ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 2, стр. 432–444

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ ЭФФЕКТА ПЛЕНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАНСНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

Научно-исследовательский центр электронных диагностических систем «Элдис» Российской академии наук 101000, Москва, Россия

М. Ю. Барабаненков

Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов Российской академии наук 142432, Московская обл., Черноголовка

Поступила в редакцию 17 января 1997 г.

Рассматривается распространение квазимонохроматического волнового пакета акустического излучения в дискретной случайно-неоднородной среде при условии, что несущая частота пакета близка к резонансной частоте рассеяния Ми на изолированном рассеивателе. В качестве исходного принимается двухчастотное уравнение Бете–Солпитера в форме точного кинетического уравнения, учитывающего аккумуляцию звуковой энергии излучения внутри рассеивателей. Это кинетическое уравнение упрощается в терминах модели резонансных точечных рассеивателей и приближения их низкой плотности с дополнительным использованием приближения Фраунгофера в теории многократного рассеяния волн, что приводит к новому уравнению переноса нестационарного излучения с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания. В отличие от известного уравнения переноса излучения Соболева с одним лоренцевским ядром запаздывания, новое уравнение переноса учитывает аккумуляцию энергии излучения внутри рассеивателей и согласовано с теоремой Пойнтинга для нестационарного акустического излучения. Полученное уравнение переноса с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания применяется к изучению эффекта Комптона–Милна — пленения импульса акустического излучения при его диффузном отражении от полубесконечной резонансной случайно-неоднородной среды, когда импульс может проводить наибольшую часть времени распространения в среде, будучи «плененным» внутри рассеивателей. Данная специфическая альбедная задача для полученного уравнения переноса решается с помощью обобщенного нестационарного принципа инвариантности. В результате функция рассеяния диффузно отраженного импульса выражается через обобщенную нестационарную H-функцию Чандрасекара, удовлетворяющую нелинейному интегральному уравнению. Найдены простые аналитические асимптотики для функции рассеяния переднего и заднего фронтов диффузно отраженного δ-импульса в зависимости от времени, угла отражения, среднего времени свободного пробега излучения, элементарного времени задержки и параметра аккумуляции энергии излучения внутри рассеивателей. Эти асимптотики демонстрируют количественно замедление нарастания переднего фронта и замедление убывания заднего фронта диффузно отраженного δ-импульса по мере перехода от режима обычного переноса излучения к режиму пленения излучения в резонансной случайно-неоднородной среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффекты многократного рассеяния классических волновых полей в дискретных случайно-неоднородных средах вызывают за последнее десятилетие повышенный интерес теоретиков и экспериментаторов главным образом под влиянием идеи о возможности существования феномена локализации Андерсона таких волновых полей и, в частности акустических волн [1, 2]. При поиске явления локализации акустического волнового пакета в случае трех измерений представляется целесообразным использовать среду в виде ансамбля случайно расположенных в пространстве сферических рассеивателей при условии, что несущая частота пакета близка к резонансной частоте рассеяния Ми на изолированном рассеивателе. Это условие резонанса совместно с достаточно высокой пространственной плотностью распределения рассеивателей, казалось бы, могло обеспечить, согласно [1, 3], минимум транспортной длины l_{tr} свободного пробега излучения и, соответственно, малое значение коэффициента диффузии излучения D. Однако резонансное рассеяние характеризуется не только большим сечением рассеяния, но и большим временем задержки излучения [4]. Поэтому могут возникнуть дополнительные трудности определения близости к порогу локализации в конкретном эксперименте, как отмечается авторами работы [5].

Дело в том, что согласно экспериментам этих авторов [6] коэффициент диффузии излучения в рассматриваемой резонансной случайно-неоднородной среде имеет вид $D = v_E l_{tr}/3$, где скорость v_E переноса энергии акустического излучения может быть на порядок величины меньше фазовой скорости C_0 звука в однородной среде без рассеивателей вследствие упомянутой временной задержки при элементарном акте резонансного рассеяния. Такого рода уменьшение скорости переноса энергии классических, в частности акустических, волновых полей при многократном резонансном рассеянии Ми на ансамбле случайно расположенных рассеивателей, не имеющее отношения к явлению локализации волн, тесно примыкает по своей физической природе, как легко усмотреть из работы [7], к давно известному эффекту Комптона [8] и Милна [9] пленения оптического резонансного излучения в газах, атомы которых имеют резонансную линию поглощения.

Определение эффекта пленения резонансного излучения в газах дано Комптоном [8]. Если время задержки излучения t_{del} при элементарном акте резонансного рассеяния превосходит время его свободного пробега t_l между актами рассеяния,

$$t_{del}/t_l \gg 1, \tag{1}$$

то излучение проводит при распространении в среде наибольшую часть времени, будучи «плененным» внутри резонансных рассеивателей. Следует отметить, что в большинстве работ [8–14] по теории эффекта пленения главное внимание уделялось изучению переноса возбужденного состояния атомов газа посредством плененного резонансного излучения. Существенное продвижение в обобщении обычной теории переноса излучения для описания этого эффекта было достигнуто Соболевым [15] и его последователями [16–18]. Соболевым выведено из феноменологических соображений уравнение переноса излучения с экспоненциальным (лоренцевским) ядром запаздывания в члене с изотропной индикатрисой рассеяния для лучевой интенсивности нестационарного излучения. Хотя теория Соболева физически наглядна и математически хорошо разработана [15–21], ее нельзя считать полностью последовательной и не нуждающейся в усовершенствовании. В самом деле, эффект запаздывания учитывается в уравнении переноса излучения, записанном Соболевым, только в члене с индикатрисой рассеяния и не учитывается в члене с коэффициентом экстинкции. Эффект аккумуляции энергии излучения внутри резонансных рассеивателей, рассматриваемый авторами работ [5, 6, 22, 23], в теории Соболева вообще не обсуждается. В результате этих недостатков уравнение переноса излучения с запаздыванием, записанное Соболевым, оказывается несогласованным с теоремой Пойнтинга для нестационарного излучения.

Цель нашей работы состоит в том, чтобы устранить отмеченные недостатки теории переноса излучения с запаздыванием, предложенной Соболевым. Эти недостатки теории Соболева для эффекта пленения резонансного излучения обусловлены ее феноменологическим характером и могут быть устранены путем обращения к некоторым «первым принципам» статистической теории многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах, что демонстрируется в данной работе на примере резонансного многократного рассеяния акустического квазимонохроматического волнового пакета на ансамбле случайно-расположенных рассеивателей.

За исходное принимается точное обобщенное кинетическое уравнение [24], которое следует из двухчастотного уравнения Бете–Солпитера для пространственно-временной спектральной плотности функции когерентности звукового поля. Обобщенное двухчастотное тождество Уорда–Такахаши [24–26] для классического волнового поля в случайно-неоднородной среде, подчиняющегося стохастическому уравнению гиперболического типа, позволяет ввести в кинетическое уравнение оператор, учитывающий аккумуляцию звуковой энергии внутри рассеивателей (разд. 2). Путем применения к кинетическому уравнению приближения низкой плотности в модели резонансных точечных рассеивателей [27] совместно с приближением Фраунгофера [28, 29] выводится модифицированное уравнение переноса излучения с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания (разд. 3). Для полученного модифицированного уравнения решается альбедная задача (разд. 4) о диффузном отражении акустического импульса от резонансной полубесконечной среды.

2. ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Исходим из нестационарного волнового уравнения для изменения давления $P(\mathbf{r}, t)$ в звуковой волне, распространяющейся в дискретной случайно-неоднородной среде с фазовой скоростью $C(\mathbf{r})$. В предположении, что невозмущенная звуковой волной плотность среды ρ_0 вне и внутри рассеивателей одинакова и однородна, волновое уравнение записывается, согласно [30], в виде

$$-\Delta P + \frac{1}{C^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -J, \tag{2}$$

где $J(\mathbf{r}, t)$ – заданный источник звукового возмущения. По аналогии со случаем электромагнитных волн [23] удобно положить $C_0^2/C^2(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})$. Здесь эффективная проницаемость среды $\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \delta\epsilon(\mathbf{r})$ включает в себя случайно-неоднородную составляющую $\delta\epsilon(\mathbf{r})$:

$$\delta\epsilon(\mathbf{r}) = (\epsilon_1 - 1) \sum_i \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{3}$$

Здесь ϵ_1 — заданная проницаемость рассеивателя и $\chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ — характеристическая функция области пространства, занятой i-м рассеивателем с центром в точке $\mathbf{r}_i$, равная единице внутри и нулю вне области рассеивателя. Предполагается, что ансамбль рассеивателей состоит из одинаковых сфер с заданным радиусом r_0, центры которых $\mathbf{r}_i$ случайно распределены в пространстве.

Многократное рассеяние нестационарного волнового акустического излучения в рассматриваемой дискретной случайно-неоднородной среде описывается двухчастотным уравнением Бете–Солпитера [24], которое подобно случаю электромагнитного излучения [23] преобразуется к следующему обобщенному кинетическому уравнению

$$\left\{-i\frac{\Omega\omega}{C_0^2}\left[1-A^+(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)\right]+i\,\mathbf{pq}\right\}f(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)=$$
$$=\int\limits_{\mathbf{p}'}\Delta G(\mathbf{p}';\mathbf{q},\omega)K(\mathbf{p}',\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)f(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)-$$
$$-\Delta G(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)\int\limits_{\mathbf{p}'}K(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{q},\omega)f(\mathbf{p}';\mathbf{q},\omega)-\Delta G(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)J(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega), \quad (4)$$

которое записано в представлениях преобразования Фурье в пространстве и Лапласа по времени с использованием переменных Вигнера. Искомая функция $f(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)$ имеет смысл пространственно-временной спектральной плотности функции когерентности звукового поля, $\langle P(\mathbf{R}+\mathbf{r}/2,T+t/2)P(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2,T-t/2)\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, причем волновые векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответствуют пространственным векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$, а частоты Ω и ω — переменным времени t и T. Величина $\Delta G(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)$ в правой части (4) выражается через фурье-образ $G(\mathbf{p},\Omega)$ средней функции Грина соотношением

$$\Delta G(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)=\frac{1}{2i}\left[G_1(\mathbf{p}_+)-G_2(\mathbf{p}_-)\right], \quad (5)$$

где (и далее) индексы $1,2$ отвечают частотам $\Omega_{1,2}=\pm\Omega+\omega/2+i\,0$, волновые векторы $\mathbf{p}_\pm=\mathbf{p}\pm\mathbf{q}/2$. Оператор интенсивности обозначается $K(\mathbf{p},\mathbf{p}';\mathbf{q},\omega)$. Величина $J(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)=J_1(\mathbf{p}_+)J_2(-\mathbf{p}_-)$, где $J_{1,2}(\mathbf{p})$ — фурье-образы $J_{1,2}(\mathbf{r})$. Символ $\int\limits_{\mathbf{p}}=(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{p}$.

Наиболее интересная величина $A^+(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)$ в уравнении (4) является фурье-образом оператора аккумуляции звуковой энергии внутри рассеивателей $A^+(\mathbf{R};\mathbf{R}'+\mathbf{r}'/2,\mathbf{R}'-\mathbf{r}'/2;\Omega_1,\Omega_2)$, причем волновые векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответствуют пространственным векторам $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{R}-\mathbf{R}'$. Общее определение оператора A^+ в координатном представлении имеет, согласно [23], вид

$$A^+=\frac{1}{g_1+g_2}A_{12}^+, \quad (6)$$

где оператор A_{12}^+ определяется совместно с аналогичным оператором A_{12}^- как

$$A_{12}^\pm=M_1\hat{\otimes}I\pm I\hat{\otimes}M_2\pm(G_1\hat{\otimes}I\pm I\hat{\otimes}G_2)K_{12}. \quad (7)$$

Здесь M — массовый оператор, функция $g(\Omega)=\Omega^2/C_0^2$, I — единичный оператор и символ $\hat{\otimes}$ обозначает тензорное произведение двух операторов с дополнительным отождествлением их первых аргументов (см. [23]). Физический смысл оператора (6) поясняется с помощью энергетического равенства

$$\langle w(\mathbf{R},\omega)\rangle=\frac{1}{2\rho_0C_0^2}\int\limits_{\mathbf{p}}\int\limits_{\mathbf{q}}e^{i\mathbf{qR}}\left[1-A^+(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)\right]f(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega), \quad (8)$$

где $w = P_1P_2/(2\rho_0C_0^2)$ — двухчастотная спектральная компонента плотности звуковой энергии. Второй член в правой части (8) показывает, что оператор (6) характеризует спектральную компоненту звуковой энергии, аккумулированной внутри рассеивателей. Два других энергетических равенства, связанных с кинетическим уравнением (4), имеют вид

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{R},\omega)\rangle = \frac{1}{2\rho_0\Omega}\int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qR}}\,\mathbf{p}\,f(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega), \tag{9}$$

$$\langle Q(\mathbf{R},\omega)\rangle = \frac{1}{2\rho_0\Omega}\int_{\mathbf{p}}\int_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qR}}\Delta G(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega)J(\mathbf{p};\mathbf{q},\omega). \tag{10}$$

В их левых частях $\mathbf{S} = (-P_1\nabla P_2 + P_2\nabla P_1)/4i\rho_0\Omega$ и $Q = (P_1J_2 - P_2J_1)/4i\rho_0\Omega$ — спектральные компоненты соответственно вектора Пойнтинга и взятой со знаком минус мощности источников звукового возмущения. Энергетические равенства (8)–(10) позволяют проверить, что умножение кинетического уравнения (4) на $\exp(i\mathbf{qR})$ с последующим интегрированием по переменным $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ дает усредненную по ансамблю теорему Пойнтинга для исходного волнового уравнения (2) в виде

$$-i\omega\langle w\rangle + \operatorname{div}\langle \mathbf{S}\rangle + \langle Q\rangle = 0. \tag{11}$$

Согласованность кинетического уравнения (4) с усредненной теоремой Пойнтинга (11) основывается на обобщенном двухчастотном тождестве Уорда–Такахаши

$$A_{12}^{-} = \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}A_{12}^{+}, \tag{12}$$

доказанном в [24–26].

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ТРЕМЯ ЛОРЕНЦЕВСКИМИ ЯДРАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Вернемся к точному кинетическому уравнению (4), чтобы получить из него приближенное модифицированное уравнение переноса излучения с учетом эффекта запаздывания. Перечислим сначала все приближения, позволяющие при желании перейти от кинетического уравнения (4) к общему модифицированному уравнению переноса излучения с запаздыванием. Затем, дополнительно используя приближение низкой плотности и модель резонансных точечных рассеивателей [27], запишем модифицированное уравнение с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания.

Пренебрежение пространственной дисперсией. Пусть квазимонохроматический волновой пакет (импульс) акустического излучения с пространственным и временным масштабами Δr_0 and Δt_0, где $k_0\Delta r_0 \gg 1$ и $\Omega\Delta t_0 \gg 1$, распространяется в дискретной случайно-неоднородной среде. Через $k_0 = \Omega/C_0$ обозначено волновое число в однородной среде. В предположении, что оператор интенсивности в (4) имеет как функция $\mathbf{q}$ масштаб изменения $\Delta q \sim 1/r_0$, удовлетворяющий условию

$$r_0 \ll \Delta r_0, \tag{13}$$

можно положить $\mathbf{q} = 0$ во всех коэффициентах кинетического уравнения (4), кроме, разумеется, коэффициента $i\mathbf{pq}$.

Приближение сильного запаздывания. Допускается произвольное соотношение между временным масштабом Δt_0 импульса и масштабом $\Delta\omega \sim 1/t_{del}$ изменения оператора интенсивности в (4) как функции ω, т. е.

$$0 < t_{del}/\Delta t_0 < \infty. \tag{14}$$

Поэтому используется точная зависимость оператора интенсивности в (4) от частоты ω при $\mathbf{q} = 0$. Однако мы пренебрегаем зависимостью величины (5) в (4) от ω при $\mathbf{q} = 0$, полагая

$$\Delta G(\mathbf{p}; 0, \omega) \cong \operatorname{Im} G(p), \tag{15}$$

где

$$G(p) = G(p, \Omega + i0) = 1/k_0^2 - p^2 - M(p), \quad M(p) = M(p, \Omega + i0).$$

Приближение Фраунгофера. Предполагается, что мнимая часть средней функции Грина в (15) является «острой» функцией p соответственно аппроксимации в виде дельта функции Дирака,

$$\operatorname{Im} G(p) \simeq -\frac{\pi}{2} \frac{\delta(p - k_{eff})}{k_0 n_{eff}}, \tag{16}$$

где эффективное волновое число k_{eff} определяется как корень уравнения $p^2 - k_0^2 + \operatorname{Re} M(p) = 0$ и величина $n_{eff} = |k_{eff}/k_0||1 + \partial \operatorname{Re} M(p)/\partial p^2|$ при $p = k_{eff}$. Приближение (16) физически эквивалентно, согласно [29], предположению [28], что одна эффективная рассеивающая неоднородность среды расположена в среднем в зоне дифракции Фраунгофера другой неоднородности, и позволяет ввести лучевую интенсивность

$$I(\mathbf{s}; \mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 \, dp f(p\mathbf{s}; \mathbf{q}, \omega), \tag{17}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор.

Приближение низкой плотности. В приближении низкой плотности n рассеивателей массовый оператор и оператор интенсивности просто выражаются (см., например, [6]) через оператор рассеяния $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \Omega) = \tilde{T}(\Omega)\delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}')$ изолированного рассеивателя, который предполагается мелкомасштабным, $k_0 r_0 \ll 1$, и рассматривается как резонансный точечный рассеиватель модели [27] с амплитудой рассеяния $\tilde{T}(\Omega)$ вида

$$\tilde{T}(\Omega) = -\frac{4\pi k_0^2 r_{eff}}{k_r^2 - k_0^2 - i k_0^3 r_{eff}}. \tag{18}$$

Здесь эффективная длина $r_{eff} = 1/\Lambda$ равна обратному значению параметра обрезания $\Lambda \sim 1/r_0$ при интегрировании в $\mathbf{k}$-пространстве фурье-образа функции Грина волнового поля в однородной среде [27]. Резонансное волновое число k_r определяется вместе с резонансной частотой рассеивателя $\Omega_r = k_r C_0$ равенством

$$k_r^2 = \frac{r_{eff}}{r_0^3} \frac{3C_1^2}{C_0^2 - C_1^2},$$

где C_1 — скорость звука внутри рассеивателя. Если скорость звука внутри рассеивателя много меньше ее значения вне рассеивателя, $C_1 \ll C_0$, то при $r_{eff} = r_0$ для резонансной частоты рассеивателя находим $\Omega_r \simeq \sqrt{3}C_1/r_0$. Можно проверить на основе решения задачи дифракции звуковой волны на сфере (см., например, [31]), что для малой сферы ($k_0 r_0 \ll 1$) это значение Ω_r действительно совпадает с точностью до численного коэффициента с минимальной резонансной частотой сферы, равной $(\pi/2)C_1/r_0$.

В непосредственной близости к резонансу точечного рассеивателя, $\Omega \simeq \Omega_r$ и $|\omega| \ll \Omega_r$, для двухчастотной билинейной комбинации амплитуд рассеяния (18) можно получить аппроксимацию с характерной лоренцевской зависимостью от разности частот:

$$\frac{\tilde{T}_1\tilde{T}_2}{|\tilde{T}|^2} \simeq \frac{1}{1 - i\omega t_{del}}, \tag{19}$$

где упоминавшееся в разд. 1 элементарное время задержки t_{del} принимает значение

$$t_{del} = \frac{2r_{eff}}{C_0}\left[4\left(\frac{\Omega - \Omega_r}{\Omega_r}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_r r_{eff}}{C_0}\right)^2\right]^{-1}. \tag{20}$$

Подстановка (18) и (19) в формулы работы [6] дает для массового оператора и оператора интенсивности выражения $M(\mathbf{p}, \Omega) = n\tilde{T}(\Omega)$ и

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}, \omega) = n\tilde{T}_1\tilde{T}_2 \simeq \frac{4\pi/l}{1 - i\omega t_{del}}, \tag{21}$$

где средняя длина свободного пробега излучения l определяется, как обычно, равенством $1/l = n|\tilde{T}|^2/4\pi$. Данные выражения для массового оператора и оператора интенсивности приводят, в свою очередь, на основании (6), (7) к следующему представлению в приближении низкой плотности величины $A^+(\mathbf{p}; \mathbf{q}, \omega)$, учитывающей в левой части кинетического уравнения (4) эффект аккумуляции звуковой энергии внутри рассеивателей,

$$A^+(\mathbf{p}; \mathbf{q}, \omega) \simeq -\frac{a}{1 - i\omega t_{del}}. \tag{22}$$

Величина a в правой части равенства (22) совпадает с фактором резонансной эффективности в формуле $v_E = C_0^2/(1+a)C_{ph}$ для скорости переноса энергии излучения, впервые введенной авторами работы [6]. Через $C_{ph} = \Omega/k_{eff}$ обозначена фазовая скорость волны в случайно-неоднородной среде. Как было подчеркнуто этими авторами, скорость переноса энергии излучения v_E в случайно-неоднородной резонансной среде отличается и от фазовой скорости, и от групповой скорости v_g, определяемой уравнением $C_0^2/C_{ph}v_g = 1 - n\partial\,\mathrm{Re}\,\tilde{T}/\partial E$ с $E = \Omega^2/C_0^2$. Тождество Уорда–Такахаши (12) в приближении низкой плотности дает при $\omega = 0$ для фактора резонансной эффективности a соотношение

$$\frac{a}{n} = -\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\tilde{T}}{\partial E} + \frac{k_0}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial E}\tilde{T}^*\right), \tag{23}$$

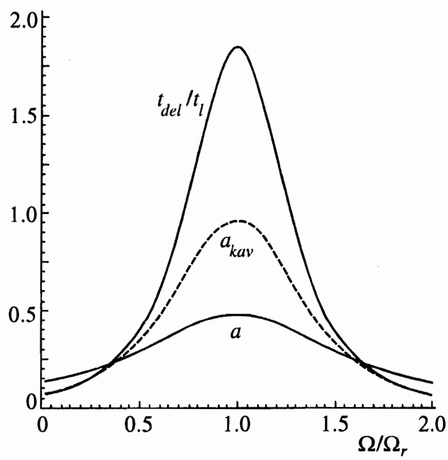

Рис. 1

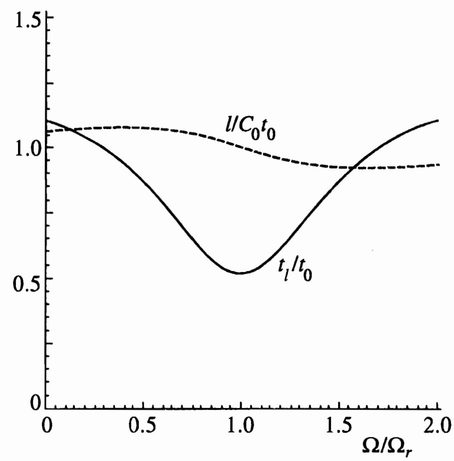

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость параметров a (нижняя сплошная линия), a_{kav} (штриховая линия) и отношения t_{del}/t_l (верхняя сплошная линия) от средней частоты Ω импульса при $k_r r_0 = 1$, $\Lambda = 1/r_0$, $C_0/C_1 = 2$, $\Omega_r = 2C_1/r_0$, $4\pi r_0^3 n/3 = 0.3$

Рис. 2. Зависимость отношений l/C_0t_0 (штриховая линия) и t_l/t_0 (сплошная линия) от средней частоты импульса Ω. Значения $k_r r_0$, Λ, C_0/C_1, Ω_r и $4\pi r_0^3 n/3$ те же, что и на рис. 1

согласующееся с результатом работы [27]. Лоренцевская асимптотика (19) и соотношение (21) при определении среднего времени свободного пробега излучения t_l через групповую скорость согласно $t_l = l/v_g$ позволяют записать скорость переноса энергии излучения v_E как комптоновскую скорость [8, 10] переноса возбуждения $v_E = l/(t_{del} + t_l)$.

В следующем разделе при рассмотрении решения модифицированного уравнения переноса излучения с запаздыванием появится другое среднее время свободного пробега излучения t_0 в резонансной среде, определяемое через фазовую скорость как $t_0 = lC_{ph}/C_0^2$. Отношение элементарного времени задержки (20) к среднему времени свободного пробега t_0 связано с фактором резонансной эффективности a, как следует из (23), равенством

$$\frac{t_{del}}{t_0} = a_{kav} = a + n\frac{\partial \operatorname{Re}\tilde{T}}{\partial E}, \qquad (24)$$

где величина a_{kav} впервые была введена в работе [32]. Сравнение (24) с определением групповой скорости v_g показывает, что $a_{kav} < a + 1$ при $v_g > 0$.

Подстановка выражения (18) для амплитуды рассеяния $\tilde{T}$ в правые части уравнений (23), (24), а также в уравнения для $1/l$, C_{ph} и v_g и простые вычисления, аналогичные [5], позволяют получить в непосредственной близости к резонансу точечного рассеивателя частотные зависимости основных физических параметров задачи о распространении импульса в случайно-неоднородной среде из резонансных точечных рассеивателей, примеры которых изображены для наглядности на рис. 1 и 2 как функции отношения Ω/Ω_r частоты к ее резонансному значению.

Модифицированное уравнение переноса излучения с тремя лоренцевскими ядрами за-

паздывания. Обратимся теперь к кинетическому уравнению (4). Умножим его на p^2 и проинтегрируем по p в пределах от $p = 0$ до $p = \infty$, применяя приближения (13)–(16), определение (17), а также выражения (21) и (22) для оператора интенсивности и величины, учитывающей эффект аккумуляции звуковой энергии внутри рассеивателей. Это совместно с обратными преобразованиями Фурье в пространстве $\mathbf{R}$ по переменной $\mathbf{q}$ и Лапласа во времени t по переменной ω приводит к следующему модифицированному уравнению переноса излучения с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания:

$$\frac{C_{ph}}{C_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[I(\mathbf{s};\mathbf{R},t) + a\int\limits_0^t \frac{dt'}{t_{del}}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_{del}}\right) I(\mathbf{s};\mathbf{R},t')\right] +$$

$$+(\mathbf{s}\nabla_{\mathbf{R}})I(\mathbf{s};\mathbf{R},t) = -\frac{1}{l}\int\limits_0^t \frac{dt'}{t_{del}}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_{del}}\right) I(\mathbf{s};\mathbf{R},t') +$$

$$+\frac{1}{l}\int\limits_0^t \frac{dt'}{t_{del}}\int\limits_{4\pi}\frac{d\mathbf{s}'}{4\pi}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_{del}}\right) I(\mathbf{s}';\mathbf{R},t') + \frac{1}{(4\pi)^2}J(k_{eff}\mathbf{s};\mathbf{R},t). \tag{25}$$

Здесь $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ — единичные векторы, $d\mathbf{s}'$ — элемент телесного угла. Выражения (8)–(10) для усредненных по ансамблю энергетических величин преобразуются с использованием приближений (13)–(16), определения (17), равенства (22) и упомянутых обратных преобразований Фурье и Лапласа к их следующему виду в пространственно-временном представлении

$$\langle w(\mathbf{R},t)\rangle = \frac{1}{2\rho_0 C_0^2}\int\limits_{4\pi} d\mathbf{s}\int\limits_0^t dt'\left[\delta(t-t') + \frac{a}{t_{del}}\exp\left(-\frac{t-t'}{t_{del}}\right)\right] I(\mathbf{s};\mathbf{R},t'), \tag{26}$$

$$\langle S(\mathbf{R},t)\rangle = \frac{1}{2\rho_0 C_0^2}\frac{C_0^2}{C_{ph}}\int\limits_{4\pi} d\mathbf{s}\,\mathbf{s}\,I(\mathbf{s};\mathbf{R},t), \tag{27}$$

$$\langle Q(\mathbf{R},t)\rangle = -\frac{1}{2\rho_0 C_0^2}\frac{C_0^2}{C_{ph}}\frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{4\pi} d\mathbf{s}\,J(k_{eff}\mathbf{s};\mathbf{R},t). \tag{28}$$

Интегрирование модифицированного уравнения переноса излучения (25) по переменной $\mathbf{s}$ показывает, что его решение удовлетворяет на основании (26)–(28) усредненной по ансамблю теореме Пойнтинга (11) во временном представлении.

Модифицированное уравнение переноса излучения с одним лоренцевским ядром запаздывания в приближении Соболева. Уравнение переноса излучения с одним лоренцевским ядром запаздывания, типа уравнения Соболева [15], может быть получено из модифицированного уравнения переноса излучения (25) путем формального пренебрежения эффектом запаздывания в выражении в квадратных скобках левой части (25), в члене с аккумуляцией энергии внутри рассеивателей и в правой части (25) — в первом члене с коэффициентом экстинкции, но не во втором члене с индикатрисой рассеяния. Кроме того, следует пренебречь элементарным временем задержки t_{del} по сравнению со временем свободного пробега t_l в правой части вышеуказанного комптоновского представления скорости переноса энергии излучения v_E, заменив ее тем самым на групповую скорость v_g.

4. РЕШЕНИЕ АЛЬБЕДНОЙ ЗАДАЧИ О ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ РЕЗОНАНСНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим альбедную задачу для модифицированного уравнения переноса излучения (25) с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания о диффузном отражении акустического импульса от полубесконечной случайно-неоднородной среды, состоящей из резонансных точечных рассеивателей и занимающей область полупространства $z > 0$. Эта задача предполагает найти решение однородного модифицированного уравнения переноса излучения (25) с граничным условием

$$I(\mu; z = 0, t) = \frac{1}{2}\delta(\mu - \mu_0)I_0(t), \tag{29}$$

где $\mu = s_z$ и $\mu_0 = s_{0z} > 0$ обозначают z-компоненты некоторого единичного вектора $\mathbf{s}$ и единичного вектора $\mathbf{s}_0$ в направлении распространения падающего плоского импульса с профилем во времени, задаваемым функцией $I_0(t)$. Достаточно найти частное решение альбедной задачи $I_\delta(\mu, \mu_0; z, t)$ при падении импульса в виде дельта-функции Дирака с $I_0(t) = \delta(t)$, так как общее решение получается затем путем свертки во времени найденного решения с $I_0(t)$.

Применение принципа инвариантности для нестационарных задач. К решению поставленной альбедной задачи для модифицированного уравнения переноса излучения (25) с граничным условием (29) можно было бы применить принцип инвариантности во временном представлении, разработанный Уэно [33] для обычного нестационарного уравнения переноса излучения. Однако более удобно сначала применить к модифицированному уравнению переноса излучения (25) преобразование Лапласа во времени и потом воспользоваться принципом инвариантности Амбарцумяна [34] для обычного стационарного уравнения переноса излучения, но уже с некоторым эффективным альбедо элементарного акта рассеяния. Такая форма принципа инвариантности для нестационарных задач рассмотрена Мининым [19] при решении модифицированного уравнения переноса излучения с одним лоренцевским ядром запаздывания, предложенного Соболевым [15]. Метод Минина приводит после обратного преобразования Лапласа во времени к следующей записи решения поставленной альбедной задачи для модифицированного уравнения переноса излучения (25) во временном представлении:

$$I_\delta(-\mu, \mu_0; z = 0, t) = \frac{1}{4\mu}\Sigma(\mu, \mu_0; t). \tag{30}$$

Здесь функция рассеяния $\Sigma(\mu, \mu_0; t)$ выражается посредством соотношения

$$t_0\Sigma(\mu, \mu_0; t) = \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0}\left[1 + (1 + a)\frac{\partial}{\partial\tilde{t}} + a_{kav}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2}\right]\Sigma_1(\mu, \mu_0; \tilde{t}) \tag{31}$$

через некоторую промежуточную функцию рассеяния $\Sigma_1(\mu, \mu_0; \tilde{t})$, где безразмерное время $\tilde{t} = t/t_0$. Промежуточная функция рассеяния записывается как свертка во времени:

$$\Sigma_1(\mu, \mu'; \tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' H_1(\mu, \tilde{t} - \tilde{t}')H_1(\mu', \tilde{t}'), \tag{32}$$

с помощью обобщенной, зависящей от времени H-функции Чандрасекара $H_1(\mu, \tilde{t})$, удовлетворяющей уравнению

$$H_1(\mu, \tilde{t}) = \frac{e^{\nu_1 \tilde{t}} - e^{\nu_2 \tilde{t}}}{a_{kav}(\nu_1 - \nu_2)} + \frac{1}{2}\mu \int\limits_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}' H_1(\mu, \tilde{t} - \tilde{t}') \int\limits_0^1 d\mu' \frac{H_1(\mu', \tilde{t}')}{\mu + \mu'}. \tag{33}$$

Параметры ν_1 и ν_2 в свободном члене правой части (33) даются равенствами

$$\nu_{1,2} = -\frac{1+a}{2a_{kav}} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4a_{kav}}{(1+a)^2}}\right], \tag{34}$$

где $\nu_1 > \nu_2$ и предполагается $4a_{kav} < (1+a)^2$.

В двух следующих пунктах рассматриваются асимптотические значения функции рассеяния $\Sigma(\mu, \mu_0; t)$, относящиеся к малым и большим значениям безразмерного времени $\tilde{t}$.

Случай малых значений $\tilde{t} \to 0$. В пределе малых значений безразмерного времени $\tilde{t}$ ($\tilde{t} \to 0$) можно аппроксимировать асимптотическое решение уравнения (33) свободным членом в его правой части, полагая $H_1(\mu, \tilde{t}) \to \tilde{t}/a_{kav}$. Подстановка этого значения $H_1(\mu, \tilde{t})$ в правую часть (32) дает $\Sigma_1(\mu, \mu'; \tilde{t}) \to \tilde{t}^3/6a_{kav}^2$, что ведет на основании (31) к асимптотике функции рассеяния при малых значениях безразмерного времени $\tilde{t} \to 0$ вида

$$t_0 \Sigma(\mu, \mu_0; t) \to \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{\tilde{t}}{a_{kav}}. \tag{35}$$

Эта асимптотика представляет собой приближение однократного рассеяния для переднего фронта диффузно отраженного импульса.

Случай больших значений $\tilde{t} \to \infty$. В пределе больших значений безразмерного времени $\tilde{t}$ ($\tilde{t} \to \infty$) легче использовать асимптотическое решение преобразования Лапласа во времени уравнения (33) в соответствующем пределе малых значений безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \omega t_0$ ($\tilde{\omega} \to 0$) согласно идее, примененной Мининым [18] для отыскания при больших значениях времени асимптотического решения модифицированного уравнения переноса излучения с одним лоренцевским ядром запаздывания, предложенного Соболевым [15]. Идея Минина заключается в использовании асимптотики H-функции Чандрасекара [35] $H(\mu, \lambda)$ при $\lambda \to 1$ вида $H(\mu, \lambda) \to H(\mu, 1)[1 - \mu\sqrt{3(1-\lambda)}]$. На этом пути после обратного преобразования Лапласа во времени получается искомая асимптотика функции рассеяния при больших значениях безразмерного времени $\tilde{t} \to \infty$. Эта асимптотика записывается как

$$t_0 \Sigma(\mu, \mu_0; t) \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} H(\mu, 1) H(\mu_0, 1) \mu\mu_0 \frac{\sqrt{1+a}}{\tilde{t}^{3/2}} \tag{36}$$

и представляет собой диффузионное приближение для заднего фронта диффузно отраженного импульса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе указано на возможность эффекта пленения акустического квазимонохроматического импульса в дискретной случайно-неоднородной среде в виде ансамбля случайно расположенных рассеивателей, когда несущая частота импульса близка к частоте резонанса Ми изолированного рассеивателя и элементарное время задержки может быть больше среднего времени свободного пробега излучения. Эффект пленения оптического нестационарного излучения в газах, атомы которых обладают резонансной линией поглощения, впервые рассматривался Комптоном и Милном еще в 1923 и 1926 гг. За последние годы интерес к эффекту пленения нестационарного излучения фактически возобновился в связи с попытками интерпретации экспериментов по обнаружению феномена локализации классических, например акустических, волновых полей в дискретных случайно-неоднородных средах с резонансным элементарным актом рассеяния Ми. В частности, как следует из данной работы, замедление переноса излучения классических волновых полей в таких средах, обнаруженное амстердамской группой [6] в 1991 г., — это всего лишь частное проявление эффекта пленения нестационарного излучения.

В работе построена последовательная теория эффекта пленения резонансного акустического нестационарного излучения в дискретной случайно-неоднородной среде на основе нового нестационарного уравнения переноса излучения с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания, учитывающего эффект аккумуляции звуковой энергии внутри рассеивателей и согласованного с усредненной по ансамблю теоремой Пойнтинга для нестационарного акустического излучения.

Для выведенного нестационарного уравнения переноса излучения с тремя лоренцевскими ядрами запаздывания решена альбедная задача о диффузном отражении квазимонохроматического импульса от резонансной полубесконечной среды. Найдены простые асимптотики приближения однократного рассеяния и диффузионного приближения соответственно для функции рассеяния переднего и заднего фронтов диффузно отраженного импульса, когда временной масштаб падающего импульса мал по сравнению со средним временем свободного пробега излучения и падающий импульс можно рассматривать как дельта-функцию Дирака. Оказалось, что можно наглядно представить эти асимптотики для функции рассеяния импульса в масштабе среднего времени свободного пробега t_0, определенного через фазовую скорость волн в случайно-неоднородной среде. В этом масштабе нарастание переднего фронта диффузно отраженного импульса замедляется с увеличением параметра $a_{kav} = t_{del}/t_0$, равного отношению элементарного времени задержки t_{del} к среднему времени свободного пробега t_0. Спад же заднего фронта диффузно отраженного импульса становится менее быстрым с увеличением параметра a аккумуляции звуковой энергии внутри рассеивателей.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-02-18829 и № 97-02-17328.

Литература

1. C. A. Condat and T. R. Kirkpatrick, in *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*, ed. by Ping Sheng, World Scientific, Singapure (1990), Vol. 8.
2. I. S. Graham, L. Piche, and M. Grant, Phys. Rev. Lett. **64**, 3135 (1990).
3. S. John, Comm. Cond. Mat. Phys. **14**, 193 (1988).
4. E. P. Wigner, Phys. Rev. **98**, 145 (1955).
5. V. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. van Albada, and A. Tip, Phys. Rev. B **45**, 1364 (1992).

6. M. P. van Albada, V. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, Phys. Rev. Lett. **66**, 3132 (1991).
7. Yu. N. Barabanenkov and M. Yu. Barabanenkov, Phys. Lett. A **221**, 421 (1996).
8. K. T. Compton, Phil. Mag. **45**, 750 (1923).
9. E. A. Milne, J. Lond. Math. Soc. **1**, 40 (1926).
10. T. Holstein, Phys. Rev. **72**, 1212 (1947).
11. Л. М. Биберман, ЖЭТФ **17**, 416 (1947).
12. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **47**, 1483 (1964).
13. В. М. Ермаченко, ЖЭТФ **51**, 1833 (1966).
14. Ю. А. Вдовин, В. М. Ермаченко, ЖЭТФ **54**, 148 (1968).
15. В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, Москва (1956).
16. И. Н. Минин, в сб. *Теория звездных спектров*, Наука, Москва (1966), с. 159.
17. С. А. Каплан, С. Ф. Морозов, Л. В. Пискунов, Астрофизика **4**, 485 (1968).
18. И. Н. Минин, в сб. *Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света*, Наука и техника, Минск (1971), с. 59.
19. И. Н. Минин, ДАН СССР **154**, 1059 (1964).
20. Д. И. Нагирнер, Астрофизика **5**, 31 (1969).
21. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, Москва (1969).
22. Yu. N. Barabanenkov and V. D. Ozrin, Phys. Lett. A **206**, 116 (1995).
23. Yu. N. Barabanenkov, L. M. Zurk, and M. Yu. Barabanenkov, J. Elect. Waves and Applications **9**, 1393 (1995).
24. Yu. N. Barabanenkov and V. D. Ozrin, Phys. Lett. A **154**, 38 (1991).
25. Yu. N. Barabanenkov and V. D. Ozrin, Phys. Rev. Lett. **69**, 1364 (1992).
26. J. Kroha, C. M. Soukoulis, and P. Wolfle, Phys. Rev. B **47**, 11093 (1993).
27. T. M. Nieuwenhuizen, A. Lagendijk, and V. A. van Tiggelen, Phys. Lett. A **169**, 191 (1992)
28. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **53**, 978 (1967).
29. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ **56**, 1262 (1969).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1985).
31. М. А. Исакович, *Общая акустика*, Наука, Москва (1973).
32. E. Kogan and M. Kaveh, Phys. Rev. B **46**, 10636 (1992).
33. S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl. **4**, 1 (1962).
34. В. А. Амбарцумян, ДАН СССР **38**, 257 (1943).
35. С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, ИИЛ, Москва (1953).