

ГЕНЕРАЦИЯ СОЛИТОННЫХ ПАКЕТОВ В ДВУХУРОВНЕВОМ ЛАЗЕРЕ

А. А. Заболотский

*Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 28 марта 1997 г.

Строится вариант теории возмущений для систем уравнений, близких к интегрируемым. Рассматриваются возмущения специального типа, позволяющие представить систему в виде условия совместности «деформированных» линейных систем. Найдена соответствующая деформация уравнений Уизема. Аппарат применяется для теоретического исследования генерации последовательности солитонов в двухуровневом лазере. Описание генерации проводится в рамках системы уравнений Максвелла–Блоха с накачкой верхнего уровня и с учетом некоторых релаксационных эффектов. Исследуются динамика деформации затравочного возмущения в последовательность солитонов под действием накачки. Анализируются разные режимы генерации и сравниваются с известными экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание генерации лазерных импульсов в нелинейных средах является одной из важных проблем нелинейной физики. Этому посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные работы (см. ссылки в [1–4]). Теоретические работы посвящены в основном изучению поведения изолированных импульсов. В то же время экспериментально обнаружено, что для достаточно больших времен релаксации в системе с накачкой возможна генерация плотных пакетов импульсов. Такие режимы, особенно природа генерируемых пакетов импульсов и их характеристики, не исследованы достаточно детально. Изучение нелинейных процессов в усиливающих средах связано с решением эволюционных уравнений. Для таких моделей в большинстве случаев отсутствует аналитический анализ процессов генерации пакетов ультракоротких импульсов. Отчасти это связано с аналитическими трудностями, возникающими при описании поведения плотных пакетов импульсов с многими степенями свободы. Некоторые из этих трудностей могут быть преодолены в рамках точно решаемых или близких к интегрируемым моделях. Наиболее детальную информацию об эволюции полей в нелинейных средах можно получить с помощью метода обратной задачи рассеяния [5]. Этот метод использовался для изучения характеристик длинного лазерного усилителя [6], для анализа автомодельных асимптотик решений моделей комбинационного рассеяния [7, 8] и Максвелла–Блоха в средах с невырожденным [9, 10] и вырожденным [11] переходами. В работах [12–14] также исследовалась смешанная краевая задача для модели вынужденного комбинационного рассеяния. Предполагалось, что среда в начальный момент частично инвертирована. В рамках метода обратной задачи рассеяния и численно показано, что решение имеет солитонную и несолитонную составляющие, причем для достаточно больших времен решение имеет несолитонную автомодельную асимпто-

ку. Формально уравнения, которые применялись в работах [8, 12–14] для описания вынужденного комбинационного рассеяния эквивалентны уравнениям Максвелла–Блоха для двухуровневого лазерного усилителя, в котором распространяющийся в среде слабый импульс «вбирает» в себя энергию, запасенную в предварительно инвертированной среде.

В большинстве лазеров используется иная схема усиления. Так, широкий класс газовых, ионных и твердотельных лазеров может быть описан уравнениями Максвелла–Блоха для двухуровневой среды с накачкой верхнего уровня [1, 4]. Экспериментально замечено, что начальная стадия генерации импульсов в усиливающих средах при некоторых условиях может быть аппроксимирована модулированным периодическим решением. В настоящей работе модулированное периодическое (однофазное) решение будет использоваться для описания процесса генерации солитонов в лазере. Такой подход применяется при описании модуляционной неустойчивости, возникающей при распространении ступенчатого импульса в нелинейной среде. В случае уравнения Кортевега–де Вриза этот подход позволяет достаточно точно описать процесс преобразования плоской волны в пакет солитонов. Эвристический метод основывается на решении системы уравнений Уизема для медленно изменяющихся параметров периодической волны [15, 5]. Правомерность такого подхода подтверждена для нескольких моделей численно и аналитически [5].

Целью настоящей работы является описание процесса генерации пакетов солитонов в двухуровневом лазере. Для решения этой задачи развивается теория возмущений для интегрируемых систем уравнений типа уравнений Абловитца–Крускала–Ньюелла–Сегура (АКНС) [5]. Учитываются возмущения специального типа, которые могут быть включены в модель «удлинением» частных производных. Ограниченность области применимости теории возмущений отчасти компенсируется относительной простотой конечных формул и физической актуальностью решаемых задач. При развитии теории возмущений использовались результаты, полученные для интегрируемых моделей с переменным спектральным параметром [16]. Такие модели возникают в разных областях физики. В работах [17, 18] развит аппарат построения N -солитонных решений для интегрируемых уравнений тяготения, а в [19, 20] — соответствующий аппарат конструирования солитонных решений для цилиндрически-симметричной модели Гейзенберга и модели «главного кирального поля». Отличие подхода, используемого в настоящей работе, от точных методов нахождения решений цитированных выше работ состоит в том, что здесь рассматривается динамика плотного пакета большого числа импульсов. Взаимодействие импульсов между собой, а также влияние накачки и релаксационных эффектов приводят к модуляции пакета импульсов, которая описывается периодической волной с медленно изменяющимися параметрами. В работе развивается аппарат теории возмущений для описания медленной деформации периодической волны, который применим для определенного класса моделей (см. ниже). Для этого выведено соответствующее обобщение уравнений Уизема. Решение этих уравнений используется для анализа природы и динамики пакетов импульсов, возникающих в двухуровневом лазере из слабой затравочной плоской волны. Исследуются как стационарный, так и нестационарный режимы генерации. Показано, что возможен режим генерации солитонных пакетов. Результаты сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Содержание работы следующее. В разд. 2 развивается теория возмущений для общей АКНС системы. В разд. 3 выводятся деформированные уравнения Уизема, учи-

тывающие возмущения для однофазного решения. Четвертый раздел посвящен применению аппарата для описания генерации пакетов импульсов в рамках уравнений Максвелла–Блоха с учетом накачки и релаксации. В этой части работы исследуются два типа решений. Первое решение описывает нестационарный процесс расщепления заднего фронта ступенчатого импульса в пакет солитонов и одновременное его усиление. Обсуждается область применимости этого решения. Второе решение описывает процесс перехода системы к стационарному состоянию генерации солитонов. Полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными данными. Обнаружено, что второй режим качественно согласуется с экспериментальными результатами.

2. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Аппарат настоящего раздела базируется в основном на результатах работы [16]. Рассмотрим деформацию интегрируемых уравнений, которая возникает при «удлинении» частных производных. Известно, что такая процедура может приводить к построению интегрируемых уравнений с переменным спектральным параметром при выполнении ряда условий [16]. Эти условия чаще всего не могут быть реализованы в физическом эксперименте. Покажем, что их можно ослабить или полностью убрать для достаточно слабых и медленных деформаций. Из дальнейшего будет видно, что для медленных деформаций предлагаемый подход позволяет исследовать область значений параметров, не достижимую редукицией интегрируемой модели.

Эволюционные уравнения возникают как условие совместности следующих перепределенных систем уравнений:

$$\Phi_\xi = U \Phi, \quad \Phi_\eta = V \Phi. \quad (1)$$

Здесь U, V и Φ — матричные функции ξ, η и спектрального параметра. В общем случае U и V , зависящие рационально от спектрального параметра λ , имеют вид

$$U(\lambda, \xi, \eta) = u_0 + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{u_n(\xi, \eta)}{\lambda - \lambda_n}, \quad V(\lambda, \xi, \eta) = v_0 + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n(\xi, \eta)}{\lambda - \mu_n}, \quad (2)$$

где простые полюсы λ_n и μ_m не совпадают. Условие совместности имеет вид

$$U_\eta - V_\xi + [U, V] = 0. \quad (3)$$

«Удлиним» частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \rightarrow D_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} + F(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} + G(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (4)$$

Вместо условия совместности (3) имеем

$$D_\eta U - D_\xi V + [U, V] = 0. \quad (5)$$

Пусть функции F и G имеют вид

$$F = -\varepsilon \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\lambda - \lambda_m}, \quad G = -\varepsilon \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\lambda - \lambda_m}. \quad (6)$$

Тогда эволюционные уравнения, удовлетворяющие условию (5), принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta u_0 - \partial_\xi v_0 + [u_0, v_0] &= 0, \\ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + \left[u_n, \sum_{k=1}^{N_2} \frac{v_k}{\lambda_n - \mu_k} \right] &= \varepsilon \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m u_n + c_n v_m}{(\lambda_n - \mu_m)^2}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \xi} + \left[v_n, \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u_k}{\mu_n - \lambda_k} \right] &= \varepsilon \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m v_n + b_n u_m}{(\lambda_m - \mu_n)^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Условие совместности требует выполнения соотношений

$$F_\eta + GF_\lambda = G_\xi + FG_\lambda, \tag{8}$$

которые получены в [16] для точно интегрируемых моделей. В реальных физических системах условия (8) накладывают ограничения, а физические параметры в большинстве случаев нереализуемые. Покажем, что в приближенной теории можно избежать выполнения условий (8).

Пусть F и G суть медленные функции переменных:

$$F = \varepsilon f(\varepsilon\eta, \varepsilon\xi, \lambda), \quad G = \varepsilon g(\varepsilon\eta, \varepsilon\xi, \lambda), \tag{9}$$

где ε — малый параметр. Условие (8) выполняется для любых f и g с точностью до членов порядка ε^2 . С этой точностью система (7) удовлетворяет условию совместности (5) для произвольных возмущений в правой части. Такие возмущения могут исследоваться методом обратной задачи рассеяния с учетом удлинения производных (4). Для этого следует заменить представление Лакса (1) на следующее:

$$D_\xi \Phi = U \Phi, \tag{10}$$

$$D_\eta \Phi = V \Phi. \tag{11}$$

Такое представление позволяет использовать возможности метода обратной задачи рассеяния для возмущенной системы. В частности, применение этого метода позволяет построить соответствующее обобщение уравнений Уизема непосредственно в диагональной форме.

3. ДЕФОРМИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ УИЗЕМА

Как отмечено выше, часто не представляется возможным провести аналитический анализ поведения пакета, состоящего из большого числа импульсов. Иногда динамика такого пакета может быть описана достаточно медленной его модуляцией, которая, в свою очередь, описывается изменением параметров пакета импульсов. Параметры при этом подчиняются уравнениям Уизема. При выводе уравнений Уизема предполагается, что масштаб модуляции по обоим переменным много больше соответствующих характеристик импульсов, составляющих пакет. Применение метода обратной задачи рассеяния свело изначально сложную задачу вывода уравнений Уизема к универсальной процедуре, причем конечные уравнения имеют диагональный вид. Важное достоинство предложенного выше подхода теории возмущений состоит в том, что он позволяет

построить «деформированные» уравнения Уизема также в диагональной форме. Известно несколько путей построения уравнений Уизема для N -фазных решений [21–23]. Здесь будет использоваться непосредственное обобщение подхода, предложенного в работе [23] на случай «деформированных» систем.

Пусть общая деформированная АКНС-система представима в виде условия совместности следующих переопределенных систем уравнений:

$$D_\xi \Phi = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & -L_{11} \end{pmatrix} \Phi, \quad (12)$$

$$D_\eta \Phi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} \Phi. \quad (13)$$

Следуя [21], введем квадратичные функции

$$f = (i/2)(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1), \quad g = \phi_1\psi_1, \quad h = \phi_2\psi_2, \quad (14)$$

где $\phi_{1,2}$ и $\psi_{1,2}$ — различные решения систем (12), (13). Эти функции удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} D_\eta f &= i(A_{12}h - A_{21}g), & D_\xi f &= i(L_{12}h - L_{21}g), \\ D_\eta g &= 2iA_{12}f + 2A_{11}g, & D_\xi g &= 2iL_{12}f + 2L_{11}g, \\ D_\eta h &= -2iA_{21}f - 2A_{11}h, & D_\xi h &= -2iL_{21}f - 2L_{11}h. \end{aligned} \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что из (15) следует постоянство величины $P(\lambda) = f^2 - gh$, т. е. $D_\xi P(\lambda) = 0$, $D_\eta P(\lambda) = 0$. Форма периодической волны определяется зависимостью P от спектральных данных. N -фазное решение определяется следующим полиномом:

$$f^2 - gh = P(\lambda) = \prod_{k=1}^{2N+2} (\lambda - \lambda_k) = \sum_{j=0}^{2N+2} P_j \lambda^j. \quad (16)$$

Корни λ_k фиксированы начальными условиями. Для общего N -фазного решения для АКНС-системы справедливо представление

$$f = \sum_{k=0}^{N+1} f_k \lambda^k, \quad g = l(\lambda) \sum_{k=1}^{N+1} g_k \lambda^k, \quad h = p(\lambda) \sum_{k=1}^{N+1} h_k \lambda^k. \quad (17)$$

Здесь $l(\lambda)$ и $p(\lambda)$ — функции спектрального параметра λ , такие, что $l(\lambda)$ ($p(\lambda)$) являются общими множителями L_{12} (L_{21}) и A_{12} (A_{21}). Следуя работам [21, 24], предположим, что функция g имеет вид

$$g = l(\lambda) \prod_{k=1}^{N+1} [\lambda - \mu_k(\xi, \eta)], \quad (18)$$

где μ_k — дополнительная спектральная переменная. Подставив (18) в (15) и полагая $\lambda = \mu_k$, находим систему уравнений для μ_k :

$$D_\xi \mu_k = \frac{2iL_{12}(\mu_k) \sqrt{P(\mu_k)}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j) l(\mu_k)}, \tag{19}$$

$$D_\eta \mu_k = \frac{2iA_{12}(\mu_k) \sqrt{P(\mu_k)}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j) l(\mu_k)}. \tag{20}$$

Следующий этап состоит в построении уравнений Уизема для деформированной системы, т.е. представимой в виде условия совместности линейных систем (12), (13). Для этого проведем непосредственное обобщение результатов работ [23, 24]. Из (12), (13) следует

$$D_\eta \left(\frac{L_{12}}{g} \right) = D_\xi \left(\frac{A_{12}}{g} \right). \tag{21}$$

Введем новую нормировку $f^2 - gh = 1$. Тогда (21) переписывается в виде

$$D_\eta \frac{L_{12}(\lambda) \sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{N+1} (\lambda - \mu_k) l(\lambda)} = D_\xi \frac{A_{12}(\lambda) \sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{k=1}^{N+1} (\lambda - \mu_k) l(\lambda)}. \tag{22}$$

Усреднение по быстрым осцилляциям может быть выполнено заменой интегрирования по фазам интегрированием по дополнительным переменным μ_k . Соответствующие уравнения находятся преобразованием Якоби [22, 23]. Уравнения Уизема получаются как условия обращения в нуль коэффициентов при членах, становящихся сингулярными в пределе $\lambda \rightarrow \lambda_k$, где λ_k — корни полинома P . Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти условия обращения в нуль коэффициентов для производных по переменным ξ, η такие же, как и для удлинённых производных, т.е. обобщённые уравнения остаются диагональными. Перепишем конечные уравнения в виде

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta} + V_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi} + F(\lambda_k) + V_k G(\lambda_k) = 0, \tag{23}$$

где

$$V_k = \left\langle \frac{2iL_{12}(\mu_k)}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j) l(\mu_k)} \right\rangle \left\langle \frac{2iA_{12}(\mu_k)}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j) l(\mu_k)} \right\rangle^{-1}. \tag{24}$$

Формальное выражение для уиземовской «скорости» (24) содержит усреднение по фазам $W_j = k_j \xi + \omega_k \eta + w_0$, где w_0, k_j и ω_k — константы. Уравнения (19), (20) содержат возмущающие члены порядка ϵ . Поэтому при их использовании для усреднения эти члены должны дать поправку порядка ϵ . Предполагаем, что спектральные параметры λ_k изменяются медленно: их производные по переменным имеют порядок малости $O(\epsilon)$. Заметим, что это предположение согласуется с использованным гидродинамическим приближением. Поэтому учет возмущающих членов в уравнениях (19), (20) приводит к поправке $O(\epsilon^2)$, которой мы пренебрегаем в первом приближении.

4. ГЕНЕРАЦИЯ СОЛИТОНОВ В ДВУХУРОВНЕВОМ ЛАЗЕРЕ

Применим построенный аппарат для анализа генерации пакетов импульсов в двухуровневой лазерной системе. Некоторые нелинейные процессы, происходящие в ряде лазерных систем, могут быть описаны в рамках двухуровневой модели с накачкой

верхнего уровня. Накачка может быть описана добавкой коэффициента C (см. ниже) в правую часть уравнения Блоха для разности населенностей. Такая модель применяется для описания газовых и ионных лазеров и реже — для лазеров на красителе [4]. В ионном лазере накачка осуществляется пропусканием тока через ионизованный газ. Это приводит к постоянной «подпитке» верхнего уровня. Релаксационные эффекты играют определенную роль в выходе системы на стационарный режим. Их учет важен для рассмотрения длинных пакетов импульсов, даже если длительность каждого из них мала по сравнению с временем релаксации. Следует отметить, что в литературе отсутствует анализ природы и динамики генерации пакетов ультракоротких импульсов и влияния эффектов накачки и релаксации на этот процесс. Частично это связано, как отмечено выше, с возникающими аналитическими трудностями. Развитый в предыдущих разделах аппарат позволяет значительно упростить исследование поведения пакетов импульсов при усилении.

В этом разделе будут рассмотрены два качественно разных режима генерации пакетов солитонов в лазере. Первый режим носит нестационарный характер. Он сопровождается развитием модуляционной неустойчивости и одновременным усилением. Второй процесс характеризуется быстрым выходом на стационарный режим генерации.

Уравнения Максвелла–Блоха для двухуровневой среды имеют следующий вид:

$$\partial_\tau Q + \gamma_2 Q + 2i\nu Q = -\frac{id_{12}}{\hbar} EN, \quad (25)$$

$$\partial_\tau N_3 + \gamma_1(N_3 - N_0) = \frac{id_{12}}{2\hbar}(Q^* E - QE^*) + C_0. \quad (26)$$

$$\partial_z E = iN_0 \frac{2\pi\omega_0}{c_l} \langle Q \rangle_\Gamma. \quad (27)$$

Здесь d_{12} — дипольный момент перехода, N_3 — разность населенностей уровней, Q — недиагональный член матрицы плотности, N_0 — плотность резонансных атомов, $\gamma_{1,2}$ — релаксационные константы, τ — время запаздывания, ω_0 — частота перехода, c_l — скорость света. Угловые скобки означают усреднение по распределению по скоростям ансамбля атомов: $\langle Q \rangle_\Gamma = \int Q(\nu)\Gamma(\nu)d\nu$. Рассматривается случай, когда длительность генерируемых импульсов много меньше времен релаксации $\gamma_{1,2}^{-1}$. Накачка моделируется присутствием в правой части уравнения (26) функции $C_0(z)$. Обозначим далее

$$t = \tau\sqrt{\Omega}, \quad x = \frac{z\sqrt{\Omega}}{c_l}, \quad \Omega = \frac{2\pi N_0 \omega_0 d_{12}}{\hbar}, \quad C = \frac{C_0}{\sqrt{\Omega}}.$$

Применим процедуру, описанную в предыдущем разделе, для исследования системы уравнений Максвелла–Блоха (25)–(27). Представление Лакса для этой системы имеет вид (12), (13), где

$$\begin{aligned} L_{11} &= -i\lambda, & L_{12} &= E/2, & L_{21} &= E^*/2, \\ A_{11} &= \frac{i}{4} \left\langle \frac{N_3}{\lambda - \nu} \right\rangle_\Gamma, & A_{12} &= -\frac{i}{4} \left\langle \frac{Q}{\lambda - \nu} \right\rangle_\Gamma, & A_{21} &= -\frac{i}{4} \left\langle \frac{Q^*}{\lambda - \nu} \right\rangle_\Gamma. \end{aligned} \quad (28)$$

Система (25)–(27) допускает представление Лакса для произвольной функции $C(x)$ и $\gamma_{1,2} = 0$ либо для $\gamma_1 = \gamma_2 \neq 0$ и $C = 0$ [16]. Объединение ненулевых значений C и $\gamma_1 = \gamma_2$ возможно при наложении условий [16], выполнение которых в реальных физических

условиях не представляется возможным. В рамках приближенной теории, приведенной выше, этих условий можно избежать. Более того, можно исследовать область параметров, которая не достигается редукцией интегрируемой модели с переменным спектральным параметром. Например, в рамках предложенного подхода можно исследовать эффекты, связанные с медленным произвольным изменением накачки со временем.

Выберем следующую форму возмущений:

$$F(\lambda) = \varepsilon \frac{c(x, t)}{\lambda}, \quad G(\lambda) = \varepsilon \gamma \lambda.$$

Здесь ε — малый параметр. Первая функция отвечает учету накачки, вторая описывает релаксационные эффекты. Условие $\gamma_1 = \gamma_2$ может выполняться для газа атомов металлов. Полагаем, что теория позволит выявить закономерности, справедливые и для различных констант релаксации γ_1 и γ_2 . Общие N -фазные решения невозмущенной модели Максвелла–Блоха не известны автору. Однако ясно, что они имеют такую же структуру, как и для нелинейного уравнения Шредингера. Различие состоит лишь в значении фазовых скоростей. Воспользуемся известным однофазным решением невозмущенной модели [21, 25] для интенсивности поля. Для двух пар комплексно-сопряженных корней полинома P , $\lambda_{1,3} = \alpha \pm i\beta$ и $\lambda_{2,4} = \alpha_0 \pm i\beta_0$, имеем

$$|E(x, t)|^2 = |E(0, 0)|^2 \left[(\beta + \beta_0)^2 - 4\beta\beta_0 \operatorname{sn}^2 \left\{ \sqrt{(\beta + \beta_0)^2 + (\alpha - \alpha_0)^2} W, \kappa \right\} \right], \quad (19)$$

где $\kappa = 4\beta\beta_0 / [(\beta + \beta_0)^2 + (\alpha - \alpha_0)^2]$. Фаза W находится из (19), (20):

$$W = t + xV_0^{-1} + t_0, \quad V_0 = - \int \frac{\Gamma(\nu)}{4 \prod_{i=1}^4 (\lambda_i - \nu)} d\nu. \quad (20)$$

Для однофазного решения следует положить в (15), (17) $N = 2$, $l(\lambda) \equiv 1$. Из соотношений (21) находим

$$D_\eta \left(\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{\lambda - \mu} \right) = D_\xi \left[\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{V_0} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} - \left\langle \frac{1}{\lambda - \nu} \right\rangle \right) \right]. \quad (21)$$

Угловые скобки означают усреднение по периоду быстрых осцилляций T ,

$$T = \int dW = \int \frac{d\mu}{\varepsilon (c/\mu + \gamma\mu) + \sqrt{P(-\mu)}}. \quad (22)$$

Выражение (22) следует из (19), (20). Как отмечалось выше, возмущающие члены дают поправку в уравнения Уизема, которой мы пренебрегаем. Поэтому в (22) можно положить $c = \gamma = 0$. При этом

$$T = \frac{2K(k)}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}},$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k :

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)},$$

λ_k — корни полинома P такие, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Считаем, что λ_k — медленные функции от переменных: $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon z, \varepsilon t)$. Усредняя по формуле

$$\left\langle \frac{1}{\lambda - \mu} \right\rangle = \frac{1}{T} \int \frac{1}{\lambda - \mu} d\theta = \frac{1}{T} \int \frac{1}{\lambda - \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{P(-\mu)}}, \quad (33)$$

получаем деформированные уравнения Уизема в виде

$$\partial_x \lambda_n - \frac{1}{V_n} \partial_t \lambda_n = \frac{\gamma}{V_n} \lambda_n + \frac{c}{\lambda_n}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_n} &= \frac{1}{V_0} \left[1 - \left(\lambda_n \left\langle \frac{1}{\lambda_n - \mu} \right\rangle \right)^{-1} \right], \\ \left\langle \frac{1}{\lambda_1 - \mu} \right\rangle &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E(k) + (\lambda_1 - \lambda_2)K(k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)K(k)}, \\ \left\langle \frac{1}{\lambda_2 - \mu} \right\rangle &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)K(k) - (\lambda_1 - \lambda_4)E(k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)K(k)}, \\ \left\langle \frac{1}{\lambda_3 - \mu} \right\rangle &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)E(k) - (\lambda_2 - \lambda_3)K(k)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)K(k)}, \\ \left\langle \frac{1}{\lambda_4 - \mu} \right\rangle &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)E(k) - (\lambda_1 - \lambda_4)K(k)}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)K(k)}. \end{aligned} \quad (35)$$

V_0 имеет вид (30). Для $\Gamma(\nu) = \delta(\nu)$ находим $V_0 = 1/4\sqrt{P_0}$, где $P_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$. В (35) $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с тем же модулем k . Приведенные выше формулы обобщают на случай возмущенных систем уравнения Уизема, построенные в работе [25].

5. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА ДЛЯ УСИЛИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Эволюционные уравнения (34) имеют различные типы решений. Опишем возможный сценарий генерации солитонов при инжектировании в систему бесконечно длинного ступенчатого импульса. Предполагаем, что в процессе эволюции импульса в среде его фронт распадается на последовательность солитонов. При распространении пакета солитонов в активной среде происходит одновременное их усиление. Пусть, для простоты, γ — константа, а c зависит лишь от x . Тогда, используя анзатц

$$\lambda_k = e^{-\gamma t} \sqrt{\zeta_k + 2 \int c(x) dx}, \quad (36)$$

сводим уравнения (34) к обычным однородным уравнениям для «скрытых» параметров $\zeta_k(x, t)$. Таким образом задача свелась к описанию модуляционной неустойчивости ступенчатого импульса, распространяющегося в аттенуаторе, и к соответствующей замене параметров.

Описание модуляционной неустойчивости ступенчатого импульса проводилось во многих работах [5] (см. также [26]). Для этого использовался эвристический подход

Уизема, базирующийся в основном на однофазном решении модели. Это решение модулировалось так, чтобы сшить «чистые» плосковолновое и солитонное решения. При этом часто заранее предполагалось, что положительная асимптотика состоит из последовательности солитонов с растущей при $x \rightarrow \infty$ амплитудой. Для модели Максвелла–Блоха такое предположение не всегда справедливо. Рассмотрим невозмущенную спектральную проблему (13). Пусть в полубесконечную невозбужденную среду в точке $x_0 = 0$ вводится бесконечно длинный прямоугольный импульс поля $E(0, t)$ амплитуды $2A$. Нетрудно найти решение спектральной задачи (13). Непрерывный спектр, связанный с бесконечно длинным импульсом, состоит из действительной оси и отрезка, перпендикулярного и симметричного действительной оси. «Вершина» отрезка, лежащего в мнимой части спектра, отвечает значению спектрального параметра $\xi_t = iA$. Мнимая часть спектра отвечает солитонной асимптотике. Рассматривая полубесконечную ступеньку как предел прямоугольного импульса, нетрудно показать, что солитон, связанный с точкой спектра $\xi_1 < iA$, лежащей на отрезке $[0, +iA]$, имеет меньшую амплитуду и большую скорость.

В общем случае при анализе характеристик генерируемых солитонов необходимо удовлетворить следующим условиям: а) функции Йоста — решения спектральной задачи (12) — должны быть аналитичны в верхней полуплоскости; б) $v_s < c_1$, где v_s — фазовая скорость солитона. Для фазы W из (30) простой анализ показывает, что солитон с большей амплитудой имеет меньшую фазовую скорость. Как следствие, распад такого ступенчатого импульса будет сопровождаться затухающими вперед пульсациями. Как показал численный расчет, существует ограниченная область начальных условий, при которых возможен режим генерации мощных солитонов на переднем фронте ступеньки. Необходимым условием этого является частичная инверсия среды: величина $Q(x, 0)$ не равна нулю.

Другой способ получения генерации солитонов на переднем фронте состоит в инжектировании в систему периодической волны специального вида: ее ассоциированный спектр состоит из отрезков кривых, симметричных относительно действительной оси, таких, что расстояние от точки $(0, 0)$ комплексной плоскости до точки спектра, лежащей на отрезке кривой, растет по мере смещения точки от вершины отрезка к действительной оси.

Рассмотрим случай ненулевой начальной поляризации. При начальной инверсии среды необходимо учитывать вклад непрерывного спектра в процесс генерации, поскольку он участвует в формировании мощных импульсов. В рамках модели Максвелла–Блоха с накачкой (без учета релаксации) (25)–(27) вклад непрерывного спектра в асимптотику вычислен в работе [27], где показано, что поле имеет автомодельное асимптотическое решение с растущей пропорционально \sqrt{x} амплитудой. Это решение зависит от автомодельной переменной $\sigma = \sqrt{2x(c_1 t - x)}$ [27].

Оценим фазовую скорость усиливающегося солитона. Для фиксированной точки σ_0 на переднем фронте находим

$$x - c_1 t = -\sigma_0 t^{-1} + o(t^{-1}),$$

где σ_0 — константа. Оценим скорость солитона на переднем фронте пакета. Для этого построим решение, отвечающее точке спектра ζ_1 . Существует несколько разных методов построения солитонных решений [5], применение их не составляет труда. Односоли-

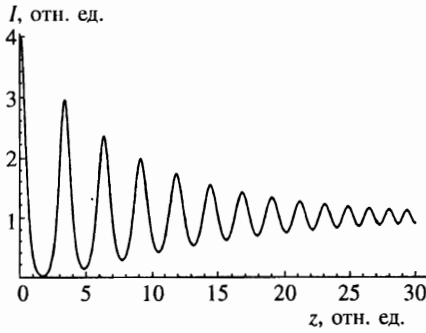


Рис. 1. Преобразование заднего фронта в пакет импульсов без учета усиления и релаксации. Показана зависимость интенсивности поля I от пространственной координаты z

тонное решение модели (25)–(27) для нулевого поля на $x \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$E(x, t) = 4 \operatorname{Im} \zeta_1 \frac{\exp(-2i \operatorname{Im} \phi + ia_0)}{\operatorname{ch}(2 \operatorname{Re} \phi + a_1)}, \tag{37}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2cx + \zeta_1} (1 - e^{-\gamma t})}{\gamma} - \frac{\sqrt{2cx + \zeta_1} - \sqrt{\zeta_1}}{4c}.$$

Для этого решения справедлива асимптотика

$$x - c_1 t = c_1 - c_2 t^{-1/2} + o(t^{-1/2}).$$

Здесь $a_{0,1}, c_{1,2}$ — константы,

$$c_1 = \frac{c_l}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{4c_l} \right), \quad c_2 = \frac{\sqrt{c_l}}{\sqrt{8} (1 + \gamma/4c_l)}.$$

Из приведенных выше разложений видно, что для достаточно больших времен солитонный пакет и часть генерируемых импульсов, связанная с непрерывным спектром, разделяются во времени. Солитонный пакет оказывается позади. Анализируя фазу W , находим, что возможно отщепление солитонов от заднего фронта импульса с медленным увеличением расстояния между ними, причем последний солитон имеет наибольшую амплитуду (рис. 1). В этом случае условия а) и б) удовлетворяются для генерации мощных солитонов на хвосте импульса. Уравнения Уизема могут быть использованы для описания процесса распада заднего фронта ступенчатого импульса. Этот процесс описывается динамикой «скрытых» спектральных данных ζ_k — корней полинома P . Пусть корни полинома P , ζ_1 и ζ_3 , фиксированы: $\zeta_1 = \alpha_0 + i\beta_0$, $\zeta_3 = \alpha_0 - i\beta_0$, α_0 и β_0 — действительные константы. Динамика остальных «движущихся» корней, ζ_2 и ζ_4 , описывается автомодельным решением уравнений (34). Пусть $\zeta_2 = \alpha + i\beta$, $\zeta_4 = \alpha - i\beta$, тогда уравнения (34) сводятся к виду

$$\frac{t}{x} = \frac{1}{\sqrt{P_0}} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha + i\beta} \frac{2i\beta[\alpha_0 - \alpha + i(\beta_0 - \beta)]K(\kappa)}{[\alpha_0 - \alpha + i(\beta_0 - \beta)]K(\kappa) - [\alpha_0 - \alpha + i(\beta_0 + \beta)]E(\kappa)} \right\}. \tag{38}$$

Разделяя мнимую и действительную части в (38), находим

$$R(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} = \frac{\alpha(\alpha_0^2 + \alpha^2 + \beta_0^2 + \beta^2) - 2\alpha(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta)}{\alpha(\alpha_0^2 + \alpha^2 + \beta_0^2 + \beta^2) - 2\alpha_0(\alpha^2 + \beta^2)}, \tag{39}$$

$$\left(\frac{t}{x}\sqrt{P_0} - 1\right) (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha_0 - \alpha)^2 [1 - R(\kappa)] + [\beta_0 - \beta + (\beta_0 + \beta)R(\kappa)]^2 =$$

$$= 4\beta(\alpha_0 - \alpha)(\alpha_0\beta - \alpha\beta_0)(1 - R(\kappa)) + [\beta_0 - \beta + (\beta_0 + \beta)R(\kappa)](\beta\beta_0 - \beta^2 + \alpha\alpha_0 - \alpha^2). \quad (40)$$

Уравнения (38) совместно с выражением для модуля эллиптических функций κ [28],

$$\kappa^2 = \frac{4\beta\beta_0}{(\alpha_0 - \alpha)^2 + (\beta_0 + \beta)^2}, \quad (41)$$

задают в неявном виде зависимость спектральных данных от автомодельной переменной x/t . Эта зависимость носит обычный для родственных задач вид [26]. С ростом x/t корни ζ_2 и ζ_4 монотонно стремятся от значений ζ_1 и ζ_3 соответственно к нулевым. Динамика пакетов импульсов (без усиления), отвечающая такому поведению корней, представлена на рис. 1. Численный расчет показывает, что с учетом усиления и слабой релаксации слабая периодическая волна в нестационарном режиме усиливается и трансформируется в плотный пакет узких импульсов (солитонов), см. рис. 2. Асимптотически амплитуда этих солитонов расходится как \sqrt{x} .

Опишем другой механизм генерации солитонов, в котором релаксация играет решающую роль наряду с усилением. Отличительной особенностью этого механизма является быстрый выход на квазистационарный режим генерации асимптотических солитонов одинаковой амплитуды. Пусть λ_s (λ_s^*) — значение спектрального параметра λ_1 (λ_3), при котором правая часть уравнения (34) обращается в нуль. Эта точка является устойчивым фокусом в фазовой плоскости. На рис. 3 показана зависимость мнимой и действительной частей λ_2 от переменной x . Выберем в качестве затравочного поля гармоническую волну малой амплитуды. Пусть, как и выше, два корня, λ_1 и λ_3 , изменяются в интервале, начало которого отвечает плосковолновому решению, конец — солитонному пределу. Тогда при изменении λ_2 от нуля до λ_s гармоническая волна трансформируется в последовательность асимптотических солитонов одинаковой амплитуды (рис. 4). Численный анализ фазовой скорости переднего солитона показал, что скорость монотонно стремится к световой при росте накачки C .

В реальных экспериментах зачастую не удается наблюдать детали процесса формирования пакетов импульсов в течение одного прохода резонатора. В то же время исследование начальной стадии усиления важно для изучения характеристик генерируемых импульсов. Знание зависимости групповой скорости от координаты, времени и величины накачки позволяет более эффективно использовать лазер для дальнейшего

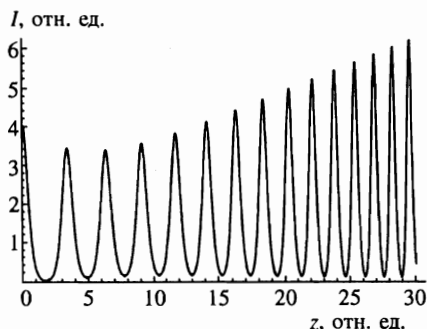


Рис. 2. То же, что на рис. 1, с учетом усиления и релаксации; $\varepsilon c = 0.05$, $\varepsilon\gamma = \varepsilon\gamma_{1,2} = 0.05$

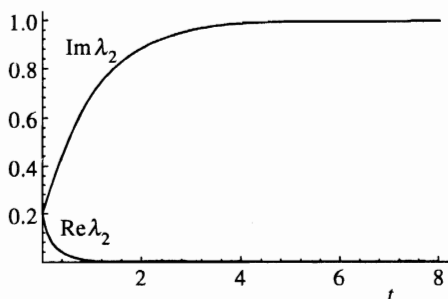


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость мнимой и действительной частей спектрального параметра λ_2 от времени t во втором механизме генерации солитонов. Время выражено в единицах $(\epsilon \gamma)^{-1}$

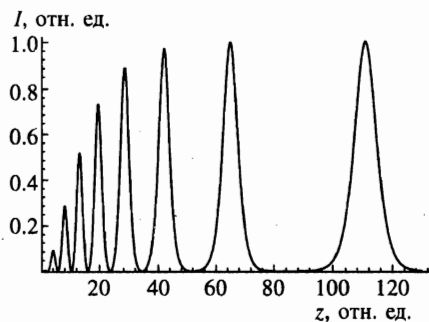


Рис. 4

Рис. 4. Преобразование слабой затравочной гармонической волны в пакет солитонов во втором механизме генерации

усиления и преобразования генерируемых импульсов. Выявление механизма генерации солитонов и его особенностей представляет поэтому практический интерес.

Проведем качественное сравнение с имеющимися в литературе экспериментальными данными. В работе [29] исследовалась зависимость скорости генерируемых импульсов от длины усиления. Обнаружено, в частности, что с увеличением длины усиления скорость импульсов монотонно растет. Это свойство является общим для обоих рассмотренных выше режимов генерации. В первом случае система не достигает стационарного режима. Амплитуда генерируемых импульсов асимптотически растет пропорционально \sqrt{x} . Второй механизм генерации предсказывает быстрый выход системы на квазистационарный режим генерации солитонов. Солитонное решение является аттрактором. Для формирования мощных солитонных импульсов достаточно инжектировать в среду пакет, имеющий малую высоту и достаточно большую длину.

Приведем оценки физических параметров, при которых возможно наблюдение процесса генерации солитонов. Для усилителя на CO_2 время релаксации $T_2 \approx 10$ пс и дипольный момент колебательно-вращательного перехода составляет $d_{12} \approx 3 \cdot 10^{-20}$ ед. СГС. Пусть давление газа 10 атм. В результате усиления на выходе лазера возможны импульсы длительностью порядка единиц пикосекунд и интенсивности излучения порядка 1 ТВт/см^2 . Это означает, что на длине лазера, составляющей десятки сантиметров, могут одновременно находиться десятки и сотни ультракоротких импульсов. Процесс их усиления может быть описан как модуляция параметров всего пакета как целого. При этом, если принять, что процесс усиления описывается вторым механизмом генерации, следует ожидать выхода на стационарное значение уже за один проход активной среды лазера. Для Nd:YAG- и He-Ne-лазеров экспериментально было достигнуто соотношение временных размеров солитона к времени прохождения им резонатора равное 0.02–0.01 [4]. В этих экспериментах было обнаружено, что амплитуда солитона достигает значения, близкого к стационарному, за время, не превышающее время одного прохода резонатора. Если допустить, что время поперечной релаксации T_2 является минимальным релаксационным параметром, то грубая оценка показыва-

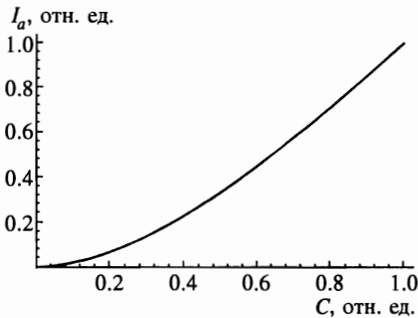


Рис. 5. Зависимость квадрата амплитуды I_a асимптотических солитонов ($z \rightarrow \infty$) от величины накачки C

ет, что во втором рассмотренном выше механизме генерации выход на стационарное значение для этих лазеров (см. ссылки в [4]) должен наблюдаться в течение первого прохода резонатора пакетом импульсов.

Последний сценарий генерации, описанный выше, на наш взгляд качественно согласуется с имеющимися экспериментальными данными по генерации импульсов в газовых и ионных лазерах [4]. Соотношение между длительностью импульсов и временем релаксации, использованное при численных расчетах, выполнимо в эксперименте для газовых и ионных лазеров. Во втором механизме генерации можно найти зависимость амплитуды генерируемых солитонов от величины накачки C . В ионных лазерах величина C определяется силой тока, который используется для возбуждения ионов. На рис. 5 изображена зависимость амплитуды генерируемых асимптотических солитонов от C . Эта зависимость может служить для качественной проверки теории и должна выполняться для импульсов с интенсивностью, далекой от насыщающей.

В работе предложен приближенный метод анализа динамики плотных пакетов импульсов в нелинейных средах. Этот метод, на наш взгляд, дает возможность провести аналитическое исследование начальных стадий когерентных нелинейных процессов в нелинейных, в том числе усиливающих, средах. В более общих случаях необходимо включать в рассмотрение N -фазные решения и учитывать эффекты насыщения. Частично это можно сделать, обобщая соответствующие результаты настоящей работы. Результаты работы могут применяться также для описания процессов комбинационного рассеяния и четырехволнового смешения [30, 31] с учетом релаксации и накачки, причем в рамках предложенного подхода удастся избежать наложения искусственных ограничений на физические параметры [32].

Автор признателен Хайнцу Штойделю (Heinz Steudel) за обсуждения затронутых в работе проблем и особенно А. А. Аполонскому за многочисленные стимулирующие обсуждения лазерных экспериментов и сопутствующих теоретических задач. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 95-02-04392) и Немецким научно-исследовательским обществом (Deutsche Forschungsgemeinschaft) (грант 426 RUS 113/89/0(R,S)).

Литература

1. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).
2. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. M. Sklyarov, *Phys. Rep.* **191**, 1 (1991).
3. A. C. Newell, J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Redwood City, CA (1992).
4. A. A. Apolonsky, A. A. Zabolotskii, V. P. Drachev, and E. I. Zinin, *Proc. SPIE* **2041**, 385 (1993).
5. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
6. С. В. Манаков, ЖЭТФ **83**, 68 (1982).
7. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 234 (1983).
8. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ЖЭТФ **86**, 1204 (1984).
9. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ТМФ **63**, 11 (1985).
10. С. В. Манаков, В. Ю. Новокшенов, ТМФ **69**, 40 (1986).
11. I. R. Gabitov and S. V. Manakov, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 495 (1983).
12. H. Steudel, *Quant. Opt.* **2**, 387 (1990).
13. D. J. Kaup and C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **42**, 1712 (1990).
14. C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **47**, 2235 (1993).
15. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).
16. С. П. Бурцев, А. В. Михайлов, В. Е. Захаров, ТМФ **70**, 323 (1987).
17. В. А. Белинский, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **75**, 1953 (1978).
18. В. А. Белинский, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **77**, 3 (1979).
19. А. В. Михайлов, А. И. Яремчук, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 78 (1982).
20. A. V. Mikhailov and A. I. Yaremchuk, *Nucl. Phys. B* **82**, 202 (1982).
21. В. А. Марченко, *Мат. сборник* **95**, 331 (1974).
22. В. А. Dubrovin, V. B. Matveev, and S. P. Novikov, *Russian Math. Surveys* **31**, 59 (1976); E. Date and S. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Supp.* **59**, 107 (1976); E. Date, *Progr. Theor. Phys.* **59**, 265 (1978); E. Date, *Theor. Phys. Supp.* **59**, 265 (1978).
23. H. Flaschka, M. G. Forest, and D. W. McLaughlin, *Commun. Pure Appl. Math.* **68**, 739 (1980).
24. M. G. Forest and D. W. McLaughlin, *J. Math. Phys.* **27**, 1248 (1982).
25. А. М. Камчатнов, М. В. Павлов, ЖЭТФ **107**, 44 (1995).
26. А. М. Камчатнов, submitted to *Phys. Rep.* (1997).
27. S. P. Burtsev, I. R. Gabitov, V. E. Zakharov, in *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, World Scientific, Singapore (1988), p. 897.
28. *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramovitz and I. A. Stegun, U. S. Gpo, Washington DC (1964).
29. А. А. Аполонский, *Опт. и спектр.* **61**, 564 (1986).
30. A. A. Zabolotskii, *Physica D* **40**, 283 (1989).
31. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. A* **50**, 3384 (1994).
32. S. P. Burtsev, I. R. Gabitov, *Phys. Rev. A* **49**, 2065 (1994).