

## СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ И КВАНТОВЫЙ ХАОС

К. Н. Алексеев\*, Д. С. Приймак

Институт физики им. Л. В. Киренского  
Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 1997 г.

Рассматривается динамика волнового пакета, соответствующего в начальный момент времени когерентному состоянию, в модели квантового ротатора, возбуждаемого периодической последовательностью толчков. Эта модель является основной моделью квантового хаоса и допускает переход от регулярного поведения к хаотическому в классическом пределе. В численном эксперименте исследуется генерация сжатых состояний в условиях квазиклассичности и на временном интервале, когда квантово-классическое соответствие является хорошо определенным. Показано, что степень сжатия зависит от степени локальной неустойчивости в системе и возрастает с ростом классического параметра стохастичности Чирикова. Также обсуждаются зависимость степени сжатия от начальной ширины пакета, проблема устойчивости и наблюдаемости сжатых состояний при переходе к квантовому хаосу и динамика разрушения волновых пакетов при квантовом хаосе.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес представляет проблема генерации сжатых квантовых состояний как с чисто познавательной точки зрения, так и с точки зрения возможных приложений [1–3]. Чаще всего обсуждаются сжатые состояния электромагнитного поля. Если в простейшем случае рассмотреть одномодовое квантовое поле, описываемое операторами рождения  $a^+$  и уничтожения  $a$ , то дисперсии квадратурных операторов поля  $a_1 = a + a^+$  и  $a_2 = -i(a - a^+)$  удовлетворяют соотношению неопределенностей  $\Delta a_1 \Delta a_2 \geq 1$ , где знак равенства достигается для когерентного состояния или для вакуума. Тогда, на этом простейшем языке, сжатым является состояние, для которого дисперсия одной из квадратурных компонент меньше единицы. Квантовые флуктуации, определяемые соотношением неопределенностей, графически представляются на плоскости квадратурных компонент  $a_1 - a_2$  в виде круга для когерентного состояния или в виде эллипса для сжатого состояния. При более последовательном описании сжатия эллипс квантового шума определяется через проекцию на ту же плоскость горизонтального сечения квантовой функции Вигнера, дающей распределение квазивероятностей для измерения квадратурных компонент поля [3].

В условиях экспериментов по генерации сжатых состояний весьма типичной является ситуация, когда большое число квантов участвует в нелинейном взаимодействии и амплитуда квантовых флуктуаций мала по сравнению со средними значениями наблюдаемых [2, 3]. В этом случае для объяснения сжатия используется полуклассический подход, когда по сути квантовой функции Вигнера ставится в соответствие классическая

\* E-mail: kna@iph.krasnoyarsk.su

функция распределения и вместо динамики эллипса квантового шума рассматривают эволюцию классического фазового объема [3, 4].

Уже в течение достаточно долгого времени известно, что сжатие света усиливается в системах, находящихся вблизи точки бифуркации между различными динамическими режимами [3–6]. Усиление сжатия в таких условиях рассматривалось, например, для параметрических взаимодействий световых волн [5], а также при взаимодействии ридберговских атомов с модой электромагнитного поля в высокодобротном резонаторе при динамическом режиме, соответствующем близости к сепаратрисе [4, 6].

Для объяснения усиления степени сжатия вблизи точки бифуркации используется следующая простая аргументация: квантовые флуктуации нарастают для той физической переменной, которая оказывается неустойчивой вблизи порога. Как следствие, ничто не препятствует сильному сжатию флуктуаций сопряженной переменной ввиду сохранения фазового объема в бездиссипативной системе [3].

Необходимо отметить, что в [3–6] рассматривалось усиление сжатия вблизи порога неустойчивостей в оптических системах только с регулярной динамикой. Однако хорошо известно, что сильная (экспоненциальная) деформация фазового объема является одним из основных проявлений динамического хаоса в классических системах [7]. Физической причиной таких сильных деформаций фазового объема является локальная неустойчивость движения, проявляющаяся, как правило, в довольно широком интервале значений управляющего параметра динамической системы, а не только вблизи точки бифуркации. Согласно принципу соответствия, квантовая система должна проявлять свойства классической системы в квазиклассическом пределе. Таким образом, весьма естественно следует ожидать усиления сжатия и при переходе к квантовому хаосу. С другой стороны, при квантовомеханическом описании можно говорить лишь о динамике волновых пакетов, центр которых движется почти по классической траектории в течение некоторого времени. Поэтому сопутствующие переходу к хаосу сильные деформации фазового объема в квазиклассическом пределе должны проявляться в сжатии по определенному направлению до тех пор, пока квантовые эффекты не приведут к сильному размытию волнового пакета.

Насколько нам известно, генерация сжатых состояний в системе с хаотической динамикой была впервые рассмотрена в работах [8–10]. Используя метод  $1/N$ -разложения [6, 11] ( $N$  — число квантовых состояний, принимающих участие в динамике системы), в [8, 9] было показано, что происходит существенное усиление сжатия света при переходе к хаосу в течение временного интервала, когда квантово-классическое соответствие является хорошо определенным [12]. Этот результат был проиллюстрирован в [8, 9] на примере обобщенной модели Джейнса-Каммингса, допускающей переход от регулярной динамики к хаотической в классическом пределе [13]. Затем этот результат был обобщен на случай произвольных одномодовых квантово-оптических систем в [14]. Сжатие волновых пакетов при квантовом хаосе также кратко обсуждалось в [10].

Однако основные результаты [8, 9, 14] были получены с использованием варианта теории возмущений ( $1/N$ -разложение). В этой связи представляет интерес изучение генерации сжатых состояний при численном решении непосредственно уравнения Шредингера для простой квантовой системы, допускающей переход к квантовому хаосу.

В данной работе мы рассматриваем генерацию сжатых состояний при временной эволюции гауссового (в начальный момент времени) волнового пакета в модели квантового ротатора, возбуждаемого периодической последовательностью толчков (kicked quantum rotator). Эта модель была впервые введена в [15] и в настоящее время явля-

ется базовой моделью при изучении квантового хаоса (см., например, обзоры [16–18]). Модель квантового ротатора является привлекательной по двум основным причинам: во-первых, классическим пределом этой квантовой модели является хорошо изученное стандартное отображение [19] и, во-вторых, при численных расчетах достаточно легко изучать динамику модели в квазиклассической области с достаточно большим числом квантовых уровней.

Мы рассматриваем динамику сжатия узких гауссовых пакетов в ротаторе с  $2^{17}$  ( $\approx 10^5$ ) уровнями. Мы определяем сжатие для обобщенного квадратурного оператора

$$X_\theta = a \exp(-i\theta) + a^\dagger \exp(i\theta),$$

где  $\theta$  — действительный параметр. Именно такое сжатие является наблюдаемой величиной в схеме гомодинного детектирования, где  $\theta$  определяется фазой опорного пучка [1]. Показано, что до тех пор пока волновой пакет является локализованным, степень сжатия хорошо коррелирует со степенью локальной неустойчивости в системе. Причем чем больше неустойчивость, тем более сильное сжатие достигается за более короткий временной интервал. Сжатие гораздо сильнее при хаосе, чем при регулярном движении. Мы также показываем, что чем уже начальный волновой пакет, тем более высокая степень сжатия может быть достигнута. Мы связываем подобную закономерность с тем, что более узкий волновой пакет в своей эволюции более близок к классической траектории и, соответственно, более чувствителен к локальной неустойчивости движения, приводящей к сильному сжатию.

Мы также рассматриваем проблему стабильности и наблюдаемости сжатия при переходе к хаосу. А именно, мы изучаем временную зависимость оптимальных значений фаз  $\theta$  обобщенного квадратурного оператора  $X_\theta$ , для которых сжатие является максимально возможным (так называемое *principal squeezing* [20, 21]). Показано, что при сильном хаосе и на достаточно больших временах оптимальные значения фаз резко изменяются даже при малом шевелении параметров начального гауссового пакета. Подобный режим сжатия является нестабильным и трудно наблюдаемым. С другой стороны, наши результаты дают основание утверждать, что при слабом хаосе сжатие является достаточно стабильным.

Мы также кратко обсуждаем динамику разрушения волновых пакетов при хаосе. Мы демонстрируем, что типичный сценарий разрушения первоначально локализованного волнового пакета при хаосе состоит из двух стадий: начального расплывания пакета и последующего катастрофического разбиения его на много маленьких подпакетов. Здесь наши результаты, в целом, согласуются с утверждениями работы [18].

Необходимо отметить, что динамика узких гауссовых волновых пакетов в квазиклассической области уже рассматривалась ранее численно для модели квантового ротатора с толчками в [22, 23], а также для модели квантового волчка с толчками (*kicked quantum top*) в [24] и для модели квантового кота Арнольда [25] в связи с изучением проблемы квантово-классического соответствия при квантовом хаосе. Однако в этих работах не рассматривалась генерация сжатых состояний.

Модель квантового ротатора является очень популярной при теоретическом рассмотрении квантового хаоса. С другой стороны, недавно обсуждались возможные реализации разновидностей этой модели в оптических системах [26]. Кроме того, модель квантового ротатора уже реализована в экспериментах по взаимодействию лазерного излучения с охлажденными атомами [27]. Поэтому наши результаты по усилению сжатия

при переходе к квантовому хаосу в ротаторе имеют также отношение и к экспериментально реализуемым системам.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы рассматриваем квантовое отображение для модели ротатора и определяем, как вычислить максимально достижимое сжатие. Методика численных расчетов представлена в разд. 3, а основные результаты по динамике сжатия — в разд. 4. И, наконец, в Заключении наряду с основными выводами мы обсуждаем возможность экспериментальной реализации наших результатов по усилению сжатия.

## 2. МОДЕЛЬ КВАНТОВОГО РОТАТОРА И СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим модель квантового ротатора с периодическими  $\delta$ -толчками. Здесь мы следуем обозначениям работы [23]. Гамильтониан для этой модели имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2mL^2} - \delta_p(t/T)mL^2\omega_0^2 \cos x, \quad \delta_p(t/T) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(j - t/T), \quad (1)$$

где  $x$  — циклическая переменная с периодом  $2\pi$ ,  $L$  — характерный размер ротатора,  $m$  — его масса,  $\omega_0$  — частота линейных колебаний. Функция  $\delta_p(t/T)$  описывает периодическую последовательность толчков с периодом  $T$ ,  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Введем новые переменные:

$$\alpha = mL^2\omega_0^2T, \quad \beta = \frac{T}{mL^2}, \quad (2)$$

и будем измерять время в единицах  $T$ , т.е.  $t \rightarrow t/T$ . Тогда уравнение Шредингера примет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \beta}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \delta_p(t)\alpha \cos x \cdot \Psi. \quad (3)$$

Из-за периодичности  $\Psi(x)$  по  $x$  решение (3) можно представить в виде

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} A_k(t), \quad A_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi(x) e^{-ikx} dx. \quad (4)$$

Используя стандартную процедуру [16, 23], получаем квантовое отображение в виде

$$\Psi_{n+1} = U_x U_p \Psi_n, \quad U_p = \exp\left(-\frac{i\beta}{2\hbar} \hat{p}^2\right), \quad U_x = \exp\left(\frac{i\alpha}{\hbar} \cos(\hat{x})\right), \quad (5)$$

где  $\Psi_n$  есть значение волновой функции в момент времени сразу после  $n$ -го толчка. Временная эволюция волновой функции в отображении (5) полностью определяется значениями двух параметров  $\alpha/\hbar$  и  $\beta\hbar$ . Так как  $U_p$  диагонализуется в  $p$ -представлении,  $U_x$  диагонализуется в  $x$ -представлении и переход между  $x$ - и  $p$ -представлениями есть преобразование Фурье (4), отображение (5) сводится фактически к

$$\Psi_{n+1}(x) = U_x F^{-1} U_p F \Psi_n(x), \quad (6)$$

где  $F$  и  $F^{-1}$  — прямое и обратное преобразования Фурье.

Иногда бывает полезным также использовать квантовое отображение, записанное для амплитуд вероятностей  $A_k$  переходов между невозмущенными уровнями ротатора [15]. Комбинируя (4) и (5), имеем

$$A_k^{(n+1)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{km} A_m^{(n)}, \quad F_{km} = (-i)^{k-m} \exp\left(-\frac{i\hbar\beta m^2}{2}\right) J_{k-m}\left(\frac{\alpha}{\hbar}\right), \quad (7)$$

где  $J_l(z)$  — функция Бесселя с индексом  $l$  и аргументом  $z$ , а верхний индекс в скобках ( $n$ ) у переменной  $A$  означает номер толчка. Используя то, что функции Бесселя с  $|l| \geq z$  быстро убывают с ростом  $l$ , из (7) имеем, что с экспоненциальной точностью за один толчок захватывается  $2\alpha\hbar^{-1}$  невозмущенных уровней ротатора. В дальнейшем мы будем рассматривать ситуацию, когда  $\alpha/\hbar$  велико, что является типичным для задач квантового хаоса.

В классическом пределе гамильтониан (1) приводит к стандартному отображению

$$P_{n+1} = P_n - K \sin x_{n+1}, \quad x_{n+1} = x_n + P_n \pmod{2\pi}, \quad (8)$$

где  $P_n = \beta p_n$ , индекс  $n$  означает значения  $x$  и  $P$  сразу после  $n$ -го толчка и  $K \equiv \alpha\beta$  есть параметр Чирикова<sup>1)</sup>. Сильный и глобальный хаос наступает при  $K > 1$ . При  $K < 1$  большая часть фазовой плоскости заполнена регулярными траекториями, хотя малые области с локальным хаосом существуют при сколь угодно малых  $K$  [19]. Вид фазового портрета для отображения (8) при  $K = 0.8$  представлен на рис. 1. Хаотический слой находится в окрестности сепаратрисы основного резонанса, проходящей через гиперболические точки  $(\pm\pi, 0)$ . В наших дальнейших расчетах мы, как правило, будем выбирать волновой пакет с центром тяжести в окрестности гиперболической точки.

В качестве начального состояния для квантового отображения (5) выбираем гауссов пакет

$$\Psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0(x-x_0)\right), \quad (9)$$

где

$$\langle x \rangle = x_0, \quad \langle \delta x^2 \rangle \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2, \quad p_0 \equiv \langle p \rangle = \hbar k_0, \quad \langle \delta p^2 \rangle = \hbar^2/4\sigma^2,$$

$k_0$  — целое число. Мы будем рассматривать случай узкого пакета:

$$\sigma \ll x_0, \quad \langle \delta p^2 \rangle \ll \hbar k_0.$$

Необходимо отметить, что ввиду периодичности по  $x$  волновой пакет (9) не является, вообще говоря, состоянием, минимизирующим соотношение неопределенностей. Но в случае узкого пакета он практически неотличим от состояния с минимальной неопределенностью [22–24].

<sup>1)</sup> Достаточно необычный вид стандартного отображения в форме (8) связан с тем, что нам удобно рассматривать значения  $x$  и  $p$  сразу после  $n$ -го толчка, а не перед  $n$ -ым толчком, как делается в большинстве работ. Необходимо однако отметить, что все свойства стандартного отображения при этом, естественно, сохраняются.

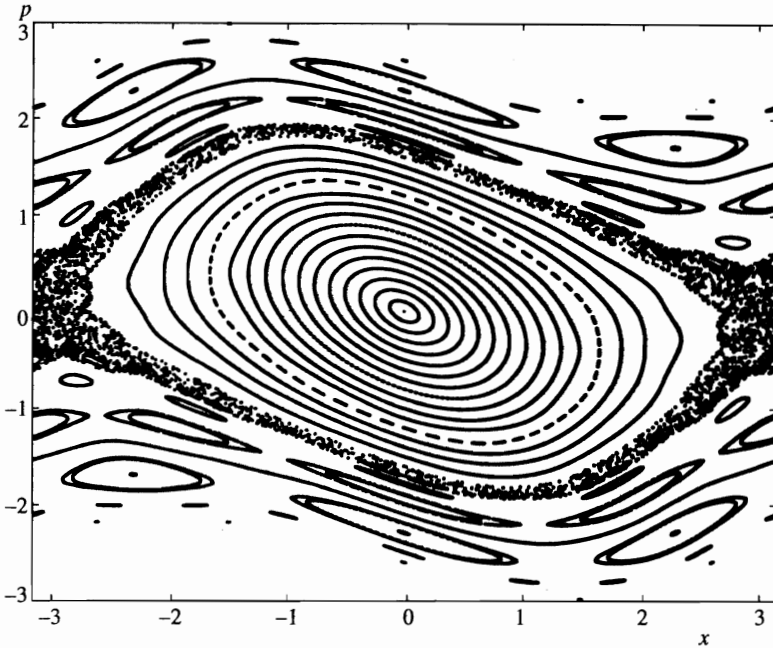


Рис. 1. Фазовый портрет классического стандартного отображения при  $K = 0.8$

Типичным начальным квантовым состоянием при изучении сжатия света является когерентное состояние [1–3]. Когерентным состоянием называется собственная функция оператора уничтожения  $a$ , который в наших обозначениях имеет вид

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\gamma} \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{\gamma}} \right), \quad \gamma = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

То, что оператор уничтожения имеет именно такой вид, легко понять, если рассмотреть следующий из (3) предельный случай гармонического осциллятора:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \beta}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\alpha x^2}{2} \Psi. \quad (11)$$

Теперь можно показать, что волновая функция (9) является когерентным состоянием, т. е. собственной функцией оператора (10), если положить

$$\sigma^2 = \frac{\hbar}{2\gamma}. \quad (12)$$

Перейдем теперь к рассмотрению сжатия.

В условиях экспериментов по сжатию света [1] наблюдаемой величиной является дисперсия обобщенного квадратурного оператора

$$X_\theta = a e^{-i\theta} + a^+ e^{i\theta}, \quad (13)$$

где  $\theta$  — фаза опорного пучка в схеме гомодинного детектирования. В частных случаях при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  имеем из (13) операторы обобщенной координаты и импульса

$$X_1 = a + a^+, \quad X_2 = -i(a - a^+), \quad [X_1, X_2] = 2i \quad (14)$$

с соотношением неопределенностей  $\langle \delta X_1^2 \rangle \langle \delta X_2^2 \rangle \geq 1$ , где усреднение проводится по произвольному квантовому состоянию и знак равенства достигается для когерентного состояния. Стандартным определением квадратурного сжатия является условие [1, 3]

$$\min (\langle \delta X_1^2 \rangle, \langle \delta X_2^2 \rangle) < 1, \quad (15)$$

т. е. дисперсия одной из квадратурных компонент меньше, чем для когерентного состояния.

В более общем случае рассматривается дисперсия  $\langle \delta X_\theta^2 \rangle$  оператора (13), и состояние считается сжатым, если значение  $\langle \delta X_\theta^2 \rangle$  в этом состоянии при каком-либо  $\theta$  меньше, чем в когерентном состоянии [20, 21]. В экспериментах фактически находится минимум  $S$  этой дисперсии по углу  $\theta$ :

$$S = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \langle \delta X_\theta^2 \rangle. \quad (16)$$

Используя определение  $X_\theta$  (13), можно показать [20, 21], что

$$S = 1 + 2\langle \delta a^+ \delta a \rangle - 2\sqrt{\langle \delta a^2 \rangle \langle \delta a^{+2} \rangle} \quad (17)$$

и минимум  $\langle \delta X_\theta^2 \rangle$  достигается при оптимальном значении фазы  $\theta = \theta^*$ , определяющемся как [21]

$$e^{2i\theta^*} = -\sqrt{\langle \delta a^2 \rangle / \langle \delta a^{+2} \rangle} \quad (18)$$

Для дальнейшего рассмотрения нам удобно представить  $S$  через кумулянты операторов  $x$  и  $p$ . Используя определение  $a$  (10), из (17) имеем

$$S = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\langle \delta p^2 \rangle}{\gamma} + \langle \delta x^2 \rangle \gamma - \sqrt{(\langle \delta x^2 \rangle \gamma - \langle \delta p^2 \rangle / \gamma)^2 + 4c^2} \right), \quad (19)$$

где

$$c = \frac{1}{2} (\langle (xp + px) \rangle - 2\langle x \rangle \langle p \rangle).$$

Легко видеть, что для всякого гауссового пакета  $S = \hbar/2\sigma^2\gamma$ , а для когерентного состояния, ввиду (12), имеем  $S = 1$ . Поэтому состояние является сжатым, если

$$S < 1. \quad (20)$$

Условие (20) определяет максимально возможное сжатие (principal squeezing), достижимое при гомодинном детектировании [20].

Аналогично (16) можно определить и максимум дисперсии  $\langle \delta X_\theta^2 \rangle$  по  $\theta$ , который обозначим  $\bar{S}$ . Тогда можно показать, что зависимость  $\bar{S}$  от кумулянтов отличается от (19) только знаком плюс перед квадратным корнем, и поэтому имеет место следующее соотношение:

$$S\bar{S} \geq 1. \quad (21)$$

Таким образом, сжатие по  $S$  (20) сопровождается растяжением по  $\bar{S}$ .

Отметим, что в противоположность к квадратурному сжатию (15), определение максимально возможного сжатия (19) содержит квадратурные корреляторы типа  $\langle xp \rangle$ . Это очень важно для систем с дискретным временем, к которым принадлежит и модель квантового ротатора, возбуждаемого толчками. Дело в том, что квадратурное сжатие (15) часто практически не наблюдаемо для таких систем, хотя максимально возможное сжатие (19), (20) может иметь место<sup>2)</sup>. Мы рассмотрим временную зависимость  $S$  в разд. 4.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА

Заслуживает упоминания ряд особенностей численной схемы. Интервал по  $x$  от 0 до  $2\pi$  разбит на  $N$  промежутков  $\Delta x = 2\pi/N$ , и волновая функция  $\Psi(x)$  представлена в виде дискретного ряда значений (вектора-столбца  $|\Psi\rangle$ ) длиной  $N$ , так что  $\Psi_l = \Psi(l\Delta x)$ ,  $l \in [0, 1, \dots, N - 1]$ . Соответственно, в сумме (4)  $k$  меняется от 0 до  $N - 1$ . Ввиду особенностей нашей численной схемы  $N$  есть целая степень числа два. При этом под оператором  $F$  в (6) подразумевается быстрое преобразование Фурье, осуществляющее трансформации

$$F : \Psi_l \rightarrow A_k, \quad F^{-1} : A_k \rightarrow \Psi_l. \quad (22)$$

Для определения максимально возможного сжатия необходимо вычисление средних  $\langle \delta q^2 \rangle$ ,  $\langle \delta p^2 \rangle$  и  $\langle xp \rangle$  (см. (19)). Вычисление, например,  $\langle xp \rangle$  организовано следующим образом

$$\langle xp \rangle = \langle \Psi | \mathbf{x} F^{-1} \mathbf{p} F | \Psi \rangle,$$

где  $\langle \Psi |$  есть транспонированный и затем комплексно-сопряженный вектор  $|\Psi\rangle$ , а  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$  — векторы, имеющие в начальный момент времени вид

$$\mathbf{x} = [0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, 2\pi - \Delta x], \quad \mathbf{p} = [0, 1, 2, \dots, N - 1].$$

Тот факт, что  $x$  определено по модулю  $2\pi$ , требует слежения за волновым пакетом и его правильного представления при переходе через одну из границ интервала  $[0, 2\pi]$ . Мы организовали этот процесс следующим образом. Когда центр волнового пакета в  $x$ -представлении подходит к краям полуинтервала  $[0, 2\pi[$ , волновая функция  $\Psi(x)$  рассматривается на новом полуинтервале  $[-\pi, \pi[$ , чему соответствует новый вектор

$$\mathbf{x} = [0, \Delta x, \dots, \pi, -\pi + \Delta x, -\pi + 2\Delta x, \dots, -2\Delta x, -\Delta x],$$

поскольку  $(-k\Delta x) \bmod 2\pi = (2\pi - k\Delta x) \bmod 2\pi$  и  $k$  — целое число. По аналогичной схеме рассматривается переход от  $[-\pi, \pi[$  к  $[0, 2\pi[$ .

<sup>2)</sup> Отметим, что в [23] уже рассматривалась временная зависимость  $\langle \delta q^2 \rangle$  и  $\langle \delta p^2 \rangle$  для квантового ротатора на временном интервале хорошо определенного квантово-классического соответствия (см. табл. 1 там). Обе дисперсии равномерно растут и, следовательно, квадратурное сжатие (15) невозможно.



Вычисления в  $p$ -представлении имеют свои особенности. Так, несмотря на то, что для гамильтониана (1) импульс определен на интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , в численном счете мы имеем лишь конечный интервал изменения импульса  $p$ , определяемый заданным числом фурье-гармоник  $N$  в разложении (4). Чтобы избежать возможной проблемы отражения волнового пакета от края заданного интервала в  $p$ -представлении<sup>3)</sup>, мы выбираем этот интервал на каждой итерации отображения (6) так, чтобы максимум модуля волновой функции пакета всегда находился в центре данного интервала (фактически мы перенумеровываем вектор  $p$ ).

Процесс вычисления следующей итерации квантового отображения (6) прекращается, как только пакет перестает быть достаточно локализованным либо в  $x$ -представлении, либо в  $p$ -представлении, т. е. когда число фурье-компонент, реально задействованных в счете, оказывается меньше, чем необходимо. Выпишем указанные выше условия делокализации пакета. Введем обозначения

$$\xi = \max_{[0, 2\pi]} |\Psi(x)|, \quad \chi = \max\{|A_1|, |A_2|, \dots, |A_N|\}$$

и  $A_{left}$  ( $A_{right}$ ) — значения  $A_k$ , принадлежащие левой (правой) границе интервала изменения волновой функции в импульсном пространстве, связанного с конечным числом фурье-гармоник  $N$  в разложении (4). Счет прекращается, если выполняется хотя бы одно из двух следующих неравенств:

$$\max\{|A_{left}|/\chi, |A_{right}|/\chi\} > \varepsilon,$$

либо

$$|\Psi(z)|/\xi > \varepsilon$$

(где  $z = 0$ , если  $x \in [0, 2\pi[$  или  $z = \pi$ , если  $x \in [-\pi, \pi[$ ). В данной работе мы использовали  $\varepsilon = 0.002$ .

#### 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При численном счете в качестве начальной волновой функции выбиралось когерентное состояние (гауссов волновой пакет) с  $\hbar = 10^{-6}$ ,  $k_0 = 10000$  и  $\sigma$  менялось в пределах 0.04–0.07. Мы фиксировали начальную ширину пакета  $\sigma$  и параметр Чирикова  $K$ , через которые входящие в оператор эволюции (5) параметры  $\alpha$  и  $\beta$  выражаются как

$$\alpha = K^{1/2} \frac{\hbar}{2\sigma^2}, \quad \beta = K^{1/2} \frac{2\sigma^2}{\hbar}. \quad (23)$$

Формулы (23) получаются, если скомбинировать определение  $K = \alpha\beta$  с формулами (10) и (12).

В разд. 2 было показано, что число уровней невозмущенного ротатора, захватываемых за один толчок, есть  $\approx 2\alpha/\hbar$ . Из (23) следует, что в нашем случае это число

<sup>3)</sup> Обсуждение проблемы отражения и расщепления волнового пакета из-за конечности изменения импульса для близкой модели квантового кота Арнольда см. в [25].

сть  $K^{1/2}/\sigma^2$  и составляет несколько десятков тысяч для использованных нами ширин волнового пакета  $\sigma$ .

В наших расчетах  $K$  менялся в пределах  $0.2 \leq K \leq 2$ . с шагом 0.02. Мы находили временную зависимость сжатия  $S$  (19) и оптимальные значения фазы  $\theta^*$ , при которых  $\langle \delta X_\theta^2 \rangle$  имеет минимум. Для того чтобы продемонстрировать корреляцию между степенью сжатия и характеристиками хаоса [9, 14], мы вычисляли величину

$$d = [\langle \delta x^2 \rangle + \langle \delta p^2 \rangle]^{1/2}. \quad (24)$$

Можно показать [9, 14, 28], что в классическом пределе и в течение времени пока волновой пакет является хорошо локализованным, т. е.  $[\langle \delta x^2 \rangle]^{1/2} \ll x_0$  и  $[\langle \delta p^2 \rangle]^{1/2} \ll p_0$ , величине  $d$  (24) соответствует расстояние в фазовом пространстве

$$d_{cl}(t) = [(\Delta x)^2 + (\Delta p)^2]^{1/2}, \quad (25)$$

где  $(\Delta x(t), \Delta p(t))$  — решение линейных уравнений в вариациях около классической траектории  $(x(t), p(t))$ . Величина  $d_{cl}(t)$  характеризует расхождение двух близких в начальный момент времени траекторий и входит в определение максимального ляпуновского показателя

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d_{cl}(t)}{t}. \quad (26)$$

Для классического стандартного отображения при сильном хаосе  $K \gg 1$ , имеет место простая зависимость  $\lambda \approx \ln(K/2)$  [19]. Ляпуновский показатель (26) является асимптотической характеристикой хаоса. На конечных временах [7]

$$d_{cl}(t) \approx \exp(h(x, p)t), \quad (27)$$

где показатель  $h$  является функцией точки фазового пространства и по порядку величины совпадает с ляпуновским показателем  $\lambda$ , но может и существенно отличаться от него в отдельные промежутки времени. Это связано с сильной неоднородностью статистических свойств фазового пространства хаотических систем и, соответственно, с различной скоростью расхождения траекторий в различных областях фазового пространства, через которые проходит система в процессе своей временной эволюции. Необходимо отметить, что зависимость  $h$  от параметра  $K$  является весьма сложной. Однако существенным является лишь свойство сильного (экспоненциального) возрастания  $d_{cl}$  (27) при хаосе, которое часто называют локальной неустойчивостью [7]. При регулярном движении временная зависимость  $d_{cl}$  является гораздо более медленной — степенной [7].

С другой стороны, именно величина  $h$  определяет скорость деформации фазового объема: чем сильнее локальная неустойчивость, тем сильнее деформация фазового объема за данный промежуток времени.

Так как в нашем случае квантово-классическое соответствие и понятие хаоса определено только в течение довольно короткого времени, пока волновой пакет является локализованным, имеет смысл рассматривать корреляции между временной зависимостью сжатия и временной зависимостью величины  $d$  (24), которая в классическом пределе переходит в  $d_{cl}$  (25).

На рисунке 2 представлены временные зависимости сжатия  $\lg S$  и  $\lg d$  при различных значениях  $K$ , когда в начальный момент времени центр волнового пакета находится в точке  $x_0 = \pi$ ,  $p_0 = \hbar k_0 = 0.01$ . Это начальное условие близко к гиперболической

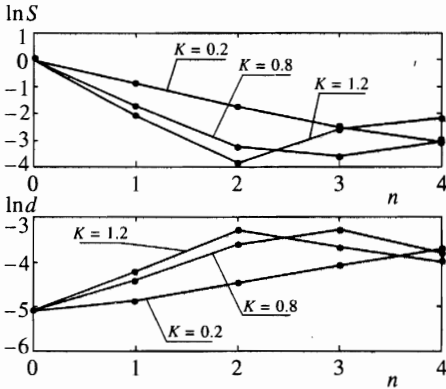


Рис. 2

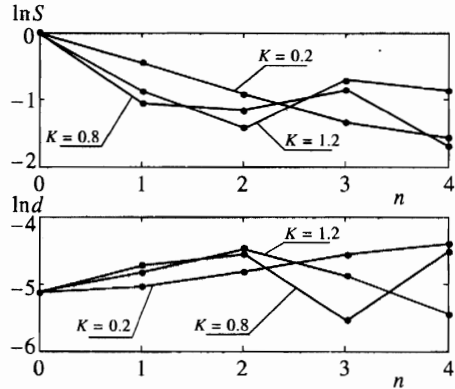


Рис. 3

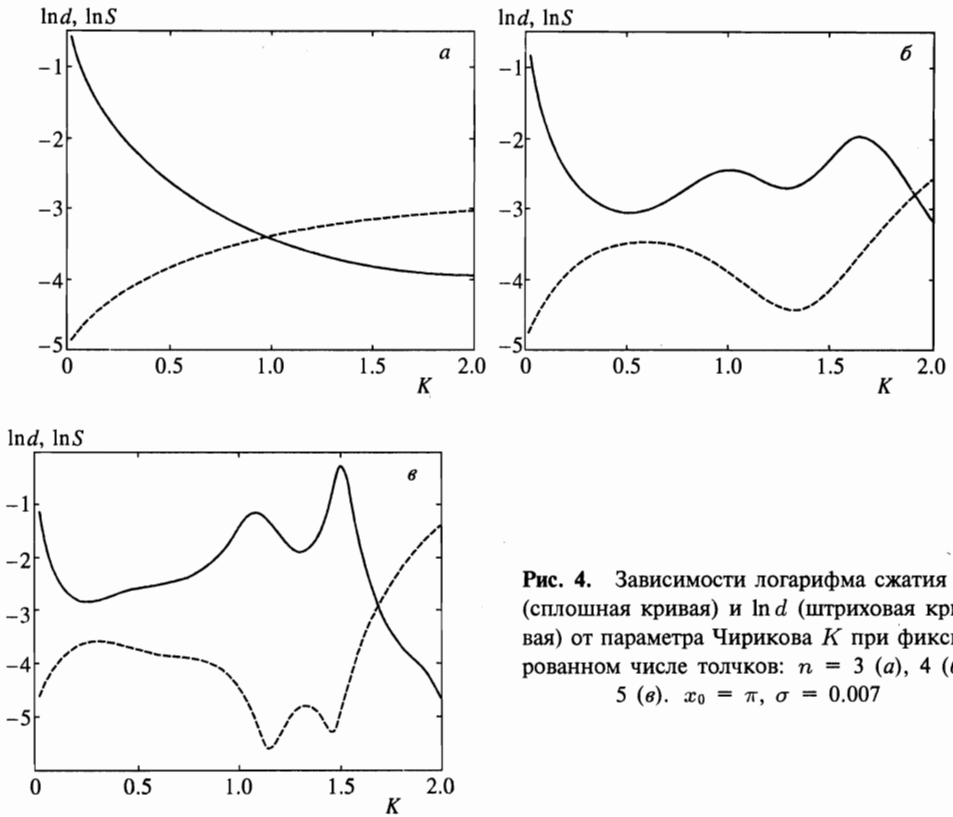
Рис. 2. Временная зависимость логарифма сжатия  $S$  (верхняя часть рисунка) и  $\ln d$  (24) (нижняя часть рисунка).  $x_0 = \pi$ ,  $\sigma = 0.006$

Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но при  $x_0 = \pi/2$

точке, через которую даже при малых  $K$  проходит хаотический слой (см. рис. 1). Как видно на рис. 2, более сильное сжатие (малые значения  $S$ ) сопровождается более сильной локальной неустойчивостью (большие значения  $\ln d$ ) вплоть до  $n \approx 4$ , когда пакет расплывается настолько, что существенными становятся чисто квантовые эффекты.

При другом начальном условии  $x_0 = \pi/2$ ,  $p_0 = 0.01$ , которое более близко к эллиптической точке и, следовательно, попадает в хаотическую область только при больших  $K$ , динамика сжатия представлена на рис. 3. Видно, что в этом случае сжатие примерно на два порядка сильнее, чем в условиях рис. 2 за тот же временной интервал. С другой стороны, на обоих рис. 2 и 3 заметен рост сжатия с ростом параметра  $K$ , управляющего общей хаотизацией системы.

Рассмотрим корреляцию между сжатием и степенью локальной неустойчивости в системе при разных  $K$  более подробно. Зависимость степени сжатия, вычисленной после некоторого фиксированного числа толчков, от величины  $K$  при  $x_0 = \pi$ ,  $p_0 = 0.01$  представлена на рис. 4. После третьего толчка, корреляция между  $\ln S$  и  $\ln d$  выражена очень явно (рис. 4а). Однако с ростом числа толчков могут появляться небольшие отклонения в этой зависимости. Подобные отклонения видны, например, после четвертого толчка при  $1.1 \lesssim K \lesssim 1.4$  (рис. 4б). В дальнейшем, при  $n = 5$ , корреляция между значениями  $\ln S$  и  $\ln d$  восстанавливается (рис. 4в). Отметим, что описанная картина является довольно типичной. Поэтому, чтобы выявить более явно корреляции между локальной неустойчивостью и сжатием, нужна некоторая процедура огрубления (усреднения) этих величин за данный временной интервал. В данной работе мы определяем минимум сжатия  $S_{min}$  за временной интервал, в течение которого пакет является хорошо локализованным для большинства рассматриваемых значений  $K$  и, соответственно, максимум  $d_{max}$  за тот же временной интервал. Мы нашли, что корреляция между  $S_{min}$  и  $d_{max}$  очень явная: большим значениям  $d_{max}$  соответствуют меньшие величины  $S_{min}$  и наоборот. Пример подобной зависимости представлен на рис. 5, где  $S_{min}$  и  $d_{max}$  вы-



**Рис. 4.** Зависимости логарифма сжатия  $S$  (сплошная кривая) и  $\ln d$  (штриховая кривая) от параметра Чирикова  $K$  при фиксированном числе толчков:  $n = 3$  (а), 4 (б), 5 (в).  $x_0 = \pi$ ,  $\sigma = 0.007$

числялись за шесть толчков. Отметим, что прерывание графика при  $K > 1.7$  связано с тем, что за шесть толчков при  $K > 1.7$  волновой пакет делокализовался и вычисление средних и локальной неустойчивости потеряло смысл.

Нами также рассмотрена зависимость динамики сжатия от начальной ширины волнового пакета  $\sigma$ . Результаты представлены на рис. 6. Видно, что чем уже пакет, тем более сильное сжатие достигается за фиксированный временной интервал. Мы объясняем эту зависимость тем, что более узкий волновой пакет дольше следует вдоль классической траектории и, следовательно, претерпевает сильные деформации, связанные с нелинейной классической динамикой. Экспоненциальное уменьшение сменяется ростом, когда волновой пакет отходит достаточно далеко от классического предела и динамика становится существенно квантовой.

Рассмотрим теперь проблему устойчивости и наблюдаемости сжатия при хаосе. Приведенные выше рисунки могут являться иллюстрацией к утверждению, что чем сильнее хаос, тем сильнее максимально достижимое сжатие. Однако определение максимально возможного сжатия (19) связано с фиксацией значения фазы  $\theta = \theta^*$ . Причем  $\theta^*$  зависит от времени даже для точно интегрируемых систем [21]. При сильном хаосе в классическом пределе зависимость  $\theta^*(t)$  может быть весьма сложной. Действительно, наряду с растяжением и сжатием основной чертой хаоса в классических системах с

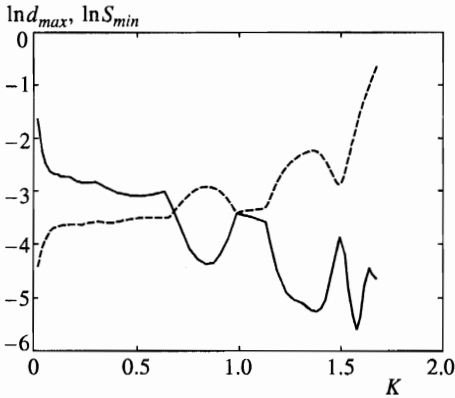


Рис. 5

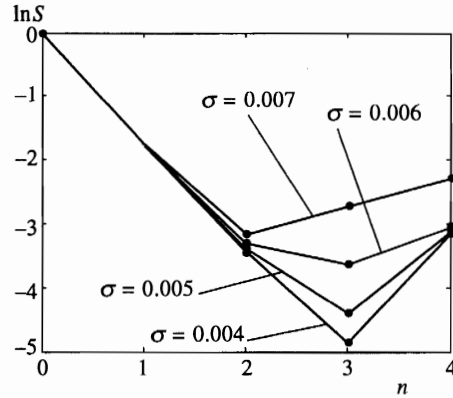


Рис. 6

**Рис. 5.** Зависимости логарифма минимума сжатия  $S_{min}$  (сплошная кривая) и логарифма максимума локальной неустойчивости  $d_{max}$  (штриховая кривая) за семь толчков от параметра Чирикова  $K$ . Параметры и начальные условия те же, что и на рис. 4

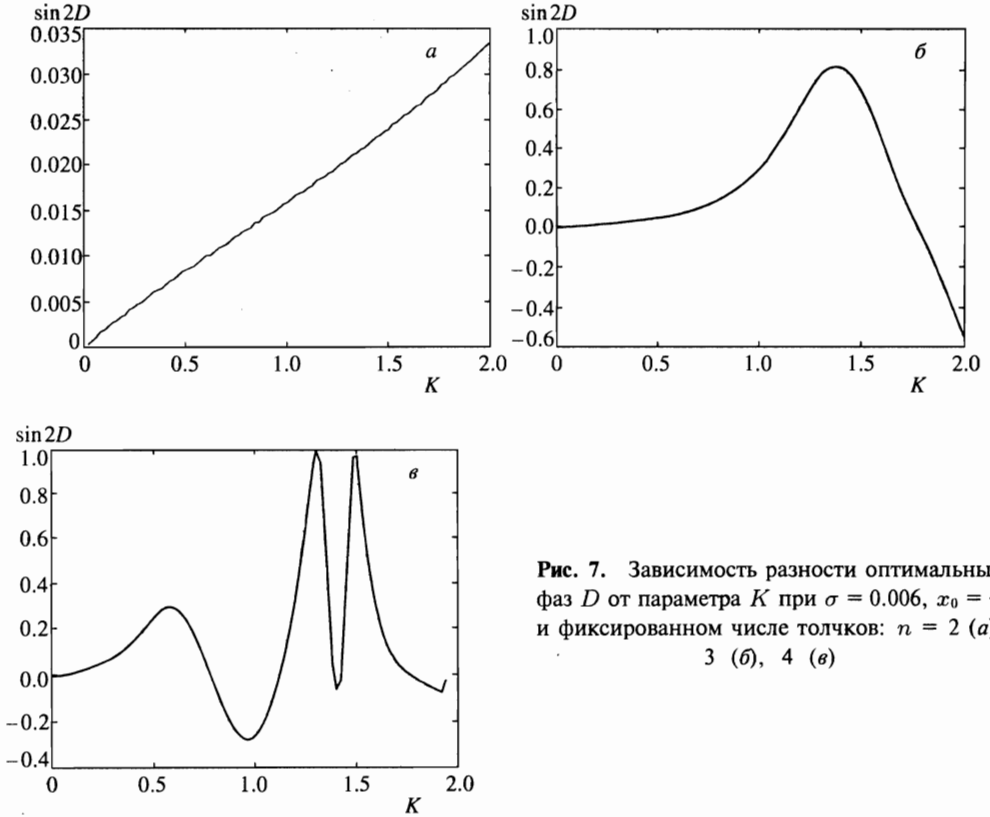
**Рис. 6.** Временная зависимость логарифма сжатия  $S$  при различных начальных ширинах волнового пакета  $\sigma$  и при фиксированных  $K = 0.8, x_0 = \pi$

ограниченным фазовым пространством является множественное образование складок фазового объема в процессе его эволюции [7]. Поэтому процесс определения «минимальной ширины» фазовой капли, соответствующий, по сути, нахождению временной зависимости  $\theta^*(t)$  в квазиклассическом пределе, становится неустойчивым на достаточно больших временах.

Основываясь на подобной простой полуклассической картине, мы рассмотрели устойчивость временной зависимости оптимальной фазы  $\theta^*(t)$ , вычисленной квантовомеханически, при малом шевелении начального положения волнового пакета. А именно, мы нашли временную зависимость оптимальной фазы  $\theta_1^*$  при начальном условии  $x_0 = \pi$  и, аналогично,  $\theta_2^*(t)$  при начальном условии  $x_0 = \pi - 0.05$ . Обозначим их разность

$$D(t) = \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t).$$

Поскольку  $\theta^*$  периодична с периодом  $\pi$  (см. (18)), то естественно взять в качестве интересующей нас величины  $\sin 2D$ , в этом случае мы сможем избежать разрывов на графиках, связанных с периодичностью  $\theta^*$ . Зависимости  $\sin(2D)$  от параметра Чирикова  $K$  при различном фиксированном числе толчков представлены на рис. 7а-в. После двух толчков (рис. 7а), максимальное значение  $|\sin 2D|$  не превышает 0.035 при  $K = 2$ . После трех толчков (рис. 7б), величина  $D$  становится существенной при  $K \gtrsim 1.2$ . Наконец, после четырех толчков (рис. 7в) процесс измерения сжатия становится существенно неустойчивым при  $K \gtrsim 1$ . Действительно, в этих условиях при малом шевелении начального положения центра пакета разность оптимальных фаз достигает величины порядка  $\pi$ . Подобный режим генерации сжатых состояний был назван в [9] неустойчивым сжатием. Как следует из рис. 7, неустойчивое сжатие наблюдается при достаточно сильном хаосе и временах, сравнимых с временем применимости полуклассического описания.

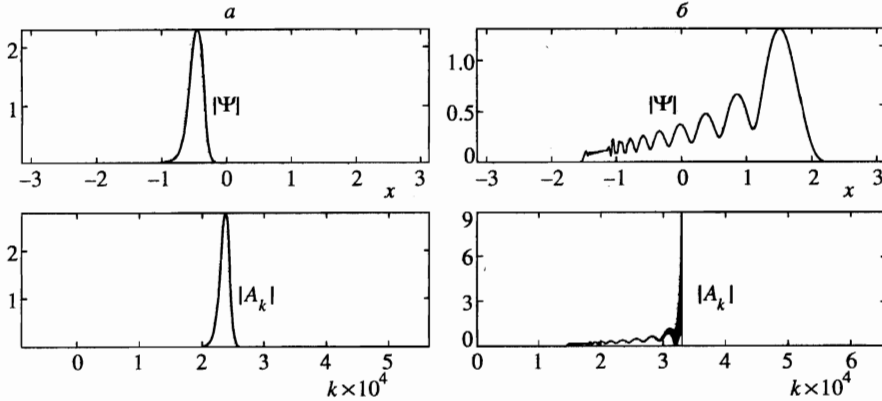


**Рис. 7.** Зависимость разности оптимальных фаз  $D$  от параметра  $K$  при  $\sigma = 0.006$ ,  $x_0 = \pi$  и фиксированном числе толчков:  $n = 2$  (а), 3 (б), 4 (в)

С другой стороны, на коротких временах и небольших  $K$  сжатие является достаточно сильным и устойчивым.

В заключение этого раздела рассмотрим кратко представляющую самостоятельный интерес проблему динамики разрушения когерентных состояний при хаосе. На рис. 8а и 8б представлены зависимости  $|\Psi|$  от  $x$  и  $|A_k|$  от  $k$  (см. формулу (4)). То есть, по- существу, на рис. 8 представлен вид волновой функции в координатном и импульсном представлениях для первоначально узкого волнового пакета с  $[(\delta x^2)]^{1/2}(t = 0) \equiv \sigma = 0.006$  и  $[(\delta p^2)]^{1/2}(t = 0) = (1/12) \cdot 10^{-3}$ . Сравнительно небольшое значение  $K = 1.2$  позволяет рассмотреть достаточно долгую эволюцию пакета вплоть до его тотального разрушения<sup>4)</sup>. После шести толчков (рис. 8а) волновой пакет существенно расплывается, но в целом сохраняет колоколообразную форму. В дальнейшем происходит его распад на много мелких подпакетов, характерный вид волновой функции при этом показан на рис. 8б (после 18 толчков). Наконец, очень скоро волновая функция становится настолько изрезанной, что нам не хватает уже  $2^{17}$  фурье-гармоник для корректного описания ее эволюции (для данных рис. 8 это наступает примерно на двадцатом толчке). Качественно

<sup>4)</sup> В численных экспериментах по рассмотрению динамики разрушения волновых пакетов мы не применяли описанную в разд. 3 процедуру прекращения счета при делокализации волновой функции.



**Рис. 8.** Зависимость модуля волновой функции  $|\Psi|$  от  $x$  и зависимость модуля фурье-гармоник  $|A_k|$  в разложении волновой функции (4) от  $k$  при  $n = 6$  (а), 18 (б) и фиксированных  $\sigma = 0.006$ ,  $K = 1.2$ ,  $x_0 = \pi$

ту же картину эволюции волнового пакета мы наблюдали и при бóльших значениях  $K$ : первоначальное уширение, «набухание» волнового пакета и затем его быстрое разбиение на множество очень мелких подпакетов. Различие в разрушении пакетов при больших  $K$  по сравнению со случаем  $K \simeq 1$  (рис. 8) заключается, в основном, в двух обстоятельствах: во-первых, как процесс набухания волнового пакета, так и его разбиение происходят очень быстро — всего за несколько толчков, и, во-вторых, возникающие подпакеты очень маленькие. Поэтому процесс разрушения волновых пакетов при сильном хаосе похож на взрыв. В целом описанная картина хорошо согласуется с картиной, полученной при анализе поведения функции Вигнера [18], хотя мы и наблюдали некоторые аномалии. В частности, для сравнительно узких волновых пакетов ( $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ ) наблюдался распад первоначального пакета на два сравнительно больших подпакета, на которых уже затем появлялась рябь, и они разваливались на множество мелких пакетов.

Более детальное описание разрушения когерентных состояний при хаосе требует дополнительного рассмотрения.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе в численном эксперименте изучалась динамика генерации сжатых состояний при эволюции гауссова пакета в квазиклассическом пределе для модели квантового ротатора, возбуждаемого толчками. Показано, что на временном интервале, когда пакет является хорошо локализованным, происходит усиление степени сжатия при переходе к хаосу. При сильном хаосе и на достаточно больших временах процесс сжатия становится неустойчивым. Данные результаты, полученные прямым численным моделированием, хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием теории возмущений и для других моделей [8, 9, 14].

На заключительном этапе подготовки данной работы к печати нам стали известны две недавние работы [29], также посвященные генерации неклассических состояний

(сжатие и антигруппировка) при квантовом хаосе. В этих статьях представлены численные эксперименты по динамике квадратурного сжатия в простых квантовых моделях, допускающих переход к хаосу в классическом пределе, — модели Липкина–Мешкова–Глика [30] и модели Белоброва–Заславского–Гартаковского [31]. В противоположность нашему подходу, авторы [29] интересовались пределом больших времен, когда волновые пакеты делокализованы и в этом смысле квантово-классическое соответствие полностью нарушено. Ими было продемонстрировано, что квадратурное сжатие исчезает при переходе к квантовому хаосу, хотя некоторая степень сжатия всегда присутствует при регулярном движении. Необходимо заметить, что в [29] отмечалось некоторое ненулевое сжатие в пределе коротких времен и для квантового хаоса, однако описываемое нами в данной работе усиленное сжатие не наблюдалось, по-видимому прежде всего из-за того, что в численных экспериментах [29] параметр квазиклассичности был не достаточно велик — всего несколько сотен квантовых уровней принимало участие в динамике системы. Таким образом, результаты [29] не противоречат нашим результатам и дополняют их в другом предельном случае — в пределе больших времен движения. Описание динамики сжатия в переходном режиме между случаем, рассмотренным в данной работе, и случаем, описанным в [29], требует отдельного изучения.

В заключение нам хотелось бы сделать несколько замечаний о возможности экспериментального наблюдения сжатия при квантовом хаосе на временном интервале хорошо определенного квантово-классического соответствия. В настоящее время практически все эксперименты по наблюдению сжатого света выполняются в стационарном режиме. Описанный нами эффект усиления сжатия при переходе к квантовому хаосу имеет место лишь на конечных временах и в этом смысле является переходным динамическим явлением. Первые эксперименты по сжатию света при переходных режимах находятся лишь в стадии подготовки [32]. Мы надеемся, что разработка эффективных экспериментальных методик для наблюдения сжатых состояний света в переходных динамических режимах позволит наблюдать и усиленное сжатие при переходе к квантовому хаосу.

С другой стороны, как уже отмечалось во Введении, модель квантового ротатора с толчками гораздо проще реализуема в атомной оптике [27]. Кроме того, в экспериментах с охлажденными атомами гораздо проще наблюдать переходные динамические режимы. Поэтому мы считаем, что атомно-оптические системы типа [27] являются весьма перспективными для наблюдения сжатых состояний при квантовом хаосе.

Мы признательны Claude Fabre, Jarmo Hietarinta, Zdenek Hradil, Juhani Kurkijärvi, Feodor Kusmartsev, Vlasta Peřinova, Сергею Туровцу за стимулирующие обсуждения при постановке проблемы связи сжатия и квантового хаоса. Мы благодарны Андрею Коловскому и Jan Peřina за обсуждения и поддержку на всех этапах работы, а также Борису Чирикову за обсуждение результатов и привлечение нашего внимания к работе [10]. Предварительный этап исследований был выполнен во время визита К. Н. А. в Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign. К. Н. А. благодарен Professor David Campbell за гостеприимство. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-02-16564а), Красноярским краевым фондом науки (грант № 6F0030), INTAS (грант № 94-2058) и NATO (Linkage grant № 93-1602).



## Литература

1. Д. Ф. Смирнов, А. С. Трошин, УФН **153**, 233 (1987); М. К. Тайш, Б. Э. А. Салэ, УФН **161**, 101 (1991).
2. S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre, in *Progress in Optics XXX*, ed. by E. Wolf, Elsevier, Amsterdam (1992), p. 1.
3. C. Fabre, Phys. Rep. **219**, 215 (1992).
4. A. Heidmann, J. M. Raimond, and S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **54**, 326 (1985).
5. L. A. Lugiato, P. Galatola, and L. M. Narducci, Opt. Commun. **76**, 276 (1990).
6. A. Heidmann, J. M. Raimond, S. Reynaud, and N. Zagury, Opt. Commun. **54**, 189 (1985).
7. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, Москва (1988).
8. K. N. Alekseev, Preprint Kirensky Institute of Physics 674F, Krasnoyarsk (1991).
9. K. N. Alekseev, Opt. Commun. **116**, 468 (1995).
10. B. V. Chirikov, in *Proc. of 2nd Intern. Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations, Moscow 25-29 May, 1992*, NASA Conference Publication **3219**, 317 (1993).
11. L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **54**, 407 (1982).
12. G. P. Berman and G. M. Zaslavsky, Physica A **91**, 450 (1978); M. Berry, N. Balazs, M. Tabor, and A. Voros, Ann. Phys. **122**, 26 (1979).
13. К. Н. Алексеев, Г. П. Берман, ЖЭТФ **94**(9), 49 (1988); **105**, 555 (1994).
14. K. N. Alekseev and J. Peřina, Phys. Lett. A **231**, 373 (1997); submitted to Phys. Rev. E (1998).
15. G. Casati, B. V. Chirikov, J. Ford, and F. M. Izrailev, Lecture Notes in Physics **93**, 334 (1979).
16. B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyansky, Sov. Sci. Rev. C **2**, 209 (1981).
17. *Chaos and Quantum Physics*, ed. by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin, Les Houches Session *LII* 1989, Elsevier, Amsterdam (1991).
18. G. Casati and B. V. Chirikov, Physica D **86**, 220 (1995).
19. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
20. A. Lukš, V. Peřinova, and J. Peřina, Opt. Commun. **67**, 149 (1988).
21. R. Tanaš, A. Miranowicz, and S. Kielich, Phys. Rev. A **43**, 4014 (1991).
22. R. F. Fox and B. L. Lan, Phys. Rev. A **41**, 2952 (1990); B. L. Lan and R. F. Fox, Phys. Rev. A **43**, 646 (1991); R. F. Fox and T. C. Elston, Phys. Rev. E **49**, 3683 (1994).
23. B. L. Lan, Phys. Rev. E **50**, 764 (1994).
24. R. F. Fox and T. C. Elston, Phys. Rev. E **50**, 2553 (1994).
25. T. C. Elston and R. F. Fox, Preprint Georgia Inst. of Technol. (1994).
26. J. Krug, Phys. Rev. Lett. **59**, 2133 (1987); R. E. Prange and S. Fishman, Phys. Rev. Lett. **63**, 704 (1989).
27. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **73**, 2974 (1994); F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **75**, 598 (1995).
28. B. Sundaram and P. W. Milonni, Phys. Rev. E **51**, 1971 (1995).
29. Rui-Hue Xie and Gong-ou Xu, Phys. Rev. E **54**, 1402 (1996); **54**, 2132 (1996).
30. H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick, Nucl. Phys. **62**, 188 (1965).
31. П. И. Белобров, Г. М. Заславский, Г. Х. Тартаковский, ЖЭТФ **71**, 1799 (1976).
32. Claude Fabre, Université P. et M. Curie, Paris, France (private communication).