

## ХАРАКТЕРНОЕ ВРЕМЯ ЛАВИННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

С. Н. Дороговцев\*

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук  
194021, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 мая 1997 г.

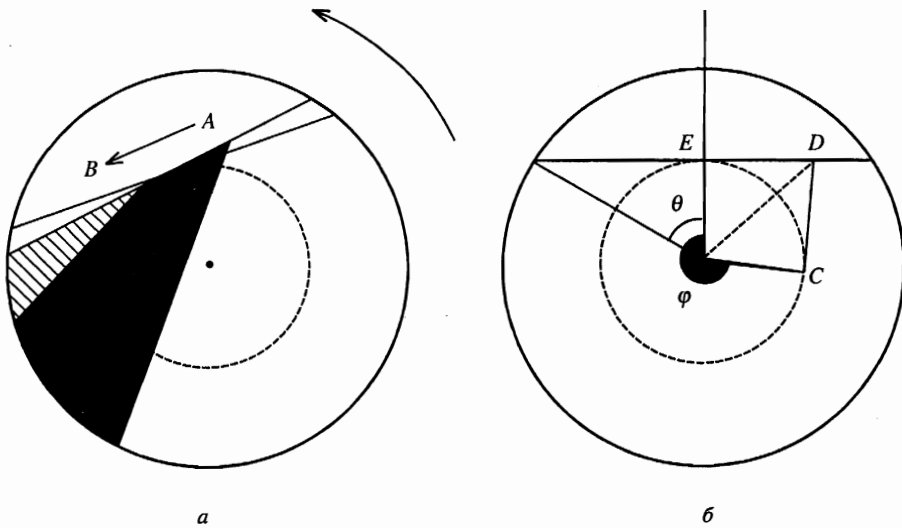
Фракции гранулированного материала перемешиваются в цилиндре, медленно вращающемся вокруг своей продольной оси, расположенной горизонтально. Цилиндр заполнен не полностью, и в каждый момент времени перемешивание происходит лишь на свободной поверхности материала. В рамках простого геометрического подхода построена полная зависимость характерного времени такого так называемого лавинного перемешивания от степени заполнения цилиндра. Эта зависимость очень хорошо описывает имеющуюся экспериментальную кривую. Вблизи критической точки половинного заполнения, в которой перемешивания до однородного состояния не происходит, обратное характерное время перемешивания пропорционально  $\delta^2 \ln(|\delta|^{-1})$ , где  $\delta$  — отклонение заполнения от половинного.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Известный эксперимент [1] столь наглядно и эффектно демонстрирует сущность так называемого лавинного перемешивания (*avalanche mixing*), что одна из ярких иллюстраций к нему попала на обложку мартовского (1995) номера *Nature*. В цилиндр, медленно вращающийся вокруг своей расположенной горизонтально продольной оси, засыпаны фракции гранулированного материала. Цилиндр заполнен не полностью, так что сверху остается свободное пространство. Считается, что гранулы могут пересыпаться, только когда они выходят на свободную поверхность. Во всех же остальных точках материала они не перемещаются друг относительно друга и вращаются вместе с цилиндром (см. рис. 1а). В итоге при вращении цилиндра по свободной поверхности материала непрерывно сходят лавины, в которых перемешиваются фракции. Такое перемешивание на поверхности и называется лавинным [1]. Барабан, в котором перемешивание исследуется в эксперименте, — плоский, так что это скорее диск или, как его еще называют, двумерный барабан [2–6]. Поэтому не приходится обсуждать вопрос о перемещениях гранул вдоль оси вращения цилиндра. Спрашивается, каким образом развивается процесс такого перемешивания?

Оказалось, что динамику лавинного перемешивания удастся понять уже в рамках простого подхода, основанного, по сути дела, на геометрических соображениях [7–9]. При этом вовсе не требуется пользоваться идеями теории самоорганизованной критичности [10–12] (заметим, что общий интерес к проблеме пересыпания гранул во вращающемся барабане [13–18] и, вообще, к пересыпанию гранулированных материалов [19]

\* E-mail: sn@dor.ioffe.rssi.ru



**Рис. 1.** *a* — Схема лавинного перемешивания. При бесконечно малом повороте барабана гранулы разных фракций из сектора *A*, перемешиваясь, пересыпаются в сектор *B*. Свободная поверхность гранулированного материала располагается под углом трения к горизонтали. Разные фракции показаны черным и белым цветом. Штрихами выделены области с перемешанным материалом. Здесь и далее на рисунках разные степени перемешивания не показаны. *б* — К выводу соотношения (3). Цилиндр заполнен более чем половиной. Так как в ответе не входит угол трения, свободная поверхность показана горизонтальной. Угол  $\theta$  характеризует относительный объем свободного пространства. Положение касательной *CD* фиксировано углом  $\varphi$ . В режиме предельно быстрого перемешивания на достаточно больших временах во всех точках каждой такой касательной концентрация черной фракции равна  $\rho(\varphi, t)$ . Касательная пересекает свободную поверхность материала, если  $\zeta < 2\theta$ , где  $\zeta \equiv 2\pi - \varphi$

вспыхнул в последнее время именно в связи с задачами самоорганизованной критичности). К сожалению, в наших работах [7, 8] не были построены зависимости, уже известные из эксперимента. Теперь же мы сможем получить ответы, позволяющие провести прямое сравнение нашей теории с имеющимся экспериментом. Мы покажем, что наша теория точно описывает режим самого быстрого перемешивания из возможных. Сравним наши ответы с экспериментом [1], мы увидим, что реальная экспериментальная ситуация очень близка к этому режиму.

Будем считать, что цилиндр вращается настолько медленно, что в каждый момент времени свободная поверхность находится под углом трения к горизонтали (флуктуации этого угла со временем малы [1], и их можно не учитывать).

Так как в ответе не войдут угол трения, радиус цилиндра и скорость его вращения, мы можем далее изображать свободную поверхность горизонтальной, как на рис. 1*a*, положить радиус цилиндра равным единице и считать, что время  $t$  — это просто угол поворота цилиндра. Будем считать, что гранулы разных фракций различаются только цветом. Пусть для простоты, как и в эксперименте, перемешиваются всего две фракции — белая и черная. (Ответы легко могут быть обобщены на произвольное число фракций.) Их начальное расположение для величин, которые мы будем искать, окажется не важным, и мы его не конкретизируем. Гранулы малы, и состояние каждой отдельной

точки материала будем описывать величиной  $\rho$  — концентрацией черного материала в данном месте (там, где весь материал черный,  $\rho = 1$ , где белый,  $\rho = 0$ ). Пусть цилиндр вращается против часовой стрелки.

Очевидно, что если цилиндр заполнен более чем наполовину, центральная часть материала (на рис. 1 она окружена штриховой линией) не перемещается никогда и будет вращаться вместе с барабаном. При менее чем половинном заполнении должен перемещаться весь материал.

В каком случае лавинное перемешивание развивается самым быстрым образом? Очевидно, самый быстрый режим из всех возможных реализуется, если при пересыпании гранул по свободной поверхности с ее правой на левую половину (см. рис. 1а) материал перемешивается полностью, т. е. до однородного состояния. Поясним: на правой половине свободной поверхности может быть неоднородное распределение фракций, а во всех точках ее левой половины концентрация  $\rho$  должна быть одинакова. Введем окружность с радиусом равным наименьшему расстоянию от центра до свободной поверхности — она обозначена штриховой линией на рис. 1 — и обсудим, как будет распределена черная фракция на касательных, проведенных к этой окружности. Очевидно, что в рассматриваемой ситуации на достаточно больших временах (с гарантией — после первого же оборота цилиндра) на разных касательных типа обозначенной  $CD$  на рис. 1б значения  $\rho$  могут различаться, но во всех точках каждой отдельной касательной концентрация  $\rho$  будет одинакова (рис. 1б). Тогда, если каждую касательную фиксировать углом  $\varphi$  между соответствующим радиусом-вектором и нормалью к свободной поверхности, состояние системы в момент  $t$  можно описать величиной  $\rho(\varphi, t)$ .

Таким образом, рассмотрение режима самого быстрого перемешивания или, что то же самое, введение предположения о полном перемешивании в лавинах резко упрощает задачу [7]. При этом оказывается возможным не вникать в тонкости, связанные с конкретной структурой гранул, их слипанием, зацеплением и т. д.

Насколько наблюдаемое в эксперименте [1] лавинное перемешивание близко к такому самому быстрому режиму, который удастся описать аналитически? Ответ на этот вопрос и есть главный итог настоящей работы. Основным позволяющим произвести такое сравнение результатом эксперимента является зависимость характерного времени перемешивания от степени заполнения вращающегося барабана. Таким образом, нам надо построить эту зависимость для всех уровней заполнения.

Вообще, характерное время перемешивания удастся ввести по следующей причине. Как мы увидим ниже, концентрация черной фракции на левой части свободной поверхности  $\rho(\varphi = 0, t)$  на больших временах зависит от времени следующим образом (аналогичную зависимость, конечно, можно написать и для других точек материала; такая же зависимость следует и из эксперимента [1]):

$$\rho(0, t) = \rho_{\infty} + C_0 \exp\{-t/\tau\} \cos\{2\pi t/T + \varphi_0\}. \quad (1)$$

Здесь  $\rho_{\infty}$  — концентрация черной фракции в перемешанном до однородного состояния материале, которая, как и постоянные  $C_0$  и  $\varphi_0$ , зависит от начальных условий, т. е. от количества и расположения чистых фракций в начальный момент;  $\tau$  — искомое характерное время перемешивания,  $T$  — период осцилляций. Зависимости  $\tau$  и  $T$  от степени заполнения нам и предстоит построить.

В следующем разделе мы покажем, как совсем просто можно получить уравнения, описывающие динамику перемешивания, если использовать сделанное выше предполо-

ложение. Задача фактически сведется к исследованию динамики линейной системы нулевой размерности.

В разд. 3 с помощью этих уравнений мы построим кривые, описывающие зависимости величин  $\tau$  и  $T$ , входящих в соотношение (1), т. е. характерного времени перемешивания и периода осцилляций, от степени заполнения цилиндра. Мы увидим, что экспериментальная ситуация [1] очень близка к режиму самого быстрого перемешивания, и убедимся, что наша теория отлично описывает эксперимент.

Оказывается, если цилиндр заполнен в точности наполовину, гранулированный материал никогда не перемешается до однородного состояния. В разд. 4 мы опишем весьма нетривиальное сингулярное поведение характерного времени перемешивания в окрестности этой особой точки.

Итак, мы убедимся, что зависимость времени перемешивания от степени заполнения цилиндра удивительно хорошо описывается в рамках подхода, основанного на предположении о полном перемешивании гранул при их пересыпании по свободной поверхности материала. В заключение работы мы кратко обсудим, каким образом можно было бы описать процесс перемешивания при отказе от этого весьма сильного предположения, т. е. если гранулы разных фракций после пересыпания по свободной поверхности распределены не вполне одномерно. Оказывается, задача при этом сводится к описанию динамики одномерной линейной системы. В этой ситуации возникает еще одно характерное время, которое связано уже с конкретными характеристиками гранул.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЛАВИННОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Опишем кинетику лавинного перемешивания в случае полного перемешивания гранул при пересыпании по свободной поверхности материала — режим самого быстрого перемешивания. Соответствующие уравнения были уже получены в нашей работе [7]. Теперь, однако, мы научились выводить их так просто, что можем позволить себе привести здесь этот краткий вывод.

Обратимся к случаю более чем половинного заполнения барабана. Долю незаполненного пространства удобно характеризовать углом раствора  $\theta$  (см. рис. 1б). Нам предстоит найти асимптотику типа (1). Поэтому нас будут интересовать лишь достаточно большие времена, на которых, как было показано во Введении, во всех точках каждой отдельной касательной типа  $CD$  концентрация черных гранул одинакова. (В работах [7, 8] показано также, как лавинное перемешивание развивается на меньших временах.) Эти касательные фиксируются углом  $\varphi$ , и концентрация черной фракции в точках соответствующей касательной в момент времени  $t$  будет  $\rho(\varphi, t)$ .

Повернем цилиндр в момент времени  $t$  на малый угол  $dt$ . Тогда справа налево (из сектора  $A$  в сектор  $B$  на рис. 1) пересыпется следующее количество черного материала:

$$\begin{aligned} dt \frac{\sin^2 \theta}{2} \rho(0, t) &= dt \int_0^{\sin \theta} dr r \rho_{right}(r, t) = \\ &= dt \int_0^{2\theta} d\zeta \frac{dr(\zeta)}{d\zeta} r(\zeta) \rho_{right}(r(\zeta), t) = dt \frac{\cos^2 \theta}{2} \int_0^{2\theta} d\zeta \frac{d \operatorname{tg}^2(\zeta/2)}{d\zeta} \rho(2\pi - \zeta, t). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь первое интегрирование  $\int_0^{\sin \theta} dr$  проводится от середины свободной поверхности до стенки цилиндра;  $r(\zeta)$  — координата точки пересечения касательной, фиксируемой углом  $\varphi = 2\pi - \zeta$ , со свободной поверхностью — отрезок  $ED$  на рис. 1б, причем  $r(\zeta) = \cos \theta \operatorname{tg}(\zeta/2)$ , так что  $r(2\theta) = \sin \theta$ . Таким образом, концентрация черной фракции в разных точках правой половины свободной поверхности  $\rho_{\text{right}}(r(\zeta), t) = \rho(\zeta, t)$ . Теперь учтем, что, как следует из отсутствия перемешивания гранул в точках, не принадлежащих свободной поверхности,  $\rho(\varphi, t) = \rho(0, t - \varphi)$  при  $t \geq \varphi$  и  $\varphi \geq 0$ , и немедленно получим из (2) искомое уравнение для  $\rho(0, t)$ :

$$\rho(0, t) = \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^{2\theta} d\zeta \rho(0, t - 2\pi + \zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (3)$$

Действуя таким же образом, легко получить и соответствующее уравнение для случая менее чем половинного заполнения (здесь удобно ввести угол  $\vartheta \equiv \pi - \theta$ ):

$$\rho(0, t) = \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{2\vartheta} d\zeta \rho(0, t - \zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (4)$$

В итоге сложная динамическая задача оказалась сведена к исследованию динамики линейной нульмерной системы. Отметим, что уравнения (3) и (4) не переходят одно в другое после формальной замены  $\theta$  на  $\pi - \vartheta$ . Дело в том, что точка половинного заполнения  $\theta = \vartheta = \pi/2$  является, как мы ниже увидим, точкой потери аналитичности. При половинном заполнении из уравнения (3), равно как и из (4), сразу следует, что  $\rho(0, t) = \rho(0, t - \pi)$ , и при этом перемешивания до однородного состояния в системе не произойдет никогда. Таким образом, время перемешивания здесь обращается в бесконечность.

Чтобы найти характерное время перемешивания и период осцилляций асимптотик решений уравнений (3) и (4) (см. соотношение (1)), достаточно в эти уравнения подставить  $\rho(0, t) = e^{zt}$ . В итоге при более чем половинном заполнении из (3) получим

$$e^{2\pi z} = 2 \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^{\theta} d\xi e^{2z\xi} \frac{\sin \xi}{\cos^3 \xi}. \quad (5)$$

При менее чем половинном заполнении из (4) следует

$$1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{\vartheta} d\xi e^{-2z\xi} \frac{\sin \xi}{\cos^3 \xi}. \quad (6)$$

Таким образом, мы получили два трансцендентных уравнения для  $z$ . Чтобы определить характерное время перемешивания, следует найти их самые близкие к нулю корни. Как видно из асимптотики (1), каждый из этих двух корней связан с характерным временем перемешивания и периодом осцилляций следующим соотношением:

$$z = -\tau^{-1} \pm i2\pi/T. \quad (7)$$

Заметим сразу же, что  $\tau$  и  $T$  зависят только от одного параметра — от степени заполнения барабана! Теперь нам осталось найти корни уравнений (5) и (6).

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ОТ СТЕПЕНИ ЗАПОЛНЕНИЯ ЦИЛИНДРА

Интегралы в правых частях уравнений (5) и (6) выражаются через специальные функции. Как обычно, хотя решение трансцендентного уравнения и не представимо в аналитическом виде, его можно найти со сколь угодно высокой точностью. Так как эти специальные функции довольно-таки экзотические, проще непосредственно вычислять интегралы в (5) и (6). Оказалось, удобнее всего провести однократное интегрирование по частям и далее итерировать следующие соотношения:

$$z = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ e^{2\theta z} - 2z \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^\theta d\xi e^{2z\xi} \operatorname{tg}^2 \xi \right\} \quad (8)$$

для более чем половинного заполнения цилиндра ( $\theta < \pi/2$ ) и

$$z = \frac{1}{2\vartheta} \ln \left\{ 1 + 2z \operatorname{ctg}^2 \vartheta e^{2z\vartheta} \int_0^\vartheta d\xi e^{-2z\xi} \operatorname{tg}^2 \xi \right\} \quad (9)$$

для менее чем половинного заполнения ( $\vartheta < \pi/2$ ).

Такие итерации очень быстро сходятся. В результате с помощью соотношения (7) мы получим искомые зависимости обратного времени перемешивания  $\tau^{-1}$  и периода осцилляций  $T$  от степени заполнения барабана (см. рис. 2 и 3) — наши главные результаты. Теперь оказывается наглядней выразить  $\tau^{-1}$  и  $T$  не через углы  $\theta$  или  $\vartheta$ , а через  $v = (\vartheta - \sin 2\vartheta/2)/\pi$  — относительную долю объема барабана, которую занимают

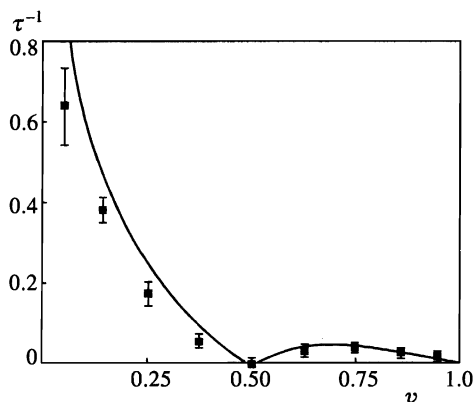


Рис. 2

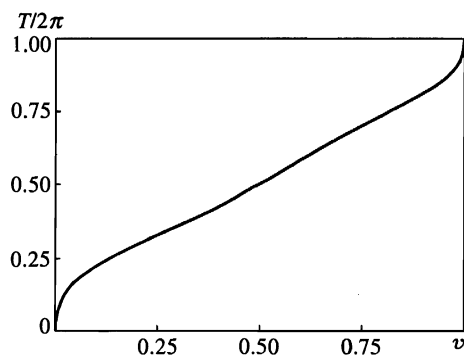


Рис. 3

**Рис. 2.** Зависимость обратного характерного времени перемешивания от доли объема цилиндра, занимаемой гранулированным материалом. Для сравнения показаны экспериментальные точки из работы [1]

**Рис. 3.** Зависимость периода осцилляций концентрации любой из фракций (см. уравнение (1)) на больших временах от доли объема цилиндра, занимаемой гранулированным материалом

гранулы. Для сравнения на рис. 2 также представлены экспериментальные точки из работы [1] с их погрешностями.

Найденное  $\tau(v)$  отвечает наименьшему времени лавинного перемешивания из всех возможных при данном заполнении  $v$ . Таким образом, зависимости  $\tau^{-1}(v)$  для тех или иных конкретных гранулированных материалов должны проходить не выше построенной на рис. 2 предельной кривой. И действительно, хотя экспериментальные точки, показанные на рис. 2, и близки к предельной зависимости, они все-таки ниже ее. Таким образом, реальный эксперимент [1] оказывается очень близок к предельному режиму самого быстрого перемешивания и поэтому отлично описывается нашей теорией, в которую вообще не входят какие-либо параметры перемешиваемого гранулированного материала.

Следуя [1], можно также ввести еще одну величину — «скорость» перемешивания  $v/\tau$ . В нашей теории ее максимум  $v/\tau = 0.0683 \dots$  достигается при  $v = 0.177 \dots$  — при таком заполнении барабана материал перемешивается скорее всего. Эти значения также весьма близки к экспериментальным —  $v/\tau = 0.056 \pm 0.006$  при  $v = 0.17 \pm 0.015$  [1].

В наших работах [7] и [8] уже были найдены аналитические ответы для  $\tau^{-1}$  и  $T$  в предельных случаях малого и большого заполнения: при малом заполнении барабана ( $\vartheta \ll 1$ )  $\tau^{-1} \approx 1.392/2\vartheta$  и  $T \approx 4\pi\vartheta/7.553$  и при большом заполнении ( $\theta \ll 1$ ) —  $\tau^{-1} \approx (1/9)(1/2\pi)\theta^2$  и  $T \approx 2\pi - 4\theta/3$ . Эти аналитические зависимости описывают соответствующие участки кривых на рис. 2 и 3. Теперь мы покажем, как  $\tau$  и  $T$  ведут себя вблизи особой точки — точки половинного заполнения.

#### 4. КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПОЛОВИННОГО ЗАПОЛНЕНИЯ

Как отмечалось в разделе 2, из уравнения (3), равно как и из (4), следует, что при половинном заполнении барабана концентрация черной фракции  $\rho(0, t)$  является периодической функцией с периодом  $\pi$  (половина периода обращения барабана) и полного перемешивания не наступит никогда. Поэтому, учитывая соотношение (7), искомый корень вблизи точки половинного заполнения можно представить в виде  $z = 2i + s$ , где  $s$  — малая добавка (с тем же успехом, разумеется, можно было искать сопряженный корень  $z = -2i + s$ ). Рассмотрим, например, случай более чем половинного заполнения. После подстановки последнего соотношения в уравнение (3) имеем

$$e^{2\pi s} = 2 \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^\theta d\xi e^{2s\xi} \{ 4 \sin 2\xi + \operatorname{tg}^3 \xi - 7 \operatorname{tg} \xi - 4i(\cos 2\xi + \operatorname{tg}^2 \xi - 1) \}. \quad (10)$$

Теперь введем малое отклонение  $\delta$  от половинного заполнения:  $\theta = \pi/2 - \delta$ , после чего можно разложить  $e^{-2s\xi}$ , учитывая малость  $s$ . Далее проще всего действовать следующим образом. С помощью интегрирования по частям можно легко выделить сингулярные при  $\delta \rightarrow 0$  члены. Оставшиеся сходящиеся при  $\delta \rightarrow 0$  интегралы также без особого труда оцениваются. После этого остается сравнить коэффициенты при членах с равными степенями  $\delta$ .

Здесь мы опустим эти вполне рутинные, хотя и весьма громоздкие, вычисления и сразу же приведем ответ для ближайшего к нулю корня:

$$z = 2i - \frac{8\delta}{\pi}i - \frac{16\delta^2}{\pi} \left[ \ln \frac{1}{|\delta|} - 5/2 \right] + \dots \quad (11)$$

(Мы не выписали член  $O(\delta^2)$  мнимой части  $z$ .) Из выражения (11) с учетом (7) непосредственно следует, что на достаточно больших временах ( $t \gg \tau$ ) процесс перемешивания развивается по закону (1), в котором характерное время перемешивания  $\tau$  и период осцилляций  $T$  выражаются через отклонение  $\theta$  от  $\pi/2$  следующим образом:

$$\tau^{-1} = \frac{16\delta^2}{\pi} \left[ \ln \frac{1}{|\delta|} - \frac{5}{2} \right] \quad (12)$$

и

$$T = \pi + 4\delta. \quad (13)$$

Можно, конечно, выразить  $\tau$  и  $T$  и через отклонение относительной доли заполненного гранулированным материалом объема от одной второй, если учесть, что  $v - 1/2 \approx 2\delta/\pi$ .

Аналогичные вычисления можно с тем же успехом проделать и в случае менее чем половинного заполнения ( $\vartheta < \pi/2$ ). Ответы имеют в точности тот же вид, что и (12) и (13) (при этом  $\delta = \vartheta - \pi/2 < 0$ ). Разумеется, такое совпадение имеет место только в низших порядках. Заметим, что в теории обычных критических явлений коэффициенты перед сингулярностями по обе стороны от критической точки различаются (см., например, [20, 21]).

Сравнение аналитического выражения (12) с полной зависимостью  $\tau(v)$  (см. рис. 2), вычисленной в предыдущем разделе, показывает, что соотношение (12) пригодно только в весьма узкой области  $|v - 1/2| < 0.02$  вблизи половинного заполнения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы обнаружили, что в реальном эксперименте [1] (в качестве гранул в нем использовались подкрашенные кристаллики соли) перемешивание происходит в режиме, очень близком к самому быстрому из всех возможных для лавинного перемешивания. (В самом быстром режиме перемешивания гранулы, сыпаясь по свободной поверхности материала, должны полностью перемешиваться до однородного состояния.) В этом случае описание лавинного перемешивания становится крайне простым — задача сводится к исследованию динамики линейной нульмерной системы и фактически может быть решена точно. Оказалось, что изучаемая простая система обладает необычным критическим поведением вблизи точки половинного заполнения цилиндра, в котором материал до однородного состояния не перемешается никогда.

Замечательно, что главная характеристика задачи — характерное время перемешивания  $\tau$ , которое мы, собственно, и искали, — оказалась крайне нечувствительна к отклонениям от однородного распределения гранул после их пересыпания по свободной поверхности. (Заметим, что мы также пренебрегли флуктуациями угла трения со временем. В эксперименте такие флуктуации могут быть существенны при малом заполнении цилиндра.) Эти отклонения, конечно же, видны в эксперименте — на конкретных картинах распределения фракций в отдельные моменты времени, и их степень определяется тем, какой именно гранулированный материал перемешивается (см. [16, 22, 23]). Учет таких отклонений сводит задачу к исследованию динамики теперь уже одномерной линейной системы.



Действительно, поскольку в этом случае и после пересыпания гранул фракции на левой половине свободной поверхности могут быть распределены неоднородно, в уравнения динамики перемешивания будет входить  $\rho(r, \varphi = 0, t)$ , где  $r$  — координата точки на левой половине свободной поверхности, отсчитанная от ее центра. Конкретный вид отображения, выражающего  $\rho(r, \varphi = 0, t)$  через распределение черной фракции в этот момент времени на правой половине свободной поверхности, определяется характеристиками гранулированного материала. Нетрудно видеть, впрочем, что отображение должно быть линейным, если гранулы разных фракций различаются только цветом; если на правой половине свободной поверхности материал перемешан однородно, то однородное распределение должно получиться после пересыпания и на левой половине; количество черной фракции до пересыпания в секторе  $A$  на рис. 1а должно сохраниться и после пересыпания в сектор  $B$ . Этих соображений, в принципе, достаточно, чтобы представить себе, каким может быть такое отображение. Его можно выбрать, например, из полуфеноменологических соображений, описав зависимость от вида гранулированного материала всего одним параметром.

Мы не будем здесь приводить итоговые уравнения для  $\rho(r, \varphi = 0, t)$ , так как они выглядят далеко не столь изящно, как уравнения (3) и (4). Разумеется, (3) и (4) получаются из этих общих уравнений как простейший частный случай. Аналитическое рассмотрение общего случая без труда проводится для половинного заполнения. При этом можно видеть, что в задаче появляется еще одно характерное время, уже связанное с характеристиками гранул, т. е. с конкретным видом введенного отображения. Все-таки решить такую задачу аналитически удастся только в простейших ситуациях. Именно поэтому столь впечатляет адекватное описание реального эксперимента [1] с помощью самой простой, по сути дела геометрической, теории, в которую вообще не входят какие-либо характеристики гранул.

Автор благодарен Е. Н. Антонову, С. А. Кгиторову, Е. К. Кудинову, А. М. Монахову, А. Н. Самухину, Б. Н. Шалаеву и Ю. А. Фирсову за многочисленные полезные обсуждения. Часть представленных результатов была получена во время пребывания автора на школе «Проблемы физики границ» в Турине, финансируемого в рамках программы INTAS. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

## Литература

1. G. Metcalfe, T. Shinbrot, J. J. McCarthy, and J. M. Ottino, *Nature* **374**, 39 (1995).
2. V. Buchholtz, Th. Pöschel, and H.-J. Tillemans, *Physica A* **216**, 199 (1995).
3. Th. Pöschel and V. Buchholtz, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3963 (1993).
4. F. Cantelaube, Y. Limon-Duparcmeur, D. Bideau, and G. H. Ristow, *J. de Phys. I* **5** 581 (1995).
5. G. A. Kohring, *J. de Phys. I* **5**, 1551 (1995).
6. G. H. Ristow, *Europhys. Lett.* **28**, 97 (1994).
7. С. Н. Дороговцев, Письма в ЖЭТФ **62**, 246 (1995).
8. С. Н. Дороговцев, ЖЭТФ **112**, 257 (1997).
9. S. N. Dorogovtsev, submitted to *Europhys. Lett.*
10. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
11. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).

12. C. Tang and P. Bak, Phys. Rev. Lett. **60**, 2347 (1988).
13. J. Rajchenbach, Phys. Rev. Lett. **65**, 2221 (1990).
14. G. Baumann, I. M. Jánosi, and D. E. Wolf, Europhys. Lett. **27**, 203 (1994).
15. G. Baumann, I. M. Jánosi, and D. E. Wolf, Phys. Rev. E **51**, 1879 (1995).
16. G. Baumann and D. E. Wolf, Phys. Rev. E **54**, R4504 (1996).
17. O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shrikman, and J. Stavans, Phys. Rev. Lett. **73**, 644 (1994).
18. K. M. Hill and J. Kakalios, Phys. Rev. E **49**, R3610 (1994).
19. H. M. Jaeger and S. R. Nagel, Science **255**, 1523 (1992).
20. D. J. Amit, *Field theory, renormalization group and critical phenomena*, World Scientific, Singapore (1984).
21. J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon, N. Y. (1996).
22. V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Sórensens, J. Feder, T. Jóssang, and P. Meakin, Nature **379**, 49 (1996).
23. K. Christensen, A. Corral, V. Frette, J. Feder, and T. Jóssang, Phys. Rev. Lett. **77**, 107 (1996).