

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ АТОМОВ ИМПУЛЬСНЫМ ПОЛЕМ В УСЛОВИЯХ КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ***А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин\*, В. И. Юдин**Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 30 апреля 1997 г.

Развивается полностью квантовое аналитическое описание рассеяния атомов с моментами  $j_g = j \rightarrow j_e = j$  ( $j$  — целое) импульсным  $\sigma_+ - \sigma_-$ -полем. В приближении неподвижных атомов с точным учетом эффектов отдачи решена задача об изменении распределения атомов по внутренним и поступательным степеням свободы под действием одного импульса поля для  $j_g = 1, 2$ . В аналитическом виде найдены рекуррентные формулы, позволяющие вычислять распределение после действия произвольной последовательности импульсов. Показано, что при дискретных (резонансных) значениях временного интервала между импульсами действие  $N$  импульсов поля приводит к эффективному образованию и сужению пиков в дискретных точках импульсного пространства, а также к уширению огибающей этих пиков. В случае широкого начального импульсного распределения получены явные формулы для пиков и огибающей и исследовано их асимптотическое поведение при  $N \gg 1$ . Кроме того, в пределе слабого поля численно исследована зависимость контраста диаграммы рассеяния от времени действия импульса.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Пионерские работы [1, 2] положили начало интенсивному исследованию кинетических проявлений когерентного пленения населенностей (КПН). К настоящему времени теоретически разработаны [2-9] и частично реализованы экспериментально [1, 10-12, 9] различные схемы лазерного охлаждения атомов ниже однофотонной энергии отдачи за счет селективного по скорости когерентного пленения населенностей в полях с пространственными градиентами поляризации и интенсивности. Идея, лежащая в основе этих методов охлаждения, заключается в следующем. В стационарном неоднородно поляризованном поле атомы захватываются в невзаимодействующее с полем КПН-состояние (темное состояние)  $|\Psi_{NC}\rangle$ , которое представляет собой когерентную суперпозицию волновых функций магнитных подуровней основного состояния с различными значениями импульса (например, в  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поле  $p, p \pm \hbar k, p \pm 2\hbar k \dots$ , так называемое  $p$ -семейство [2]). При свободном движении атомов компоненты этой суперпозиции приобретают различные фазы. В результате, если атом находился в КПН-состоянии в некоторый момент времени, в последующие моменты времени в общем случае КПН-состояния разрушаются поступательным движением и атом начинает взаимодействовать с полем. Однако степень этого разрушения и интенсивность взаимодействия атомов с полем селективно зависят от значения импульса  $p$ . Так, населенность возбужденного состояния, рассматриваемая как функция импульса, имеет провал вблизи  $p = 0$ .

\* E-mail: Tumaikin@Univ.nsk.su

Под действием случайных толчков при поглощении и излучении фотонов атомы аккумулируются в этой области импульсного пространства, где взаимодействие с полем минимально. Таким образом, охлаждение здесь является следствием специфического диффузионного процесса [13–16].

Недавно двумя группами была предложена новая схема импульсного [17] (или рамсеевского [18]) охлаждения, которая, как это видно из результатов эксперимента [18] и квантовых симуляций [17], позволяет получать более узкие структуры в распределении атомов по скоростям и за более короткое время, чем в случае непрерывного действия поля. Обобщая рассуждения, приведенные в [17, 18], обсудим физические основы метода импульсного охлаждения. За время  $\tau$  действия импульса  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поля атомы перекачиваются в темное состояние:

$$|\Psi_{NC}\rangle = \sum_{\mu_g = -j_g, -j_g+2, \dots, j_g} \psi_{\mu_g} |p - \hbar k \mu_g, j_g, \mu_g\rangle,$$

где  $j_g$  и  $\mu_g$  — квантовые числа углового момента и его проекции в основном состоянии. Далее в течении временного интервала  $T$  поле выключено, и атомы движутся свободно, при этом вследствие расфазировки различных компонент суперпозиции происходит переход из КПН-состояния в состояния, которые могут взаимодействовать с полем:

$$|\Psi_{NC}, T\rangle = \sum_{\mu_g = -j_g, -j_g+2, \dots, j_g} \psi_{\mu_g} \exp\left(-\frac{iT}{\hbar} \frac{(p - \hbar k \mu_g)^2}{2M}\right) |p - \hbar k \mu_g, j_g, \mu_g\rangle.$$

Как видно из этой формулы, если временной интервал между импульсами выбрать равным  $T_n = \pi n / 4\omega_r$  ( $\omega_r = \hbar k^2 / 2M$  — частота, соответствующая энергии отдачи,  $n$  — не равное нулю целое число), то для выделенных дискретных значений импульса ( $p_m = 2\hbar k m / n$  для нечетных  $j_g$  и  $p_m = (2m/n + 1)\hbar k$  для четных  $j_g$ ) состояния  $|\Psi_{NC}, T\rangle$  и  $|\Psi_{NC}\rangle$  будут отличаться лишь общим фазовым множителем. Таким образом, при дискретных значениях времени  $T_n$  и импульса  $p_m$  КПН-состояние восстанавливается. (Исключение представляет случай  $j_g = 1$ , когда ограничений на время  $T$  не возникает, при этом  $p_m = 2\pi\hbar k m / 4\omega_r T$ .) Если по истечении временного интервала  $T_n$  включается второй световой импульс, то атомы с выделенными импульсами  $p_m$  не будут взаимодействовать с полем, а остальные будут рассеиваться с изменением количества движения вследствие индуцированного и спонтанного эффектов отдачи. В результате импульсное распределение приобретает резкую гребнеобразную форму [17]. Применение последовательности световых импульсов позволяет увеличить контраст диаграммы рассеяния атомов [18]. Отметим, что резкая селективность по атомному импульсу в данном случае обеспечивается большим значением времени  $T$  по аналогии с резонансами Рамси [19]. Подчеркнем, что движение атомов вдоль поперечных по отношению к волновому вектору координат приводит к появлению общего фазового множителя в функции  $|\Psi_{NC}, T\rangle$  (не дает вклада в расфазировку) и поэтому совершенно не сказывается на наших рассуждениях.

В настоящей работе развивается квантовая теория рассеяния атомов с моментами  $j_g = j \rightarrow j_e = j$  ( $j$  — целое) импульсным  $\sigma_+ - \sigma_-$ -полем. Цель статьи — дать полностью квантовое аналитическое описание эффекта рамсеевского охлаждения. Основное приближение, используемое нами, заключается в том, что время жизни атомов в темном состоянии, ограниченное эффектами поступательного движения, значительно превышает длительность светового импульса  $\tau$ . В рамках теории возмущений это условие можно записать в виде неравенства  $\gamma\tau (kv/\Omega)^2 \ll 1$  ( $\gamma$  — радиационная ширина

возбужденного уровня,  $kv$  — доплеровский сдвиг,  $\Omega$  — частота Раби [2, 16], выполнение которого подразумевает использование либо предварительно охлажденных атомов, либо достаточно сильного лазерного поля. Кроме того, мы будем предполагать (кроме разд. 5), что реализуется стационарный режим взаимодействия, т. е.  $\gamma\tau \gg 1$  и  $\gamma S\tau \gg 1$ , здесь  $S = \Omega^2/(\gamma^2/4 + \delta^2)$  — параметр насыщения, а  $\delta$  — отстройка от резонанса. В этих условиях матрица плотности атомов после действия импульса поля имеет вид

$$\hat{\rho} = |\Psi_{NC}\rangle W \langle\Psi_{NC}|.$$

Функция  $W$  зависит от начальной (до действия светового импульса) матрицы плотности и может быть найдена точно (вне рамок разложения по импульсу отдачи) методом, описанным нами в [16]. Эволюция матрицы плотности атомов, находящихся в основном состоянии, при свободном распространении определяется оператором кинетической энергии  $\hat{H}_K$ . Решение задачи о вычислении соответствующего унитарного оператора  $\exp(-i/\hbar\hat{H}_K T)$  хорошо известно. Применяя в нужном порядке указанные выше преобразования, можно рассчитать атомное распределение после действия произвольной последовательности импульсов поля.

В данной работе эта задача решена для двух значений моментов  $j_g = 1, 2$ . В аналитическом виде найдены рекуррентные формулы, связывающие распределение после действия  $N+1$  импульса  $W^{(N+1)}$  с  $W^{(N)}$  — распределением после  $N$  импульсов. Показано, что действие последовательности импульсов приводит к образованию и сужению пиков в дискретных точках импульсного пространства, а также к уширению огибающей этих пиков. В практически важном случае широкого (по сравнению с импульсом фотона) начального импульсного распределения получены явные формулы для пиков и огибающей. Рассмотрено асимптотическое поведение решения при  $N \gg 1$ . Кроме того, в условиях слабого насыщения  $S \ll 1$  исследована зависимость контраста диаграммы рассеяния от параметра  $\gamma S\tau$ . Проведено сравнение с работами [17, 18] и обнаружено качественное совпадение соответствующих результатов.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерное (вдоль оси  $z$ ) движение атомов, основное и возбужденное состояния которых образуют оптический переход  $j_g = j \rightarrow j_e = j$  ( $j$  — целое) при резонансном взаимодействии с импульсным  $\sigma_+ - \sigma_-$ -полем. Поле в интервале действия  $\tau$  будем считать монохроматическим:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \mathbf{e}(z)E_0 \exp(-i\omega t) + \text{c. c.}, \\ \mathbf{e}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{-1} \exp(ikz) - \mathbf{e}_{+1} \exp(-ikz)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_{\pm 1} = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$  — единичные циклические векторы. В каждой точке пространства поле (1) является линейно поляризованным. Направление вектора поляризации  $\mathbf{e}(z)$  в точке  $z = 0$  совпадает с осью  $x$ , а при произвольном  $z$  повернуто на угол  $kz$ , т. е. поле представляет собой линейно поляризованную спираль. В связи с этим удобно (как показано в [16]) перейти от лабораторной к локальной системе координат, в которой ось  $x'$  вращается вместе с  $\mathbf{e}(z)$ . Соответствующие формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{O}_{lab} &= \hat{U}(z)\hat{O}_{loc}\hat{U}^\dagger(z) \\ \hat{O}_{loc} &= \hat{U}^\dagger(z)\hat{O}_{lab}\hat{U}(z) \\ \hat{U}(z) &= \exp\left(-ikz\hat{J}_z\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\hat{J}_z$  — оператор проекции углового момента, а  $\hat{O}_{lab}$ ,  $\hat{O}_{loc}$  — матрицы, представляющие произвольный оператор в лабораторной и локальной системах координат соответственно. В частности, гамильтониан свободного атома во вращающейся системе координат запишется следующим образом:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_K + \hbar\omega_0\hat{\Pi}_e, \tag{3}$$

здесь

$$\hat{H}_K = \frac{(\hat{p} - \hbar k\hat{J}_z)^2}{2M} \tag{4}$$

— оператор кинетической энергии, который теперь зависит от значений проекции момента,  $\omega_0$  — частота перехода, а

$$\hat{\Pi}_e = \sum_{\mu_e = -j_e}^{j_e} |j_e, \mu_e\rangle \langle j_e, \mu_e| \tag{5}$$

— оператор, проектирующий на возбужденное состояние,  $|j_e, \mu_e\rangle$  — волновые функции магнитных подуровней. Гамильтониан резонансного взаимодействия атомов с полем (1) в локальной системе координат является пространственно-однородным:

$$\hat{H}_{A-F} = \hbar\Omega\hat{V} \exp(-i\omega t) + \text{h.c.}, \tag{6}$$

где  $\Omega$  — частота Раби (которую без ограничения общности будем считать положительной), а безразмерный оператор  $\hat{V}$  определен через коэффициенты Клебша–Гордана (ось квантования направлена вдоль  $z$ ):

$$\hat{V} = \frac{\hat{V}_{-1} - \hat{V}_{+1}}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

$$\hat{V}_q = \sum_{\mu_e, \mu_g} |j_e, \mu_e\rangle \langle j_e(j_g, 1), \mu_e | j_g, \mu_g; 1, q \rangle \langle j_g, \mu_g|. \tag{8}$$

Переходы, индуцированные полем (1), изображены на рис. 1, из которого видно, что существуют две независимые системы взаимодействующих подуровней [20]. Одна из них состоит из  $\Lambda$ -звеньев и начинается с подуровня  $|j_g, -j_g\rangle$ . Другая состоит из  $V$ -звеньев и начинается с подуровня  $|j_e, -j_e\rangle$ . Будем называть эти системы  $\Lambda$ - и  $V$ -системами соответственно.

Выделяя обычным образом быструю зависимость от времени на частоте поля, получим квантовое кинетическое уравнение, описывающее эволюцию медленных компонент матрицы плотности во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(z_1, z_2) = & -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}_K, \hat{\rho}(z_1, z_2) \right] - i\Omega \left[ (\hat{V} + \hat{V}^\dagger), \hat{\rho}(z_1, z_2) \right] - \\ & - \left( \left( \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \hat{\Pi}_e \hat{\rho}(z_1, z_2) + \left( \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \hat{\rho}(z_1, z_2) \hat{\Pi}_e \right) + \\ & + \gamma \sum_{q=\pm 1,0} Q_q(k(z_1 - z_2)) \hat{V}_q^\dagger \hat{\rho}(z_1, z_2) \hat{V}_q, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\delta = \omega - \omega_0$  — отстройка от резонанса, а функции  $Q_q(k(z_1 - z_2))$  описывают индуцированный и спонтанный эффекты отдачи:

$$\begin{aligned} Q_{\pm 1}(kz) = & \frac{3}{2} \left( \frac{\sin(kz)}{kz} + \frac{\cos(kz)}{(kz)^2} - \frac{\sin(kz)}{(kz)^3} \right) \exp(\mp ikz), \\ Q_0(kz) = & 3 \left( -\frac{\cos(kz)}{(kz)^2} + \frac{\sin(kz)}{(kz)^3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В (9) использовано стандартное обозначение коммутатора  $[\hat{A}, \hat{B}]$ . Уравнение (9) точно учитывает квантовые эффекты, обусловленные как передачей импульса от поля атомам в радиационных процессах, так и поступательным движением атомов. Подчеркнем, что удобство использования координатного представления для поступательных степеней свободы обусловлено в данном случае неприменимостью квазиклассических разложений по степеням  $k(z_1 - z_2)$ .

Несколько слов об обосновании часто используемой в задачах о механическом действии плоской электромагнитной волны на атомы (см., например, [22]) модели одномерного движения. Разумеется, вследствие взаимодействия с вакуумными модами поля декартовы координаты в уравнениях движения в общем случае не разделяются. Однако эти корреляции, обусловленные спонтанным эффектом отдачи, будут малы, если изменение поперечного импульса в элементарном акте излучения незначительно. Именно этот случай, когда поперечная кинетическая энергия значительно превышает однофотонную энергию отдачи  $k_B T_\perp \gg \hbar\omega_r$ , рассматривается в данной работе.

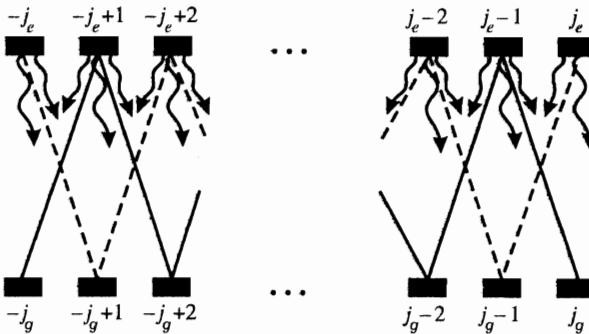


Рис. 1. Схема радиационных переходов между зеемановскими подуровнями основного и возбужденного состояний. Сплошные линии соответствуют индуцированным переходам между подуровнями  $\Lambda$ -системы, штриховые —  $V$ -системы. Волнистые стрелки изображают спонтанные переходы

### 3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕПОДВИЖНЫХ АТОМОВ

Если за время действия светового импульса  $\tau$  атомы в среднем смещаются на расстояние много меньше длины волны света:

$$v\tau \ll \lambda, \tag{11}$$

то их можно считать неподвижными и опустить первый член в правой части (9). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка  $\partial\rho/\partial t = \mathcal{L}\rho$ , решение которой запишем в виде

$$\rho_{\mu_1, \mu_2}(z_1, z_2|t + \tau) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \mathcal{R}_{\mu_1, \mu_2}^{\nu_1, \nu_2}(z_1, z_2|\tau) \rho_{\nu_1, \nu_2}(z_1, z_2|t), \tag{12}$$

где  $\mathcal{R}$  представляет матричную экспоненту от соответствующего оператора Лиувилля  $\mathcal{R}(\tau) = \exp(\tau\mathcal{L})$ . При достаточно больших  $\tau$ ,

$$\gamma\tau \gg 1, \quad \gamma S\tau \gg 1, \tag{13}$$

где  $S = \Omega^2/(\gamma^2/4 + \delta^2)$  — параметр насыщения, атомы полностью перекачиваются в темное состояние, чему соответствует стационарное решение (предел  $\tau \rightarrow \infty$  в (12))

$$\widehat{\rho}(z_1, z_2) = |\Psi_{NC}\rangle W(z_1, z_2) \langle\Psi_{NC}|. \tag{14}$$

КПН-состояние  $|\Psi_{NC}\rangle$  обращает в нуль оператор взаимодействия с полем

$$\widehat{H}_{A-F} |\Psi_{NC}\rangle = 0 \tag{15}$$

и является суперпозицией зеемановских волновых функций основного состояния:

$$|\Psi_{NC}\rangle = \sum_{\mu_g} \psi_{\mu_g} |j_g, \mu_g\rangle. \tag{16}$$

Коэффициенты  $\psi_{\mu_g}$  проще всего определить, направив ось квантования вдоль вектора поляризации поля, тогда темное состояние совпадет с зеемановским подуровнем  $|j_g, 0\rangle$ . Осуществляя затем поворот на угол  $\pi/2$  относительно оси  $y$  (возвращаясь, таким образом, к исходному выбору оси квантования вдоль  $z$ ), найдем, что  $\psi_{\mu_g}$  выражаются через  $d$ -функции Вигнера (элементы матриц вращения) [21]:

$$\psi_{\mu_g} = d_{\mu_g, 0}^{j_g}(\pi/2). \tag{17}$$

Функция  $W(z_1, z_2)$  имеет смысл двухточечной функции распределения в локальной системе координат. В рассматриваемом случае соотношение между  $W$  и обычной функцией распределения  $F$  в лабораторной системе координат устанавливается формулой

$$F(z_1, z_2) = \text{Tr} \left\{ \widehat{U}(z_1) \widehat{\rho}(z_1, z_2) \widehat{U}^\dagger(z_2) \right\} = \langle\Psi_{NC}| \exp \left( -ik(z_1 - z_2) \widehat{J}_z \right) |\Psi_{NC}\rangle W(z_1, z_2), \tag{18}$$

где след берется по внутренним степеням свободы атома. Значение  $W$  определяется передачей импульса в процессах спонтанного и индуцированного рассеяния фотонов во

время действия поля, а также начальным (до действия светового импульса) распределением по внутренним и поступательным степеням свободы. Согласно [16], функцию  $W$  после действия импульса поля можно записать в виде

$$W(z_1, z_2|t + \tau) = \text{Tr} \left\{ \widehat{C}(z_1 - z_2) \widehat{\rho}(z_1, z_2|t) \right\}, \quad (19)$$

где матрица  $\widehat{C}(z_1 - z_2)$  является левым собственным вектором лиувиллиана  $\mathcal{L}$ , отвечающим нулевому собственному значению:

$$0 = i\Omega \left[ (\widehat{V} + \widehat{V}^\dagger), \widehat{C}(z) \right] - \left( (\gamma/2 + i\delta) \widehat{\Pi}_e \widehat{C}(z) + (\gamma/2 - i\delta) \widehat{C}(z) \widehat{\Pi}_e \right) + \gamma \sum_{q=\pm 1, 0} Q_q(kz) \widehat{V}_q \widehat{C}(z) \widehat{V}_q^\dagger. \quad (20)$$

Условие нормировки для  $\widehat{C}$  выберем в виде

$$\langle \Psi_{NC} | \widehat{C}(z) | \Psi_{NC} \rangle = 1. \quad (21)$$

В пренебрежении поступательным движением атомов след  $\text{Tr} \left\{ \widehat{C}(z_1 - z_2) \widehat{\rho}(z_1, z_2|t) \right\}$  является интегралом движения системы (9). Вычисляя его значения до и после действия импульса, с учетом (14) и (21) получим (19). Из (20), (21) следуют четыре фундаментальных свойства матрицы  $\widehat{C}(z)$ , которые выполняются при любых целых значениях углового момента  $j$ :

1.  $C_{\mu_1, \mu_2}(0) = \delta_{\mu_1, \mu_2}$ , что соответствует сохранению полной населенности атомных подуровней в процессах оптической накачки.

2. Асимптотически при  $|kz| \gg 1$ , функции  $Q_q(kz)$  (10) обращаются в нуль и решение (20) принимает вид  $\widehat{C}(\infty) = |\Psi_{NC}\rangle \langle \Psi_{NC}|$ . Это свойство допускает принципиальную возможность создания корреляций между произвольно удаленными точками  $z_1$  и  $z_2$ .

3. Свойство  $\widehat{C}^\dagger(z) = \widehat{C}(-z)$  обеспечивает положительную определенность функции распределения атомов по импульсам.

4. В отличие от трех предыдущих четвертое свойство  $C_{\mu_1, \mu_2}(z) = C_{-\mu_1, -\mu_2}(-z)$  специфично для рассматриваемой конфигурации  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поля и проявляется в симметрии диаграммы рассеяния атомов относительно нуля.

В рамках рассматриваемой задачи до включения импульса поля атомы находятся в основном состоянии, поэтому для определения функции  $W$  достаточно знать матричные элементы  $\widehat{C}$  по волновым функциям магнитных подуровней основного уровня  $|j_g, \mu_g\rangle$ . Так как  $\Lambda$ - и  $V$ -системы магнитных подуровней являются независимыми (отсутствует когерентность между ними), то эту матрицу  $\widehat{C}^{gg}$  можно представить в блочно-диагональном виде:

$$\widehat{C}^{gg} = |\Psi_{NC}\rangle \langle \Psi_{NC}| + \sum_{i, i'=1}^{j_g} |\Psi_i^\Lambda\rangle C_{i, i'}^\Lambda \langle \Psi_{i'}^\Lambda| + \sum_{i, i'=1}^{j_g} |\Psi_i^V\rangle C_{i, i'}^V \langle \Psi_{i'}^V|, \quad (22)$$

где

$$|\Psi_i^\Lambda\rangle = \sum_{\mu_g} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( d_{\mu_g, -i}^{j_g}(\pi/2) + d_{\mu_g, i}^{j_g}(\pi/2) \right) |j_g, \mu_g\rangle \quad (23)$$

и

$$|\Psi_i^V\rangle = \sum_{\mu_g} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( d_{\mu_g, -i}^{j_g}(\pi/2) - d_{\mu_g, i}^{j_g}(\pi/2) \right) |j_g, \mu_g\rangle \quad (24)$$

являются собственными векторами оператора  $\widehat{V}^\dagger \widehat{V}$  с собственными значениями

$$\alpha_i = \frac{i^2}{j_g(j_g + 1)}, \quad i = 1, \dots, j_g. \quad (25)$$

Метод определения коэффициентов в (23) и (24) аналогичен использованному выше при выводе (17). Индексы  $\Lambda$  и  $V$  отмечают принадлежность вектора к  $\Lambda$ - либо  $V$ -системе зеемановских подуровней (см. рис. 1). Так, в формуле (23)  $\mu_g$  пробегает значения  $-j_g, -j_g + 2, \dots, j_g$ , а в (24) — значения  $-j_g + 1, -j_g + 3, \dots, j_g - 1$ .

Мы нашли явный вид матриц  $\widehat{C}^{\Lambda, V}$  для двух переходов  $j_g = 1, 2$ .

### 3.1. Переход $j_g = 1 \rightarrow j_e = 1$

В этом случае

$$\begin{aligned} C^\Lambda &= \frac{Q_1 + Q_{-1}}{4 - Q_1 - Q_{-1}}, \\ C^V &= \frac{2Q_0}{4 - Q_1 - Q_{-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

не зависят от отстройки и насыщения, что является особенностью данного перехода.

### 3.2. Переход $j_g = 2 \rightarrow j_e = 2$

Здесь матрицы  $\widehat{C}^{\Lambda, V}$  можно представить как симметричную и антисимметричную относительно  $Q_0$  части

$$\begin{aligned} \widehat{C}^\Lambda &= \widehat{M}(Q_0) + \widehat{M}(-Q_0), \\ \widehat{C}^V &= \widehat{M}(Q_0) - \widehat{M}(-Q_0) \end{aligned} \quad (27)$$

матрицы

$$\widehat{M}(Q_0) = \frac{2Q_0 + Q_{-1} + Q_1}{2D} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Явный вид коэффициентов  $D$  и  $m_{i,j}$  дан в Приложении.

Как видно из (П.1)–(П.5), зависимость от отстройки и амплитуды поля обусловлена отличными от нуля недиагональными элементами  $m_{1,2}$  и  $m_{2,1}$ . Эта когерентность индуцирована эффектом отдачи и пропорциональна разности  $(Q_{-1} - Q_1)$ , которая обращается в нуль при  $kz = n\pi$  (см. (10)). Полагая  $Q_{-1} = Q_1 = Q$ , получим редуцированную матрицу не зависящую от  $\delta$  и  $\Omega$ :

$$\widehat{M}_{red} = \frac{3(Q_0 + Q)}{36 - Q_0^2 - 2Q_0Q - 30Q + 3Q^2} \begin{pmatrix} 3 - 2Q & 0 \\ 0 & (Q_0 + Q)/2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$



С другой стороны, как видно из (20) и (28), когерентностью между состояниями (23), (24) можно пренебречь в двух предельных случаях: сильного лазерного поля  $\Omega \gg \gamma$  либо больших отстройках  $|\delta| \gg \gamma$ . В обоих случаях (28) переходит в (29) с  $Q = (Q_{-1} + Q_1)/2$ .

Обсудим область применимости решения (14). В локальной системе координат поступательное движение атомов описывается оператором  $\hat{H}_K$  (4). Диагональный элемент

$$\langle \Psi_{NC} | \hat{H}_K | \Psi_{NC} \rangle = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{\hbar\omega_r}{2} j_g(j_g + 1) \quad (30)$$

имеет смысл эффективной энергии атома в темном состоянии. Второе слагаемое — поправка к кинетической энергии, обусловленная неоднородностью поляризации поля, — имеет порядок энергии отдачи и не зависит от координаты. Таким образом, в рассматриваемом однородном случае диагональный элемент (30) не дает вклада в динамику атомного ансамбля. Отличные от нуля недиагональные элементы

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1^A | \hat{H}_K | \Psi_{NC} \rangle &= -\frac{\hbar k \hat{p}}{2M} \sqrt{j_g(j_g + 1)}, \\ \langle \Psi_2^A | \hat{H}_K | \Psi_{NC} \rangle &= \frac{\hbar\omega_r}{4} \sqrt{j_g(j_g + 1)(j_g - 1)(j_g + 2)} \end{aligned} \quad (31)$$

описывают неадиабатические переходы, которые приводят к конечному времени жизни атомов в КПН-состоянии. В рамках применимости теории возмущений по скорости атомов  $kv \ll \min(\gamma, \gamma S)$  это время можно оценить как  $\gamma^{-1} (\Omega/kv)^2$  (см. [2, 16]). Поправки, обусловленные поступательным движением, будут пренебрежимо малы, если это время значительно превышает длительность импульса  $\tau$ :  $(\Omega/kv)^2 \gg \gamma\tau$ . Суммируя все ограничения, запишем

$$\begin{aligned} \min(\gamma, \gamma S)\tau &\gg 1, \\ kv &\ll \min(\gamma, \gamma S), \\ \gamma\tau \left(\frac{kv}{\Omega}\right)^2 &\ll 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Условия (32) слабее, чем (11), и могут быть выполнены при использовании предварительно охлажденных атомов, либо достаточно сильного лазерного поля.

#### 4. РЕШЕНИЕ ПРИ СВОБОДНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ. ДЕЙСТВИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

После выключения поля атомы находятся в основном состоянии, поэтому их эволюция при свободном распространении определяется оператором кинетической энергии (4):

$$\hat{\rho}(z_1, z_2 | t + T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_K T\right) |\Psi_{NC}\rangle W(z_1, z_2 | t) \langle \Psi_{NC} | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_K T\right). \quad (33)$$

Комбинируя (33) и (19), можно вывести рекуррентную формулу, связывающую распределение после действия  $N + 1$  импульса  $W^{(N+1)}$  с  $W^{(N)}$  — распределением после  $N$  импульсов:

$$W^{(N+1)}(r, z) = \sum_{\mu_g, \nu_g} C_{\mu_g, \nu_g}(z) \psi_{\nu_g} \psi_{\mu_g} \exp[-i\omega_r T(\nu_g^2 - \mu_g^2)] \times \\ \times \exp\left[\omega_r T \left(2i \frac{\partial}{k \partial z} + \nu_g + \mu_g\right) \frac{\partial}{k \partial r}\right] \exp\left[2\omega_r T (\nu_g - \mu_g) \frac{\partial}{k \partial z}\right] W^{(N)}(r, z), \quad (34)$$

где введены переменные  $r = (z_1 + z_2)/2$  и  $z = z_1 - z_2$ . Напомним, что преобразование Фурье по разности  $z$  является вигнеровской функцией распределения в фазовом пространстве:

$$\widetilde{W}(r, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ipz}{\hbar}\right) W(r, z) dz.$$

В данной работе мы не будем рассматривать эффекты пространственной локализации, полагая, что имеет место однородное распределение  $W(r, z) = W(z)$ , тогда (34) преобразуется к виду

$$W^{(N+1)}(z) = \sum_{\mu_g, \nu_g} C_{\mu_g, \nu_g}(z) \psi_{\nu_g} \psi_{\mu_g} \exp[-i\omega_r T(\nu_g^2 - \mu_g^2)] W^{(N)}(z + 2\omega_r T(\nu_g - \mu_g)/k). \quad (35)$$

Начальные условия для рекуррентии (35) определим следующим образом. Пусть до действия первого импульса атомы находятся в основном состоянии и имеют изотропное распределение по магнитным подуровням:

$$\rho_{\mu_g, \nu_g}^{(0)}(z) = \frac{\delta_{\mu_g, \nu_g}}{2j_g + 1} F^{(0)}(z),$$

где  $F^{(0)}(z)$  — начальное распределение в лабораторной системе координат. После действия первого импульса получим

$$W^{(1)}(z) = \text{Tr} \left\{ \widehat{C}^{gg}(z) \exp\left(ikz\widehat{J}_z\right) \right\} \frac{F^{(0)}(z)}{2j_g + 1}. \quad (36)$$

#### 4.1. Случай широкого начального распределения по импульсам

Естественным масштабом длины в (35), (36) является длина волны света  $\lambda = 2\pi/k$ . Если разброс по импульсам в начальном распределении значительно превышает импульс фотона, то функция  $F^{(0)}(z)$  отлична от нуля в малой (по сравнению с  $\lambda$ ) окрестности  $z = 0$ . В нулевом приближении мы можем аппроксимировать ее «единичной  $\delta$ -функцией»:

$$F^{(0)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = 0, \\ 0, & \text{если } z \neq 0. \end{cases} \quad (37)$$

Функция распределения после действия  $N$  импульсов в том же приближении представляет собой регулярную систему пиков, расположенных в точках  $0, \pm 4\omega_r T/k, \pm 8\omega_r T/k \dots$ :

$$W^{(N)}(z) = \sum_l \phi_l^{(N)} F^{(0)}(z - 4\omega_r Tl/k). \quad (38)$$

Амплитуды пиков  $\phi_l^{(N)}$  удовлетворяют рекуррентной формуле

$$\phi_l^{(N+1)} = \sum_{\mu_g, \nu_g} C_{\mu_g, \nu_g}(4\omega_r T l / k) \psi_{\nu_g} \psi_{\mu_g} \exp[-i\omega_r T(\nu_g^2 - \mu_g^2)] \phi_{l+(\nu_g - \mu_g)/2}^{(N)} \quad (39)$$

с начальным условием

$$\phi_l^{(1)} = \delta_{l,0}.$$

В силу симметрий матрицы  $\widehat{C}$  (см. разд. 3) коэффициенты  $\phi_l^{(N)}$  вещественны и симметричны:  $\phi_l^{(N)} = \phi_{-l}^{(N)}$ . Импульсное распределение, соответствующее (38), имеет вид произведения:

$$\widetilde{W}^{(N)}(p) = \Phi^{(N)}(p) \widetilde{F}^{(0)}(p) \quad (40)$$

периодической (с периодом  $2\pi\hbar k / 4\omega_r T$ ) и симметричной (относительно  $p = 0$ ) функции

$$\Phi^{(N)}(p) = \sum_{l=-j_g(N-1)}^{j_g(N-1)} \exp\left(-i4\omega_r T l \frac{p}{\hbar k}\right) \phi_l^{(N)} \quad (41)$$

и плавной огибающей, которая в рассматриваемом приближении совпадает с начальным импульсным распределением.

Рассмотрим процесс образования гребнеобразной структуры в импульсном пространстве на качественном уровне, используя приближенное выражение для матрицы  $\widehat{C}$ :

$$C_{\mu_g, \nu_g}(4\omega_r T l / k) = \begin{cases} \delta_{\mu_g, \nu_g}, & \text{если } l = 0, \\ C_{\mu_g, \nu_g}(\infty) = \psi_{\mu_g} \psi_{\nu_g}, & \text{если } l \neq 0, \end{cases}$$

которое справедливо при больших значениях временного интервала между импульсами  $\omega_r T \gg 1$ . В этом случае (39) примет вид

$$\begin{aligned} \phi_0^{(N+1)} &= 1, \\ \phi_{l \neq 0}^{(N+1)} &= \frac{1}{2} \phi_l^{(N)} + \frac{1}{4} (\phi_{l+1}^{(N)} + \phi_{l-1}^{(N)}) \end{aligned} \quad (42)$$

для  $j_g = 1$  и

$$\begin{aligned} \phi_0^{(N+1)} &= 1, \\ \phi_{l \neq 0}^{(N+1)} &= \frac{11}{32} \phi_l^{(N)} + \frac{3}{16} \cos(4\omega_r T) (\phi_{l+1}^{(N)} + \phi_{l-1}^{(N)}) + \frac{9}{64} (\phi_{l+2}^{(N)} + \phi_{l-2}^{(N)}) \end{aligned} \quad (43)$$

для  $j_g = 2$ . Внутри интервала периодичности  $[-\pi\hbar k / (4\omega_r T), \pi\hbar k / (4\omega_r T)]$  функция (41) описывает формирование главного максимума в точке, где все гармоники интерферируют конструктивно, усиливая друг друга. Как видно из (42), в случае  $j_g = 1$  амплитуды всех гармоник положительны. Следовательно, главный максимум расположен в точке  $p = 0$  (см. рис. 2а). В случае  $j_g = 2$  амплитуды четных гармоник положительны, а знак нечетных совпадает со знаком  $\cos(4\omega_r T)$ . При  $\cos(4\omega_r T) > 0$  главный максимум расположен в точке  $p = 0$  (см. рис. 2б) и при  $\cos(4\omega_r T) < 0$  — в точке  $p = \pi\hbar k / (4\omega_r T)$  (сг. т.

рис. 2б). Кроме того, в отличие от случая  $j_g = 1$ , при не очень больших значениях  $N$  заметен дополнительный максимум в точке  $p = \pi\hbar k/4\omega_r T$ , если  $\cos(4\omega_r T) > 0$ , и в  $p = 0$ , если  $\cos(4\omega_r T) < 0$  (см. рис. 2б, в). В дополнительном максимуме четные и нечетные гармоники интерферируют деструктивно, поэтому при увеличении числа импульсов он исчезает. Отдельного рассмотрения требует случай  $\cos(4\omega_r T) = 0$ . Здесь период  $\Phi^{(N)}(p)$  равен  $\pi\hbar k/4\omega_r T$ , а главный максимум (внутри интервала периодичности) расположен в точке  $p = 0$  (см. рис. 2з). С ростом числа импульсов  $N$  увеличиваются число гармоник в (41) и их амплитуды. Очевидно, это приводит к росту главного максимума функции  $\Phi^{(N)}(p)$  и уменьшению его ширины (см. рис. 3).

Вообще говоря, гребенка в импульсном распределении формируется при произвольных значениях времени задержки  $T$ . Однако в случае  $j_g = 2$  эффективность этого процесса максимальна, если  $|\cos(4\omega_r T)| = 1$ , т. е. при резонансных значениях

$$T_n = \frac{\pi n}{4\omega_r}. \tag{44}$$

Формулы (42), (43) дают несколько отличные от (39) значения  $\phi_l^{(N)}$ . Тем не менее, основные особенности образования пиков при этом отражаются правильно.

Отметим следующее важное обстоятельство. При резонансных значениях временного интервала между последовательными импульсами (44) имеет место равенство  $Q_{-1}(4\omega_r T_n) = Q_1(4\omega_r T_n)$ . В этом случае (см. (29)) матрица  $\hat{C}^{gg}$  и, следовательно, амплитуды  $\phi_l^{(N)}$  не зависят от отстройки и насыщения. Другими словами, в случае достаточно широкого начального импульсного распределения при резонансных значениях времени задержки процесс формирования гребнеобразной структуры не зависит от параметров поля  $\delta$  и  $\Omega$  (разумеется, в рамках выполнения условий (32)).

Используя аппроксимацию (37), мы полностью пренебрегли изменением огибающей пиков в импульсном распределении. Учтем теперь это обстоятельство, записывая вместо (38):

$$W^{(N)}(z) = \sum_l \phi_l^{(N)} \mathcal{E}_l^{(N)}(z - 4\omega_r T l / k), \tag{45}$$

где функции  $\mathcal{E}_l^{(N)}(0) = 1$ , отличны от нуля в малой окрестности  $z = 0$  и описывают изменение огибающей на каждом шаге. Амплитуды  $\phi_l^{(N)}$  по-прежнему удовлетворяют (39). Рассмотрим эволюцию  $\mathcal{E}_0^{(N)}(0) = 1$ , которая имеет смысл огибающей импульсного распределения в целом,

$$\mathcal{E}_0^{(N+1)}(z) = \sum_{\mu_g, \nu_g} C_{\mu_g, \nu_g}(z) \psi_{\nu_g} \psi_{\mu_g} \exp[-i\omega_r T(\nu_g^2 - \mu_g^2)] \phi_{(\nu_g - \mu_g)/2}^{(N)} \mathcal{E}_{(\nu_g - \mu_g)/2}^{(N)}(z). \tag{46}$$

В правой стороне этого уравнения возникают функции  $\mathcal{E}_l^{(N)}(z)$  с  $l \neq 0$ . В случае  $4\omega_r T \gg \gg 1$  мы можем приближенно заменить в (46)  $\mathcal{E}_{l \neq 0}^{(N)}(z) = \mathcal{E}_0^{(N-1)}(z)$ , тогда для  $\mathcal{E}^{(N)}(z) \equiv \equiv \mathcal{E}_0^{(N)}(z)$  с точностью до  $(kz)^2$  имеем

$$\mathcal{E}^{(N+1)}(z) - \mathcal{E}^{(N)}(z) = -(kz)^2 D^{(N)} \mathcal{E}^{(N)}(z) \tag{47}$$

с начальным условием (36):

$$\mathcal{E}^{(1)}(z) = W^{(1)}(z).$$

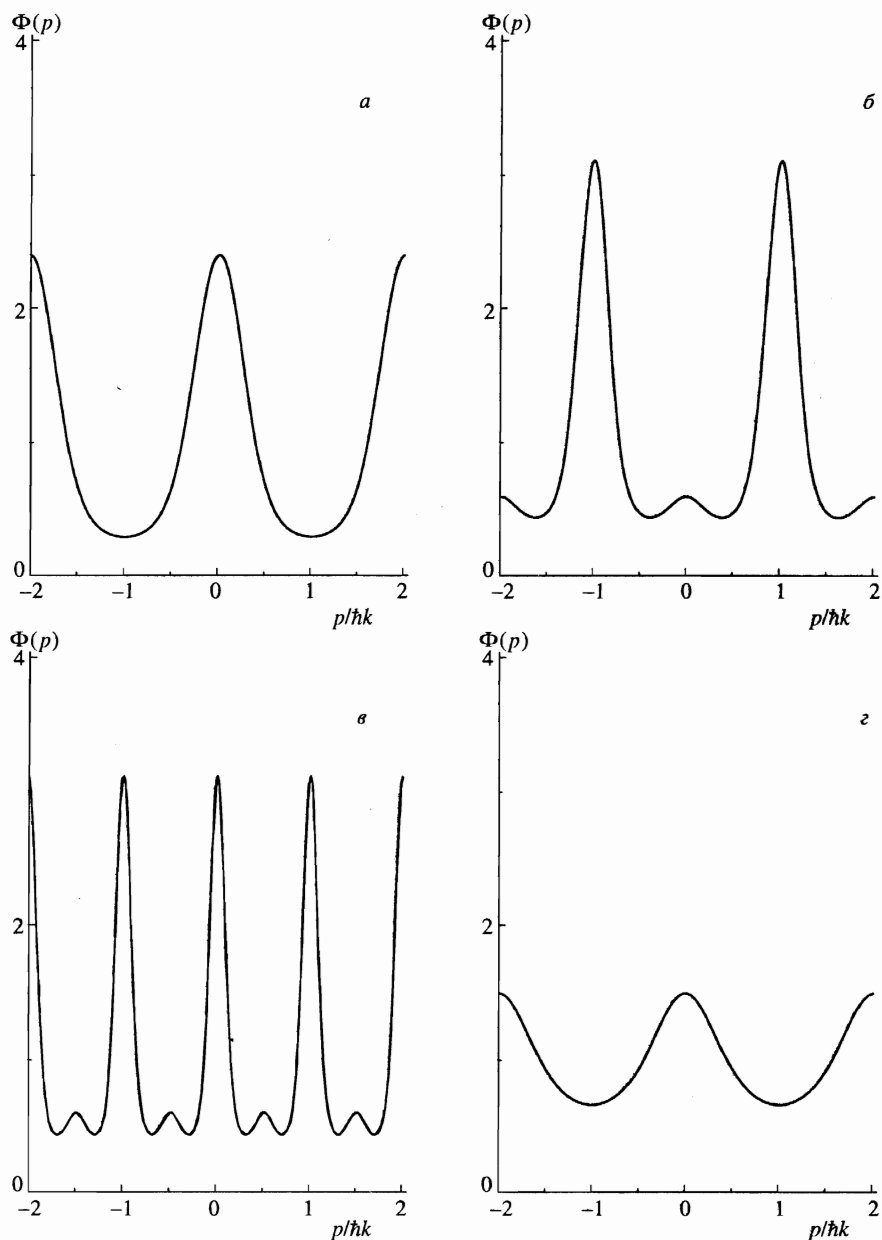
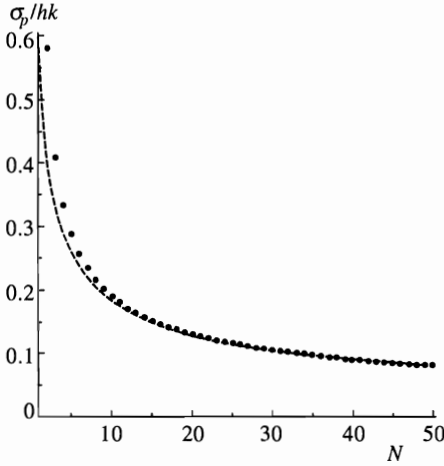


Рис. 2. Формирование гребнеобразной структуры в распределении атомов по скоростям под действием пяти световых импульсов. Изображена периодическая функция  $\Phi(p)$  (41) для:  $a - j_g = 1, 4\omega_r T = \pi$ ;  $б - j_g = 2, 4\omega_r T = \pi$ ;  $в - j_g = 2, 4\omega_r T = 2\pi$ ;  $г - j_g = 2, 4\omega_r T = \pi/2$



**Рис. 3.** Зависимость полуширины пика в импульсном распределении от количества световых импульсов для  $j_g = 1$  и  $4\omega_r T = \pi$ . Точки — расчет по формулам (39) и (41); штриховая линия — асимптота  $0.58/\sqrt{N}$

Члены первого порядка по  $kz$  обращаются в нуль в силу симметрии  $\phi_l^{(N)} = \phi_{-l}^{(N)}$ . Коэффициент «диффузии»

$$D^{(N)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu_g, \nu_g} C''_{\mu_g, \nu_g}(0) \psi_{\nu_g} \psi_{\mu_g} \exp[-i\omega_r T(\nu_g^2 - \mu_g^2)] \phi_{(\nu_g - \mu_g)/2}^{(N)} \quad (48)$$

зависит от поведения  $\widehat{C}(z)$  вблизи нуля и значения коэффициентов  $\phi_l^{(N)}$ . Вычисляя вторую производную от  $\widehat{C}(z)$  в нуле, можно в явном виде найти

$$D^{(N)} = \frac{7(1 - \phi_1^{(N)})}{10} \quad (49)$$

для  $j_g = 1$  и

$$D^{(N)} = \frac{9(347 - 260 \cos(4\omega_r T)\phi_1^{(N)} - 87\phi_2^{(N)})}{1600} - \frac{2(11 + 9(\Omega/\gamma)^2)(1 - \cos(4\omega_r T)\phi_1^{(N)})}{|11 + 9(\Omega/\gamma)^2 + 18i\delta/\gamma|^2} \quad (50)$$

для  $j_g = 2$ .

Решение (47) можно представить в виде конечного произведения:

$$\mathcal{E}^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} (1 - (kz)^2 D^{(i)}) F^{(0)}(z), \quad (51)$$

где  $D^{(i)}$  при  $i > 0$  определяется формулами (49), (50), а для  $D^{(0)}$ , разлагая (36) по степеням  $kz$ , имеем

$$D^{(0)} = \frac{11}{30} \text{ при } j_g = 1, \quad (52)$$

$$D^{(0)} = \frac{17}{5} - \frac{16(11 + 9(\Omega/\gamma)^2)}{15|11 + 9(\Omega/\gamma)^2 + 18i\delta/\gamma|^2} \text{ при } j_g = 2.$$

Очевидно, что (51) описывает уширение огибающей пиков в импульсном распределении, при этом количество пиков растет, а доля атомов в каждом из пиков уменьшается. В случае  $j_g = 2$  коэффициент  $D$  зависит от параметров поля  $\delta$ ,  $\Omega$  и достигает минимума при  $\delta = 0$ ,  $\Omega \ll \gamma$  (при этом, в силу (32), должно выполняться  $\Omega \gg kv$ ). Таким образом, эффект уширения огибающей может быть уменьшен на величину порядка нескольких процентов за счет использования резонансного слабого поля.

Окончательно в случае широкого начального импульсного распределения функция распределения по импульсам в локальной системе координат имеет вид

$$\widetilde{W}^{(N)}(p) = \sum_{l=-j_g(N-1)}^{j_g(N-1)} \exp(-i4\omega_r T l \frac{p}{\hbar k}) \phi_l^{(N)} \widetilde{\mathcal{E}}_l^{(N)}(p), \quad (53)$$

где  $\widetilde{\mathcal{E}}_l^{(N)}(p)$  — фурье-образ  $\mathcal{E}_l^{(N)}(z)$ . Наблюдаемая функция распределения в лабораторной системе координат выражается через  $\widetilde{W}^{(N)}(p)$  согласно формулам

$$\widetilde{F}^{(N)}(p) = \frac{\widetilde{W}^{(N)}(p + \hbar k) + \widetilde{W}^{(N)}(p - \hbar k)}{2} \quad \text{при } j_g = 1, \quad (54)$$

$$\widetilde{F}^{(N)}(p) = \frac{3\widetilde{W}^{(N)}(p + 2\hbar k) + 2\widetilde{W}^{(N)}(p) + 3\widetilde{W}^{(N)}(p - 2\hbar k)}{8} \quad \text{при } j_g = 2, \quad (55)$$

которые следуют из (18) и описывают расщепление каждого пика в локальном базисе на  $j_g + 1$  пиков в лабораторном.

#### 4.2. Асимптотическое поведение при $N \gg 1$

Приближенные формулы (42) и (43) позволяют проанализировать асимптотическое поведение решения при большом числе импульсов. Для  $N \gg 1$  зависимость модуля коэффициентов  $|\phi_l^{(N)}|$  от  $N$  и  $l$  можно аппроксимировать гладкой функцией  $\phi(N, l)$ , а уравнения (42) и (43) дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial N} \phi(N, l) = a \frac{\partial^2}{\partial l^2} \phi(N, l) \quad (56)$$

с граничным и начальным условиями

$$\phi(N, 0) = 1, \quad \phi(0, l) = 0.$$

Таким образом, задача сводится к уравнению теплопроводности для полуограниченного стержня, на конце которого поддерживается постоянная температура. Решение этой задачи имеет вид

$$\phi(N, l) = 1 - \text{Erf} \left( \frac{l}{2\sqrt{aN}} \right), \quad (57)$$

где коэффициент «теплопроводности»  $a = 1/4$  для  $j_g = 1$ . В случае  $j_g = 2$  ситуация более сложная. Формально при  $|\cos(4\omega_r T)| = 1$  «теплопроводность»  $a = 15/32$ , однако первый коэффициент  $|\phi_1^{(N)}|$  существенно отклоняется от закона (57) вследствие процесса переброса через точку  $l = 0$ , который нельзя описать уравнением (56). Для этого коэффициента асимптота имеет вид

$$|\phi_1^{(N)}| \approx 1 - \frac{1.3}{\sqrt{N}}.$$

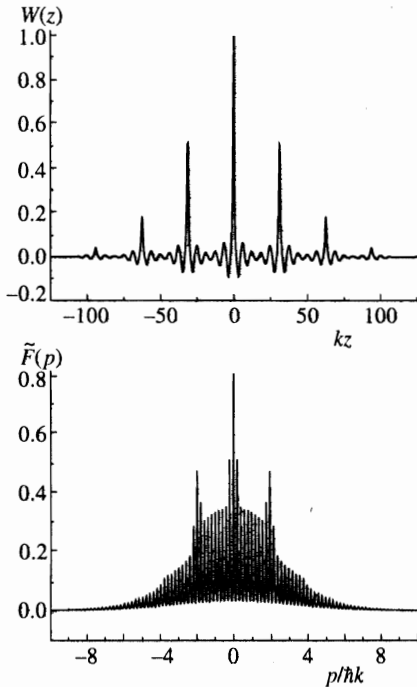


Рис. 4. Диаграмма рассеяния атомов после действия пяти световых импульсов для  $j_g = 1$  и  $4\omega_r T = 10\pi$  в случае узкого начального распределения  $\tilde{F}^{(0)}(p) \propto \exp(-p^2/p_0^2)$ ,  $p_0 = \hbar k/5$

При  $l > 1$  формула (57) становится справедливой, если рассматривать  $a$  как подгоночный параметр близкий к значению  $15/32$  и слабо зависящий от  $N$ .

Как видно из (57), ширина пиков в импульсном распределении убывает как  $1/\sqrt{N}$  (см. рис. 3). Коэффициент «диффузии»  $D^{(N)}$  в уравнении (47) для огибающей пиков также имеет асимптоту  $1/\sqrt{N}$ . Следовательно, ширина огибающей растет как  $N^{1/4}$ , а относительная доля атомов в одном пике (площадь пика) убывает как  $N^{-1/4}$ .

Интересно отметить, что аналогичные асимптоты для ширины и площади пиков получаются в задаче об охлаждении за счет селективного по скорости когерентного пленения населенностей в стационарном  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поле [13], если под  $N$  понимать время взаимодействия с полем.

### 4.3. Рассеяние в общем случае

Рассмотрим теперь общий случай, когда де-бройлевская длина волны атома  $\lambda_{DB}$  (характерный размер, на котором функция  $F^{(0)}(z)$  отлична от нуля) не обязательно мала по сравнению с длиной волны света  $\lambda$ . Если

$$4\omega_r T \gg \frac{\lambda_{DB}}{\lambda}, \tag{58}$$

то формулы (35), (36) по-прежнему будут описывать образование хорошо разрешенных пиков в точках  $0, \pm 4\omega_r T/k, \pm 8\omega_r T/k \dots$ , амплитуды которых описываются формулой (39), и, как следствие, гребнеобразной структуры в импульсном пространстве. Однако простое представление для огибающей (51) более не является справедливым.



При  $\lambda_{DB} > \lambda$  форма огибающей качественно отличается от разобранных выше случаев  $\lambda_{DB} \ll \lambda$ . Как видно из диаграммы рассеяния, изображенной на рис. 4, каждый из пиков в координатном представлении содержит пространственные осцилляции, соответствующие дифракции атомов на стоячей волне (резонансный эффект Капицы–Дирака) [22]. В импульсном представлении это проявляется в огибающей пиков, которая демонстрирует квантовые дифракционные особенности, рассмотренные в [16]. В обратном пределе

$$4\omega_r T \leq \frac{\lambda_{DB}}{\lambda} \quad (59)$$

исчезает само свойство (53) факторизации функции распределения на периодическую функцию  $\Phi(p)$  и огибающую  $\mathcal{E}(p)$ . При  $\lambda_{DB} > \lambda$  возможно взаимное влияние (интерференция) двух эффектов — собственно рамсеевского охлаждения и резонансного эффекта Капицы–Дирака. Если  $4\omega_r T = (2n + 1)\pi$ , то интерференция имеет деструктивный характер. Действие двух световых импульсов сводится к уширению импульсного распределения, при этом квантовые особенности, обусловленные дифракцией и эффектом когерентного пленения населенностей, оказываются подавленными. Напротив, если  $4\omega_r T = 2n\pi$ , то эффекты интерферируют конструктивно, усиливая друг друга.

#### 4.4. Рамсеевское охлаждение атомов, предварительно охлажденных за счет селективного по скорости когерентного пленения населенностей

Уместно провести сравнение результатов теории, развиваемой в данной работе, с квантовыми симуляциями рамсеевского охлаждения атомов гелия (переход  $j_g = 1 \rightarrow j_e = 1$ ) [17]. В работе [17] рассматривалась следующая ситуация. Атомы предварительно охлаждались за счет селективного по скорости когерентного пленения населенностей в резонансном  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поле ниже квантового предела  $\hbar\omega_r$  (полная ширина на полувысоте пиков в импульсном распределении составляла  $0.34\hbar k$ ). Далее в течение  $T = 500\gamma^{-1}$  атомы распространялись свободно, после чего следовал повторный импульс длительностью  $\tau = 100\gamma^{-1}$ . Мы не будем рассматривать предварительное охлаждение, моделируя его результат посредством смеси лоренцевского (для атомов в состоянии  $|\Psi_{NC}\rangle$ ) и гауссовского (для атомов в состоянии  $|\Psi_1^\Lambda\rangle$ ) распределений (состояние  $|\Psi_1^V\rangle$  полагаем пустым):

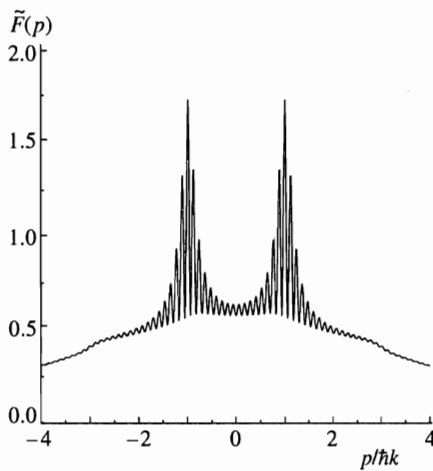
$$\hat{\rho}(z) = A \exp(-ak|z|) |\Psi_{NC}\rangle \langle \Psi_{NC}| + B \exp(-b(kz)^2) |\Psi_1^\Lambda\rangle \langle \Psi_1^\Lambda|.$$

Данным, приведенным в [17], отвечают следующие значения параметров:  $a = 0.17$ ,  $A = 1.25$ ,  $b = 7.78$ ,  $B = 4.75$ . Ввиду того что атомы в состоянии  $|\Psi_1^\Lambda\rangle$  не участвуют в процессе рамсеевского охлаждения, в качестве начального условия для (35) следует взять лоренцевский пик:

$$W^{(1)}(z) = A \exp(-ak|z|).$$

Согласно (35)

$$W^{(2)}(z) = W^{(1)}(z) + \frac{2 - Q_{-1}(kz) - Q_1(kz)}{8 - 2Q_{-1}(kz) - 2Q_1(kz)} \times \\ \times (W^{(1)}(z + 4\omega_r T/k) + W^{(1)}(z - 4\omega_r T/k) - 2W^{(1)}(z)).$$



**Рис. 5.** Диаграмма рассеяния атомов, предварительно охлажденных за счет селективного по скорости когерентного пленения населенностей

Мы нашли фурье-образ  $\widetilde{W}(p)$ , прибавили к нему широкий фон, соответствующий гауссовскому распределению и воспользовались формулой расщепления (54). Результат — функция распределения  $\widetilde{F}(p)$ , изображенная на рис. 5, качественно согласуется с результатом работы [17]. Например, ширина главных пиков, расположенных в точках  $p = \pm \hbar k$ , согласно нашим вычислениям составляет  $0.06\hbar k$  (полная ширина на полувысоте без учета фона), а по данным [17] —  $0.04\hbar k$ . Имеющееся расхождение объясняется тем, что условие (32) в [17] не выполнялось,  $kv \sim \gamma S$ , и во время действия второго импульса поля имело место дополнительное охлаждение за счет селективного когерентного пленения населенностей.

### 5. ЗАВИСИМОСТЬ КОНТРАСТА ДИАГРАММЫ РАССЕЯНИЯ ОТ ПАРАМЕТРА $\gamma S\tau$

В связи с экспериментом [18] по импульсному охлаждению на переходе  $j_g = 2 \rightarrow j_e = 2 D_1$ -линии  $^{87}\text{Rb}$  рассмотрим ситуацию, когда за время действия светового импульса атомы не успевают полностью перекачаться в темное состояние. А именно, будем полагать, что в условиях слабого насыщения  $S \ll 1$  выполнено лишь первое из условий (13):

$$\gamma\tau \gg 1, \quad \gamma S\tau \leq 1.$$

В этом случае вместо (35) можно записать рекуррентную формулу для матрицы плотности атомов:

$$\rho_{\mu_1, \mu_2}^{(N+1)}(z) = \sum_{\nu_1, \nu_2 = -j_g}^{j_g} \mathcal{R}_{\mu_1, \mu_2}^{\nu_1, \nu_2}(z|\tau) \exp[-i\omega_r T(\nu_1^2 - \nu_2^2)] \rho_{\nu_1, \nu_2}^{(N)}(z + 2\omega_r T(\nu_1 - \nu_2)/k), \quad (60)$$

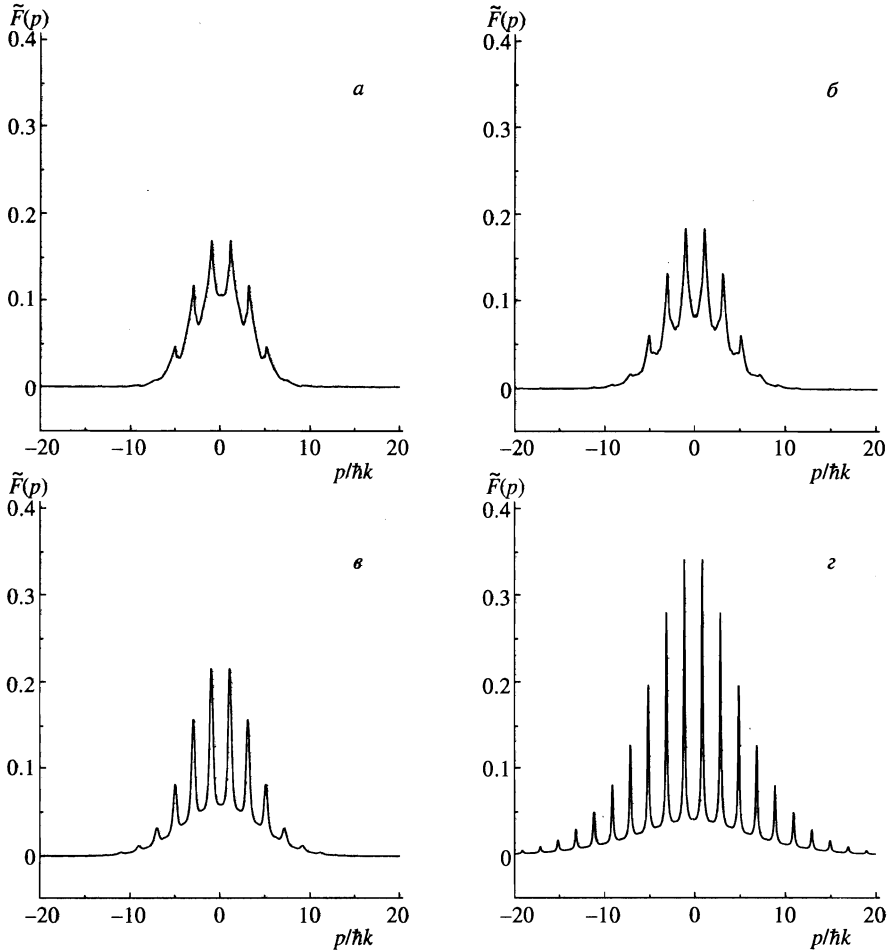
где  $\mu_{1,2}$  и  $\nu_{1,2}$  нумеруют магнитные подуровни основного состояния (матрица плотности возбужденного состояния и недиагональные элементы выражены через матрицу плотности основного состояния в пределе  $S \ll 1$ ). Соответствующим образом изменяются и начальные условия:

$$\rho_{\mu_1, \mu_2}^{(1)}(z) = \sum_{\nu=-j_g}^{j_g} \mathcal{R}_{\mu_1, \mu_2}^{\nu, \nu}(z|\tau) \exp(ikz\nu) \frac{F^{(0)}(z)}{2j_g + 1}. \quad (61)$$

На рис. 6а, б, в представлены результаты, основанные на численном расчете матричной экспоненты  $\mathcal{R}$  для перехода  $j_g = 2 \rightarrow j_e = 2$  при  $\delta = 7\gamma$ ,  $N = 28$ ,  $T = \pi/4\omega_\tau$  (в соответствии с данными [18]) и различных значениях параметра  $\gamma S\tau = 0.4, 0.8, 1.6, 16$ . Начальное распределение предполагалось гауссовским  $F^{(0)}(z) = \exp(-b(kz)^2)$  с  $b = 1.45$  (соответствующая гауссовская полуширина (на  $e^{-1/2}$  высоты) импульсного распределения  $\sigma = 1.7\hbar k$ ). Как видно из таблицы, с увеличением  $\gamma S\tau$  увеличиваются полуширина огибающей  $\sigma_e$  и контраст диаграммы рассеяния (отношение максимума к минимуму  $\tilde{F}(\hbar k)/\tilde{F}(0)$ ), в то же время полуширина пиков  $\sigma_p$  убывает. Роста  $\gamma S\tau$  можно добиться за счет увеличения длительности импульса, интенсивности поля, либо за счет уменьшения отстройки от резонанса. Данным эксперимента соответствует  $\gamma S\tau = 1.6$ , что далеко от оптимальных значений, которые можно определить из следующих качественных соображений. В формирование гребнеобразной структуры дают вклад только лишь атомы, захваченные в КПН-состояние, поэтому максимальный контраст будет наблюдаться при полной перекачке атомов в  $|\Psi_{NC}\rangle$ . Условие практически полного просветления среды записывается в виде  $\gamma S\tau > 1/\alpha$ , где  $\alpha$  — минимальное собственное значение (25) (в рассматриваемом случае  $\alpha = 1/6$ ). Так, например, уменьшая отстройку в  $\sqrt{10}$  раз, получим  $\gamma S\tau = 16$ , что дает диаграмму рассеяния близкую к аналитическим результатам предыдущих разделов (см. рис. 6г и таблицу). Отметим, что можно говорить лишь о качественном согласии наших расчетов с результатами [18]. В частности, в случае  $\gamma S\tau = 1.6$  полуширина огибающей по нашим данным  $\sigma_e \approx 4.0\hbar k$ , по данным [18] —  $\sigma_e \approx 4.4\hbar k$ , для полуширины пиков мы нашли  $\sigma_p \approx 0.2\hbar k$ , в [18] —  $\sigma_p = 0.3\hbar k$ . Перечислим некоторые факторы, которые могут приводить к таким расхождениям. Во-первых, схема взаимодействия в эксперименте [18] не сводилась к замкнутому переходу  $j_g = 2 \rightarrow j_e = 2$ , и присутствовало дополнительное поле, выкачивающее атомы со сверхтонкой компоненты с  $j_g = 1$ . Это выкачивающее поле действовало непрерывно, и в промежутке между импульсами света на рабочем переходе атомы возвращались на подуровень с моментом  $j_g = 2$ , при этом вследствие эффекта отдачи импульсное распределение приобретало дополнительное уширение. Во-вторых, конечное разрешение по импульсу системы детектирования не позволяло наблюдать структуры уже чем  $0.3\hbar k$ . И наконец, наше основное приближение неподвижных (в течение действия светового импульса) атомов плохо работает в условиях, соответствующих экспериментальным, где  $kvt \sim \gamma S\tau \sim 1$ .

Таблица  
Зависимость характеристик диаграммы рассеяния от параметра  $\gamma S\tau$

$\gamma S\tau$	$\sigma_e/\hbar k$	$\sigma_p/\hbar k$	$\tilde{F}(\hbar k)/\tilde{F}(0)$
0.4	3.2	0.15	1.5
0.8	3.5	0.15	2.2
1.6	4.0	0.15	3.7
16	6.6	0.05	31
$\infty$	6.6	0.05	55



**Рис. 6.** Зависимость диаграммы рассеяния для  $j_g = 2$  и  $4\omega_r T = \pi$  от параметра  $\gamma S \tau$ . Изображена функция распределения атомов по импульсам  $\tilde{F}(p)$  в лабораторной системе координат после действия 28 световых импульсов при  $\gamma S \tau = 0.4$  (а); 0.8 (б); 1.6 (в); 16 (г)

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, предполагая, что во время действия светового импульса поступательным движением атомов можно полностью пренебречь, мы развили сравнительно простое аналитическое описание рамсеевского охлаждения атомов. В рамках представленного метода точно учитываются квантовые эффекты, обусловленные отдачей при поглощении (излучении) фотонов и свободным движением атомов в отсутствие поля. Показано, что взаимодействие атомов со световыми импульсами в условиях когерентного пленения населенностей позволяет создавать корреляции между произвольно удаленными точками  $z_1$  и  $z_2$ , что имеет фундаментальное значение для атомной оптики и атомной интерферометрии. Обнаружен ряд особенностей формирования диаграммы

рассеяния, на существование которых не указывалось в более ранних работах [17, 18]:

1. Образование (при не очень большом количестве световых импульсов), наряду с главным, дополнительных максимумов.

2. Независимость в случае  $j_g = 1$  (в рамках выполнения условий (32)) диаграммы рассеяния от параметров поля.

3. Для  $j_g = 2$  диаграмма рассеяния зависит от интенсивности поля и отстройки. Однако в случае широкого (в масштабе импульса фотона) начального распределения при резонансных значениях временного интервала между последовательными световыми импульсами (44) эта зависимость сказывается только лишь на огибающей пиков в импульсном распределении.

Мы рассмотрели рассеяние атомов с моментами  $j_g = 1 \rightarrow j_e = 1$  и  $j_g = 2 \rightarrow j_e = 2$  резонансным  $\sigma_+ - \sigma_-$ -полем. Однако развитый метод может быть применен (после соответствующих модификаций) к переходам с большими значениями моментов и к более сложным (в том числе двух- и трехмерным) конфигурациям поля.

Авторы благодарны доктору Франку Сандеру (dr. Frank Sander) из Гархинга (Garching), прочитавшему статью в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний и уточнений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты  $D$  и  $m_{i,j}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 D = & 81 (4(\delta/\gamma)^2 + (\Omega/\gamma)^4) (-144 + 60Q_{-1} - \\
 & - 3Q_{-1}^2 + 60Q_1 - 6Q_{-1}Q_1 - 3Q_1^2 + 4Q_{-1}Q_0 + 4Q_1Q_0 + 4Q_0^2) - 18 (\Omega/\gamma)^2 \times \\
 & \times (2160 - 1188Q_{-1} + 225Q_{-1}^2 - 18Q_{-1}^3 - 1188Q_1 + 210Q_{-1}Q_1 - 6Q_{-1}^2Q_1 + 225Q_1^2 - \\
 & - 6Q_{-1}Q_1^2 - 18Q_1^3 - 60Q_{-1}Q_0 - 60Q_1Q_0 + 32Q_{-1}Q_1Q_0 - 60Q_0^2 + 8Q_{-1}Q_0^2 + 8Q_1Q_0^2) - \\
 & - (15 - 3Q_{-1} - 3Q_1 + 2Q_0) \times \\
 & \times (2160 - 1044Q_{-1} + 225Q_{-1}^2 - 27Q_{-1}^3 - 1044Q_1 - 30Q_{-1}Q_1 + 15Q_{-1}^2Q_1 + 225Q_1^2 + \\
 & + 15Q_{-1}Q_1^2 - 27Q_1^3 - 288Q_0 + 60Q_{-1}Q_0 - 18Q_{-1}^2Q_0 + 60Q_1Q_0 + 28Q_{-1}Q_1Q_0 - \\
 & - 18Q_1^2Q_0 - 60Q_0^2 + 12Q_{-1}Q_0^2 + 12Q_1Q_0^2 + 8Q_0^3), \quad (\text{П.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{1,1} = & 972 (4(\delta/\gamma)^2 + (\Omega/\gamma)^4) (-3 + Q_{-1} + Q_1) - \\
 & - 216 (\Omega/\gamma)^2 (45 - 21Q_{-1} + 3Q_{-1}^2 - 21Q_1 + 2Q_{-1}Q_1 + 3Q_1^2) - \\
 & - 12 (15 - 3Q_{-1} + 2Q_0 - 3Q_1) \times \\
 & \times (45 - 18Q_{-1} + 3Q_{-1}^2 - 6Q_0 + 2Q_{-1}Q_0 - 18Q_1 - 2Q_{-1}Q_1 + 2Q_0Q_1 + 3Q_1^2), \quad (\text{П.2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{2,2} = & -243 (4(\delta/\gamma)^2 + (\Omega/\gamma)^4) (Q_{-1} + 2Q_0 + Q_1) + 54 (\Omega/\gamma)^2 (-15Q_{-1} - 30Q_0 + \\
 & + 4Q_{-1}Q_0 - 15Q_1 + 8Q_{-1}Q_1 + 4Q_0Q_1) + 3 (15 - 3Q_{-1} + 2Q_0 - 3Q_1) \times \\
 & \times (-15Q_{-1} - 3Q_{-1}^2 - 30Q_0 + 4Q_{-1}Q_0 + 4Q_0^2 - 15Q_1 + 10Q_{-1}Q_1 + 4Q_0Q_1 - 3Q_1^2), \quad (\text{П.3})
 \end{aligned}$$

$$m_{1,2} = 6(Q_{-1} - Q_1)(2Q_0 + 3Q_{-1} + 3Q_1 - 6) \times \\ \times (15 - 18i\delta/\gamma + 9(\Omega/\gamma)^2 - 3Q_{-1} + 2Q_0 - 3Q_1), \quad (\text{П.4})$$

$$m_{2,1} = 6(Q_{-1} - Q_1)(2Q_0 + 3Q_{-1} + 3Q_1 - 6) \times \\ \times (15 + 18i\delta/\gamma + 9(\Omega/\gamma)^2 - 3Q_{-1} + 2Q_0 - 3Q_1). \quad (\text{П.5})$$

## Литература

1. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
2. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 2112 (1989).
3. F. Mauri and E. Arimondo, *Europhys. Lett.* **16**, 717 (1994).
4. M. A. Ol'shanii, *J. Phys. B*, **24**, L583 (1991).
5. М. А. Ольшаный, *Опт. и спектр.* **76**, 196 (1994).
6. C. Foot, H. Wu, E. Arimondo, and G. Morigi, *J. de Phys. II* **4**, 1913 (1994).
7. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, М. А. Ольшаный, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **52**, 336 (1991).
8. P. Marte, R. Dum, R. Taieb, P. Zoller, M. S. Shahriar, and M. Prentiss, *Phys. Rev. A* **49**, 4826 (1994).
9. H. Stecher, H. Ritsch, P. Zoller, F. Sander, T. Esslinger, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **55**, 545 (1997).
10. J. Lawall, F. Bardou, B. Saubamea, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1915 (1994).
11. J. Lawall, S. Kulin, B. Saubamea, N. Bigelow, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji, *Laser Phys.* **6**, 153 (1996).
12. T. Esslinger, F. Sander, M. Weidemüller, A. Hemmerich, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2432 (1996).
13. F. Bardou, J. P. Bouchard, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 203 (1994).
14. E. Korsunsky, A. Snegiriov, V. Gordienko, B. Matisov, and L. Windholz, *Z. Phys. D* **30**, 23 (1994).
15. E. Korsunsky, D. Kosachiov, B. Matisov, Yu. Rozhdestvensky, L. Windholz, and C. Neureiter, *Phys. Rev. A* **48**, 1419 (1993).
16. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, and В. И. Юдин, *Laser Phys.* **2**, 575 (1992).
17. H. Wu, E. Arimondo, and C. Foot, *Quantum Semiclass. Opt.* **8**, 983 (1996).
18. F. Sander, T. Devolder, T. Esslinger, and T. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4023 (1997).
19. N. F. Ramsey, *Phys. Rev.* **78**, 695 (1950).
20. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **96**, 1613 (1989).
21. Д. А. Варшалович, А. И. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
22. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).