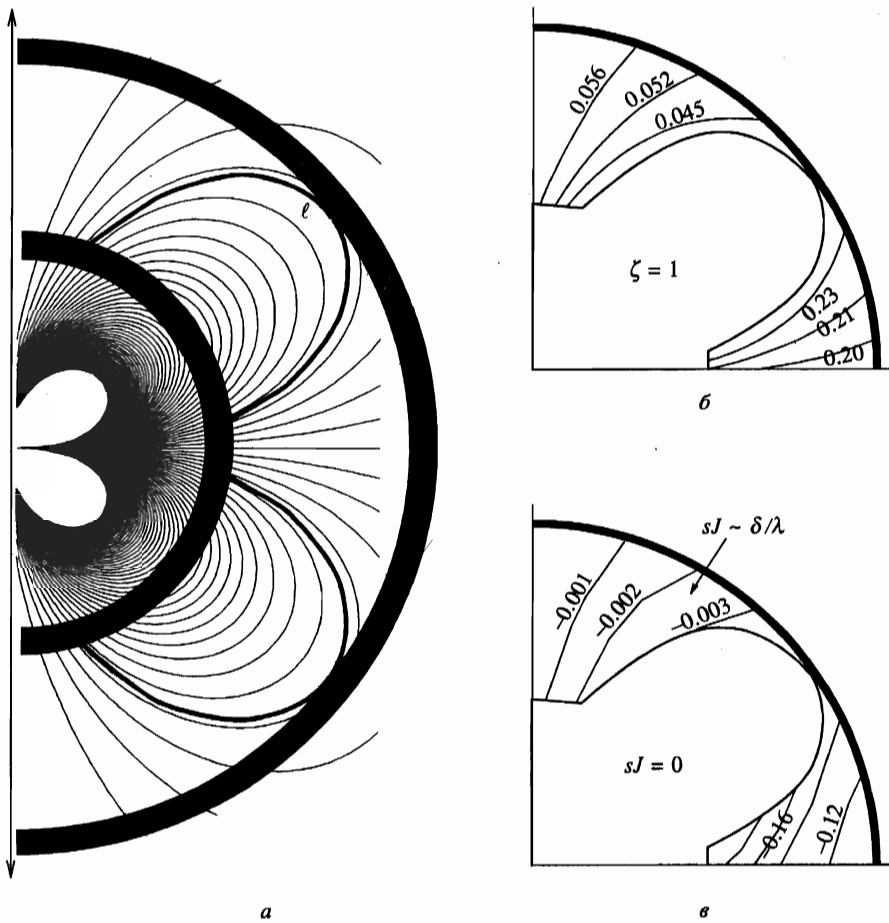


Рис. 7. Магнитный квадруполь (а) при изолирующих сферах с $r_+ = 2r_-$; азимутальное вращение с угловой скоростью ζ (б) и азимутальное магнитное поле sJ (в)

6.3. Квадруполь в задаче 1 «изолятор–изолятор»

Вне квадрупольной кривой ℓ (77) нетривиальное решение (34), (35) и разложение (25) дают крупномасштабные величины

$$\zeta = \frac{1}{1 + s_+^2/s_-^2}, \quad J = -\frac{\delta}{\lambda} \frac{s_-^2}{s_+^2} \zeta, \quad (82)$$

где $s_{\pm}^2(V)$ — положительные реальные корни следующих уравнений, различающихся выбором верхнего (+) или нижнего (-) знаков:

$$(s_{\pm}^2)^3 - r_{\pm}^2 (s_{\pm}^2)^2 + r_{\pm}^{10} V^2/9 = 0, \quad (83)$$

где для квадруполя $V = 3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta / r^2$ взято из (75).

Как и у диполя, азимутальное магнитное поле противоположно вращению, и внутри квадрупольной кривой ℓ в первом приближении поля нет ($J_0 = 0$), а жидкость вращается

вместе с внутренней сферой ($\zeta_0 = 1$). Однако, начиная с квадруполья, система перестает быть вырожденной. В отличие от диполья, в такой невырожденной системе вращение дифференциально вне кривых ℓ , а меридиональный поток порядка λ^{-2} , как и в наиболее общем случае (рис. 7).

7. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Исходное допущение работы — почти твердотельное вращение ($\epsilon \ll 1$) — позволило свести две сложные МГД-задачи к линейным системам в первом разделе. Далее были найдены аналитические решения задач в пределе сильного потенциального магнитного поля (3). Теперь эти общие решения позволят оценить диапазон корректности исходного допущения. Для этого выпишем подробно исходную систему МГД-уравнений, используя левые части [A], [B], [C], [D] линеаризованной по ϵ системы (7)–(10):

$$\epsilon [A] + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{rs} \frac{\partial(\chi, s^2\zeta)}{\partial(r, \theta)} + \lambda R_m \left[\nabla \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\Psi}{s} \right) \right] \nabla(s^2 J) \right\} = 0, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} [B] + \epsilon \left[\frac{\partial\zeta^2}{\partial z} - s^{-3} \frac{\partial(\chi, s\mathcal{D}s\zeta)}{r\partial(r, \theta)} + 2s^{-3} \frac{\partial\chi}{\partial z} \mathcal{D} \frac{\chi}{s} \right] = \\ = \epsilon \lambda^2 R_m \left\{ s \frac{\partial J^2}{\partial z} - \left[\nabla \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\Psi}{s} \right) \right] \nabla \left(s^{-1} \mathcal{D} \frac{\Psi}{s} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\epsilon [C] + \epsilon^2 R_m \left\{ \left[\nabla \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\Psi}{s} \right) \right] \nabla \zeta - \mathbf{1}_\varphi [(\nabla\chi)\nabla J] \right\} = 0, \quad (86)$$

$$\epsilon [D] + \epsilon^2 R_m \left[\nabla \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\Psi}{s} \right) \right] \nabla \chi = 0. \quad (87)$$

Для первой МГД-задачи «изолятор–изолятор» (см. решение и оценки в разд. 2) линеаризация корректна, если выполнены следующие неравенства, заменяющие (84)–(87):

$$\lambda \gg \epsilon(\lambda^{-2} + R_m \lambda^{-1}), \quad 1 \gg \epsilon [1 + R_m(\delta^2 + \lambda^{-2})], \quad 1 \gg \epsilon R_m \lambda^{-2}, \quad \lambda^{-2} \gg \epsilon R_m \lambda^{-4}. \quad (88)$$

При обычном выборе $\delta < 1$, $R_m > 1$ условие корректности для задачи 1 сводится к

$$\epsilon \ll \min(1, \lambda^2 R_m^{-1}, R_m^{-1} \delta^{-2}). \quad (89)$$

Для второй МГД-задачи «изолятор–проводник» (см. решение и оценки в разд. 4) линеаризация корректна, если выполнены следующие неравенства, заменяющие (84)–(87):

$$\lambda^3 \gg \epsilon(1 + R_m \lambda \delta), \quad 1 \gg \epsilon(1 + R_m \delta \lambda), \quad 1 \gg \epsilon R_m \lambda^{-3} \delta, \quad 1 \gg \epsilon R_m \lambda^{-3} \delta. \quad (90)$$

Условие корректности линеаризации для задачи 2 сводится к

$$\epsilon \ll \min(1, (\lambda R_m \delta)^{-1}). \quad (91)$$

Итак, мы вправе применять полученную в приближении (1) общую аналитическую теорию к широкому классу физических МГД-систем, когда выполнены условия (89) или (91) соответственно вместе с (38), (39) или с (57).

В качестве примера рассмотрим ситуацию в ядре Земли. Недавние исследования [21] дают прямую оценку $\epsilon \simeq 10^{-5}$. Также уверенно оцениваются [22] и $\lambda \geq 10$, $R_m \simeq 10^8$. Менее точно, из-за неопределенности в вязкости [23], оценивается безразмерная толщина вязкого слоя Экмана: $\delta \simeq 10^{-2} - 10^{-7}$. Таким образом, условие сильного поля (57) выполнено хорошо, а условие линеаризации (91) заведомо выполняется при $\delta \ll 10^{-4}$. Прямое решение задачи для таких узких МГД-слоев практически неосуществимо даже с использованием самых мощных современных компьютеров (см. [9–11, 15]). Поэтому логично использовать полученные здесь аналитические результаты для описания планетных недр.

В заключение суммируем основные результаты работы.

1) Впервые получено аналитическое решение классической МГД-задачи о почти твердотельном вращении вязкого и проводящего сферического слоя жидкости в сильном осесимметричном потенциальном магнитном поле. Подробно описаны крупномасштабные потоки и поля в случаях, когда обе сферы — изоляторы и когда внутренняя сфера — проводник.

2) Впервые описаны сдвиговые МГД-слои, сглаживающие сильные градиенты на границах МГД-структур, охваченных ими. Эти оригинальные структуры «изгоняют» азимутальное магнитное поле из областей, ограниченных потенциальными изолиниями, касающимися сфер.

3) Наложенное постоянное магнитное поле создает МГД-структуру вне осевого цилиндра, касающегося внутренней сферы. Внутри цилиндра вращение быстрее, а меридиональный поток зависит от высоты.

4) Наложенное дипольное поле формирует МГД-структуру, касающуюся внешнего экватора. Когда обе сферы — изоляторы, жидкость внутри структуры вращается твердотельно вместе с внутренней сферой. Вне структуры вращение медленнее, но тоже твердотельно. Когда внутренняя сфера — проводник, сингулярность в граничных условиях ведет к тому, что вращение у оси и внутри МГД-структуры значительно быстрее вращения внутренней сферы. Такое супервращение несколько неожиданно, поскольку заданное вращение у внутренней сферы быстрее, чем у внешней.

5) Последний пример общего решения — квадрупольное магнитное поле. В этом случае две экваториально-симметричные структуры вращаются вместе с внутренней сферой. Вне структур, как и в наиболее общем случае, вращение дифференциально, азимутальное магнитное поле убывает как первая степень потенциального поля, а меридиональный поток — как квадрат, в случае когда обе сферы — изоляторы, и как куб, при одной проводящей сфере.

Автор благодарен своей маме, способствовавшей успешному завершению этой работы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-05-64402).

Литература

1. I. Proudman, *J. Fluid Mech.* **1**, 505 (1956).
2. K. Stewartson, *J. Fluid Mech.* **26**, 131 (1966).
3. S. G. H. Philander, *J. Fluid Mech.* **47**, 799 (1971).
4. S. Vempaty, *Z. Angew. Math. Phys.* **29**, 450 (1978).
5. А. А. Рuzмаикин, *Геомагнетизм и Аэрoномия* **29**, 299 (1989).
6. A. Ruzmaikin, in *Theory of Solar and Planetary Dynamos*, ed. by M. R. E. Proctor, P. C. Mathews, and A. M. Rucklidge, Publications of the Newton Institute 1, Cambridge University Press (1993), p. 265.
7. С. В. Старченко, *Доклады РАН* **326**, 983 (1993).
8. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Phys. Earth. Planet. Inter.* **91**, 63 (1995).
9. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, *Nature* **377**, 203 (1995).
10. R. Hollerbach and C. A. Jones, *Phys. Earth. Planet. Inter.* **75**, 317 (1993).
11. R. Hollerbach and C. A. Jones, *Phys. Earth. Planet. Inter.* **87**, 171 (1995).
12. S. V. Starchenko, *J. Geomagn. Geoelectr.* **45**, 1563 (1993).
13. N. Kleeorin, I. Rogachevskii, and A. Ruzmaikin, in *The Cosmic Dynamo*, ed. by F. Krause, K.-H. Radler, and G. Rudiger, Kluwer, Dordrecht (1993), p. 453.
14. N. Kleeorin, I. Rogachevskii, A. Ruzmaikin, A. M. Soward, and S. V. Starchenko, *J. Fluid Mech.* **344**, 213 (1997).
15. R. Hollerbach, *Proc Roy. Soc. Lond. A* **444**, 333 (1994).
16. D. B. Ingham, *Phys. Fluids* **12**, 389 (1969).
17. S. Vempaty and D. E. Loper, *Phys. Fluids* **18**, 1678 (1975).
18. P. A. Gilman and E. R. Benton, *Phys. Fluids* **11**, 2397 (1968).
19. D. E. Loper, *Phys. Fluids* **13**, 2995 (1970).
20. D. E. Loper, *Phys. Fluids* **13**, 2999 (1970).
21. X. Song and P. G. Richards, *Nature* **382**, 221 (1996).
22. С. В. Старченко, *Доклады РАН* **348**, 677 (1996).
23. L. I. Lumb and K. D. Aldridge, *J. Geomagn. Geoelectr.* **43**, 93 (1991).