

ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ ПОЛЯ В АТОМЕ ПОЗИТРОНИЯ ПРИ ИЗЛУЧЕНИИ ИЛИ ПОГЛОЩЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ ФОТОНОВ

О. Н. Гадомский, С. Г. Моисеев

*Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 1997 г.

Решена задача о взаимодействии электрона и позитрона через поле мягких и жестких фотонов с излучением или поглощением реального фотона. Взаимодействие рассматривается как эффект третьего порядка квантовой электродинамики в координатном представлении. Исследована роль промежуточных состояний с положительными и отрицательными частотами. Получено общее выражение для матричных элементов оператора эффективной энергии взаимодействия электрона и позитрона для различных типов квантовых переходов, позволяющее вычислять вероятности соответствующих квантовых переходов в нерелятивистском приближении. Исследованы электрические дипольные переходы в атоме позитрония с излучением (поглощением) оптического фотона. С использованием двухчастичных волновых функций атома позитрония вводится понятие поляризуемых полей внутри атома позитрония. Поляризуемые поля зависят от координат и времени, а также от выбора пары состояний, между которыми осуществляется квантовый переход с излучением или поглощением фотона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поляризуемые поля играют важную роль в формировании различных оптических процессов. Так, в классической оптике диэлектриков таким поляризуемым полем является поле электрических диполей [1], которое позволяет не только объяснить процессы отражения и преломления света, но и позволяет строгим образом вывести формулу Лоренца–Лоренца для показателя преломления. Как было показано в [2, 3], природа поляризуемых полей в диэлектриках требует рассмотрения на основе эффектов второго и третьего порядков квантовой электродинамики. Это позволяет исследовать различные схемы квантовых переходов в поле виртуальных и реальных фотонов, учесть орбитальные и спиновые степени свободы атомных электронов, различные типы промежуточных состояний в спектре взаимодействующих атомов, а также эффект запаздывания атомов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. Значительным достижением такого рассмотрения является разработка метода получения новых интегральных уравнений распространения фотонов в среде с учетом различных типов квантовых переходов (электродипольных, квадрупольных, магнитодипольных, спиновых и т. д.) в спектре атомов [4, 5]. При этом учитываются электронные и позитронные поляризуемые поля, соответствующие промежуточным состояниям атомов с положительной и отрицательной энергией соответственно. На основе интегрального полевого уравнения в электрическом дипольном приближении рассмотрены законы отражения и преломления света в квантовой [6] и нелинейной [4] оптике, построена теория нелинейного показателя преломления [4], предсказан теоретически эффект ближнего поля с учетом дискретного распределения атомов в окрестности точки наблюдения [4, 7].

Данная статья, в отличие от работ [1–7], посвящена исследованию роли поляризующих полей внутри отдельного атома.

В работе [8] рассматривалось взаимодействие двух атомных электронов в гелиеподобном атоме как эффект третьего порядка квантовой электродинамики. С учетом орбитальных и спиновых степеней свободы, промежуточных состояний с положительной и отрицательной энергией было показано, что эффекты третьего порядка приводят лишь к релятивистским поправкам к вероятности излучения и поглощения фотонов.

Данная статья посвящена теории квантовых переходов между уровнями атома позитрония под действием мягких (оптических или радиочастотных) фотонов. Необходимость развития такой теории объясняется применением прецизионных методов радио- и оптической спектроскопии в физике атома позитрония, исследованием процесса аннигиляции в высоковозбужденных состояниях [9–11], исследованием возможности существенного изменения кинетических характеристик процесса аннигиляции под действием оптического лазера [12]. Очевидно, что процесс взаимодействия атома позитрония с полем фотонов в значительной степени определяется постоянными взаимодействия в эффективном гамильтониане. Поэтому в данной статье мы уделим основное внимание интерпретации этих постоянных, рассматривая оптический переход между уровнями атома позитрония как эффект третьего порядка квантовой электродинамики. Будет показано, что именно эти эффекты объясняют однофотонные процессы излучения и поглощения в атоме позитрония благодаря кулоновскому взаимодействию электрона и позитрона и наведению поляризующих полей. Будет показано, что вычисление вероятности в единицу времени спонтанного излучения фотона дает одинаковый результат, если рассматривать одночастичные волновые функции атома позитрония [10, 13] и двухчастичные волновые функции, полученные в данной статье. Иными словами, в атоме позитрония, благодаря его специфическим свойствам, эффекты третьего порядка, в отличие от случая гелиеподобных атомов [8], проявляются с максимальной полнотой.

В данной статье, как было отмечено выше, применяются двухчастичные волновые функции атома позитрония. Это позволяет, во-первых, исследовать различные схемы квантовых переходов, сопровождающих излучение или поглощение оптического фотона, исследовать роль реальных и виртуальных фотонов в этих процессах, роль различных промежуточных состояний. Во-вторых, применение двухчастичных волновых функций позволяет описать радиационное взаимодействие атома позитрония в поле аннигиляционных и оптических фотонов без применения теории возмущений [12] на основе только фермионных или бозонных операторов.

Процесс излучения фотона при столкновениях электрона с электроном и электрона с позитроном исследовался ранее в работах [14–16] при достаточно жестком условии, что взаимодействующие частицы имеют определенные импульсы до и после столкновения. Такая ситуация имеет место при взаимодействии свободных частиц и не годится для изучения квантовых переходов между состояниями атома позитрония, где интегралами движения являются квадрат полного момента импульса (орбитального и спинового) и проекция полного момента на ось квантования. Более того, как будет показано в данной статье, в e^+e^- -взаимодействии с излучением (поглощением) фотона важную роль играют промежуточные квантовые состояния с положительной и отрицательной частотой. Исследование роли промежуточных состояний открывает определенные возможности для возбуждения ридберговских состояний атома позитрония, с использованием в качестве промежуточного состояния, например $2P$ -состояния [9]. Поэтому в данной статье будет рассмотрена фактически новая задача о взаимодействии электрона и по-

зитрона в атоме позитрония с излучением (поглощением) фотона как эффекте третьего порядка квантовой электродинамики. Как было отмечено выше, взаимодействие двух атомных электронов, принадлежащих двум водородоподобным атомам на произвольном расстоянии друг от друга, в рамках эффектов третьего порядка рассматривалось в работах [2, 3]. В данной статье мы используем аналогичный подход для изучения e^+e^- -взаимодействия, обращая внимание при этом на существенное отличие от задачи [2, 3], которое связано, например, с возникновением жесткой моды e^+e^- -взаимодействия через виртуальные гамма-фотоны.

2. МАТРИЦА ЭФФЕКТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМА ПОЗИТРОНИЯ С ПОЛЕМ ФОТОНОВ

В теории квантовых переходов может быть введен эффективный гамильтониан взаимодействующих электрон-позитронного и электромагнитного полей, содержащий следующий член:

$$G(\mathbf{k})a_2^+b_2^+b_1a_1c + G^*(-\mathbf{k})a_1^+b_1^+b_2a_2c^+, \quad (2.1)$$

где индексы 1, 2 определяют квантовые состояния атома позитрония, b_1a_1 — оператор уничтожения атома позитрония в состоянии 1, $a_2^+b_2^+$ — оператор рождения атома позитрония в состоянии 2 и т.д., c, c^+ — операторы уничтожения и рождения фотона с волновым вектором \mathbf{k} . Взаимодействие (2.1) будем рассматривать как эффект третьего порядка квантовой электродинамики с диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1.

Выделяя временные множители в волновых функциях и проводя интегрирование в S -матрице $S_{i \rightarrow f}^{(3)}$ по времени, частотам и волновым векторам, получим следующую матрицу эффективной энергии взаимодействия ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} U_{i \rightarrow f}^{(3)} = & \frac{e^3}{4\pi} a_2^+ b_2^+ b_1 a_1 \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \left\{ -\frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}||\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_2^{(+)}} \times \right. \\ & \times \bar{\Psi}_2^{(+)}(\mathbf{r}') \hat{A}(\mathbf{r}') \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \gamma_{\mu}'' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_1^{(-)}(\mathbf{r}''') \gamma_{\mu}'' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \\ & - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_1^{(-)} - \omega_2^{(-)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_1^{(+)}} \bar{\Psi}_2^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_{\mu}' \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \hat{A}(\mathbf{r}'') \times \\ & \times \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_1^{(-)}(\mathbf{r}''') \gamma_{\mu}''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \\ & - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_2^{(+)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|)}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_1^{(-)}} \bar{\Psi}_2^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_{\mu}' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_1^{(-)}(\mathbf{r}'') \hat{A}(\mathbf{r}'') \times \\ & \times \Psi_l(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \gamma_{\mu}''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \\ & - \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_2^{(+)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''''|)}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_2^{(-)}} \bar{\Psi}_2^{(+)}(\mathbf{r}') \gamma_{\mu}' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_1^{(-)}(\mathbf{r}'') \gamma_{\mu}'' \times \\ & \times \Psi_l(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \hat{A}(\mathbf{r}''') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') + \end{aligned}$$

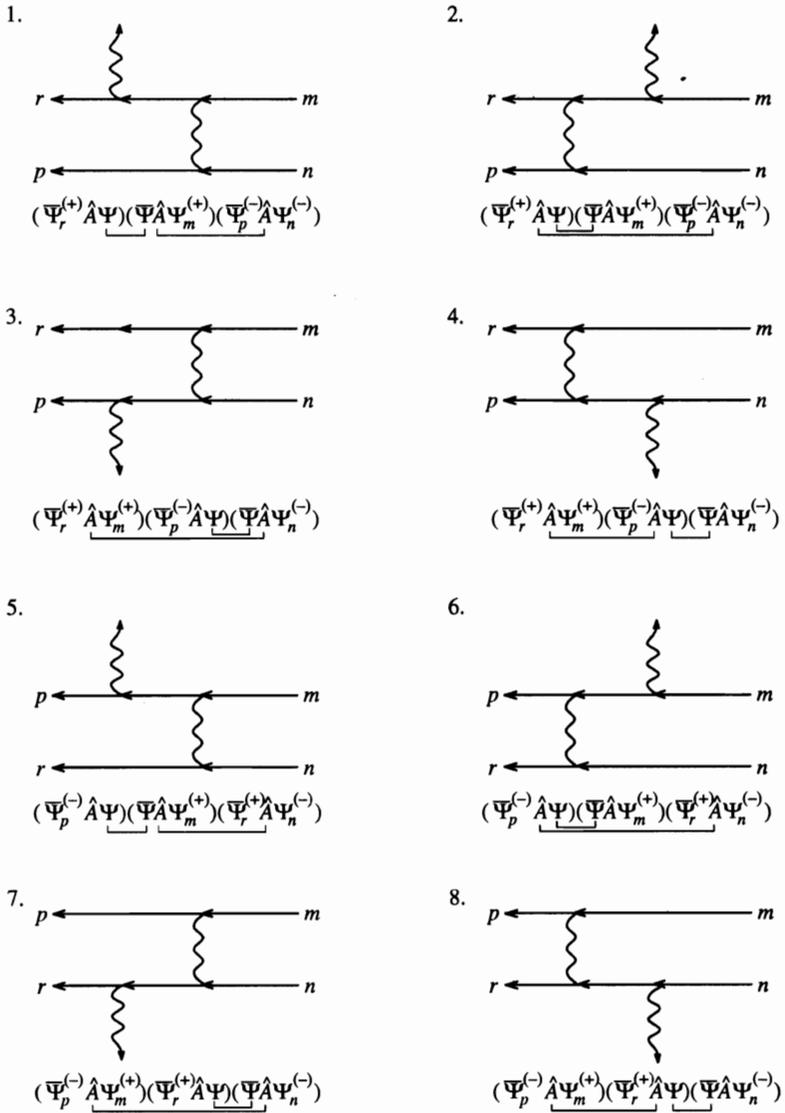


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана e^+e^- -взаимодействия в атоме позитрония с излучением или поглощением фотона

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1 - i0) + \omega - \omega_2^{(-)}} \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \hat{A}(\mathbf{r}') \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}'') \gamma_{\mu}'' \times \\
 & \times \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}''') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}''') \gamma_{\mu}''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') + \\
 & + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|} \sum_{l_{\pm}} \frac{\exp(i|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|)}{\omega_l(1 - i0) - \omega - \omega_1^{(+)}} \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \gamma_{\mu}' \Psi_l(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \hat{A}(\mathbf{r}''') \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') + \\
 & + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \sum_{l_\pm} \frac{\exp(i|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)}{\omega_l(1 - i0) + \omega - \omega_1^{(+)}} \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \hat{A}(\mathbf{r}'') \times \\
 & \times \Psi_l^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \gamma_\mu''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') + \\
 & + \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \sum_{l_\pm} \frac{\exp(i|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(+)}||\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)}{\omega_l(1 - i0) - \omega - \omega_2^{(-)}} \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \gamma_\mu' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \gamma_\mu'' \times \\
 & \times \Psi_l(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_l(\mathbf{r}''') \hat{A}(\mathbf{r}''') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \Big\} , \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

где $\Psi_{1(2)}^{(\pm)}(\mathbf{r})$ — решения уравнения Дирака для электрона с положительной и отрицательной частотой в атоме позитрония, который может находиться в некоторых квантовых состояниях с индексами 1 и 2; $\bar{\Psi}_{1(2)}^{(\pm)} = \Psi_{1(2)}^{(\pm)*} \gamma_4$, $\Psi_{1(2)}^{(\pm)*}$ — сопряженная волновая функция, $\gamma_4 = \beta$, $\gamma_j = -i\beta\alpha_j$ ($j = 1, 2, 3$),

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

σ — матрицы Паули. Штриховые индексы, сопровождающие радиус-векторы \mathbf{r} и γ — матрицы, соответствуют различным волновым функциям взаимодействующих частиц. При этом γ -матрицы с различными штриховыми индексами коммутируют между собой. Суммирование в (2.2) проводится по всем промежуточным состояниям с положительными и отрицательными частотами. Состояния электрона с отрицательными частотами будем рассматривать как позитронные состояния, не переходя к волновой функции позитрона, содержащей преобразование зарядового сопряжения. Это связано с тем, что суперпозиция состояний с противоположными знаками заряда не может образовать общего решения уравнения Дирака [13]. В данной статье будет использовано следующее решение:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \sum_r a_r \Psi_r^{(+)} + \sum_r b_r^+ \Psi_r^{(-)}, \\
 \bar{\Psi} &= \sum_r a_r^+ \bar{\Psi}_r^{(+)} + \sum_r b_r \bar{\Psi}_r^{(-)}.
 \end{aligned} \tag{2.2a}$$

Переход от $S_{i \rightarrow j}^{(3)}$ к матрице эффективной энергии взаимодействия в (2.2) произведен с помощью следующего равенства:

$$S_{i \rightarrow j}^{(3)} = -2\pi i U_{i \rightarrow j}^{(3)} \delta(-\omega_m^{(+)} - \omega + \omega_r^{(+)} + \omega_n^{(-)} - \omega_p^{(-)}), \tag{2.3}$$

где $\omega_m^{(+)}$, $\omega_r^{(+)}$, $\omega_n^{(-)}$, $\omega_p^{(-)}$ — частоты взаимодействующих электрона и позитрона в атоме позитрония. При этом, фиксируя состояния атома позитрония с индексами 1 и 2, имеем $r = 2$, $p = 1$, $m = 1$, $n = 2$ для диаграмм 1–4 и соответствующих членов в (2.2). Для диаграмм 5–8 имеем $r = 1$, $p = 2$, $m = 1$, $n = 2$. Знак перед частотой оптического фотона ω в законе сохранения (2.3) указывает на то, что в операторе векторного потенциала $\hat{A} = \sum \gamma_\mu A_\mu$ выделена отрицательно-частотная часть, пропорциональная

оператору уничтожения фотона этой моды. Интегрирование в матрице $S_{i \rightarrow j}^{(3)}$ по времени, частотам и волновым векторам позволяет определить частоты виртуальных фотонов, осуществляющих взаимодействие электрона и позитрона. При этом диаграммы 1–4 на рис. 1. соответствуют взаимодействию электрона и позитрона через мягкие виртуальные фотоны, энергия которых значительно меньше удвоенной энергии покоя электрона. Такую моду e^+e^- -взаимодействия будем называть мягкой модой взаимодействия. Наряду с этим диаграммы 5–8 соответствуют жесткой моде e^+e^- -взаимодействия с виртуальными фотонами, энергия которых сравнима с удвоенной энергией покоя электрона. Более того, наличие в (2.2) множителей, содержащих в знаменателе разности частот, указывает на резонансный характер e^+e^- -взаимодействия. При этом диаграммы 1–4 мягкой моды взаимодействия и диаграммы 5–8 жесткой моды взаимодействия соответствуют процессам, которые протекают с участием промежуточных состояний как с положительными частотами l_+ , так и с отрицательными l_- . Наибольший вклад в (2.2) будут оказывать те члены, которые содержат в знаменателе разности частот, значительно меньшие удвоенной энергии покоя электрона.

2.1. Обобщенный брейтовский оператор

Оператор Брейта, как известно [13], соответствует эффектам второго порядка квантовой электродинамики и был получен для взаимодействия двух свободных электронов либо для атомных электронов в гелиеподобных атомах. В работах [17, 18] было сделано обобщение этого оператора для взаимодействия электрона и позитрона с учетом преобразования зарядового сопряжения и с учетом обменного взаимодействия электрона с позитроном. В работах [2, 3, 19] было проделано также обобщение брейтовского оператора для двух атомных электронов, принадлежащих двум водородоподобным атомам на произвольном расстоянии друг от друга. В e^+e^- -взаимодействии, которое рассматривается в данной статье, содержится обмен виртуальными фотонами как составная часть более сложного взаимодействия с диаграммами Фейнмана рис. 1. Покажем, что учет такого обмена в эффектах третьего порядка квантовой электродинамики для e^+e^- -взаимодействия приводит к обобщению брейтовского оператора, где наряду с эффектами запаздывания необходимо должным образом учесть роль промежуточных состояний и нерелятивистский характер движения взаимодействующих частиц в атоме позитрония.

Рассмотрим первый член в матрице эффективной энергии взаимодействия (2.2) и разложим фактор запаздывания в этом члене с точностью до членов $1/c^2$. Полагая, что $c \neq 1$, получим, что

$$\frac{\exp\left((i/c)|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}||\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''\right)}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''} = \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''} + i \frac{|\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}|}{c} - \frac{(\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)})^2}{2c^2} |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в первый член (2.2), получим, что второй член разложения (2.4) не дает вклада в этот член, поскольку волновые функции $\Psi_l, \Psi_1^{(+)}$ и $\Psi_1^{(-)}, \Psi_2^{(-)}$ ортогональны. Более того, поскольку $\gamma_4'' \gamma_\mu'' \gamma_4''' \gamma_\mu''' = 1 - \alpha'' \alpha'''$ и матричные элементы операторов α'', α''' по порядку величины равны v/c (v — скорость движения частиц), в членах, содержащих $\alpha'' \alpha'''$, достаточно сохранить лишь первый член в разложении (2.4).

Исключим в выражении для матричного элемента частоты, используя уравнение

Дирака:

$$\begin{aligned}
 H''\Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') &= \omega_1^{(+)}\Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}''), & H'' &= c\alpha''\mathbf{p}'' + \gamma_4''mc^2 - \frac{e^2}{2|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|}, \\
 H'''\Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') &= \omega_2^{(-)}\Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}'''), & H''' &= c\alpha'''\mathbf{p}''' + \gamma_4'''mc^2 - \frac{e^2}{2|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|},
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

где m — масса электрона, $\mathbf{p}'', \mathbf{p}'''$ — операторы импульса, действующие на координаты \mathbf{r}'' и \mathbf{r}''' соответственно. Запишем далее очевидное равенство:

$$-(\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)})^2 |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''| = \frac{\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}}{\omega_l - \omega_1^{(+)}} \left[H'', \left[H''', |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''| \right] \right]. \tag{2.6}$$

Вычисляя коммутаторы, найдем, что вклад третьего слагаемого в разложении (2.4) определяется следующим оператором:

$$-\frac{(\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)})^2}{2c^2} |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''| \rightarrow \frac{(\alpha''\alpha''') - (\alpha''\mathbf{n}_{23})(\alpha'''\mathbf{n}_{23})}{2|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|} \frac{\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}}{\omega_l - \omega_1^{(+)}} , \tag{2.7}$$

где $\mathbf{n}_{23} = (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''')/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|$. Таким образом, e^+e^- -взаимодействие, соответствующее диаграмме 1 рис. 1, определяется следующим обобщенным брейтовским оператором:

$$\begin{aligned}
 B_{1l}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|} + \frac{e^2}{4\pi} \frac{(\alpha''\alpha''') - (\alpha''\mathbf{n}_{23})(\alpha'''\mathbf{n}_{23})}{2|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|} f_{l1} - \\
 &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{(\alpha''\alpha''')}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''''|} , & f_{l1} &= \frac{\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}}{\omega_{l+} - \omega_1^{(+)}} .
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

При $f_{l1} = 1$ оператор (2.8) переходит в релятивистский оператор Брейта [13]. Условие $f_{l1} = 1$ означает, что переход системы двух частиц в промежуточное состояние должен сопровождаться сохранением энергии частиц, т. е. должно выполняться равенство: $\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)} = \omega_l - \omega_1^{(+)}$.

Аналогичным образом рассмотрим обмен виртуальными фотонами во втором, третьем и четвертом членах матрицы (2.2) с диаграммами 2, 3 и 4 соответственно. После необходимых вычислений получим операторы $B_{2l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''')$, $B_{3l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''')$ и $B_{4l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$, имеющие вид, аналогичный (2.8), но с заменой f_{l1} на следующие коэффициенты:

$$f_{l2} = \frac{\omega_2^{(-)} - \omega_1^{(-)}}{\omega_2^{(+)} - \omega_{l+}} , \quad f_{l3} = \frac{\omega_1^{(+)} - \omega_2^{(+)}}{\omega_{l-} - \omega_2^{(-)}} , \quad f_{l4} = \frac{\omega_1^{(+)} - \omega_2^{(+)}}{\omega_1^{(-)} - \omega_{l-}} . \tag{2.9}$$

Таким образом, вклад различных диаграмм 1–4 в e^+e^- -взаимодействие существенным образом зависит от типа промежуточного состояния с положительной или отрицательной частотой.

Рассмотрим теперь диаграммы 5–8, которые отличаются от предыдущих диаграмм заменой индексов состояний $r \rightarrow p, p \rightarrow r$. Фактор запаздывания в соответствующих членах матрицы (2.2) содержит в экспоненте большой коэффициент $2mc$ и потому осциллирует с длиной волны $1/2mc$ ($1/2mc$ — комптоновская длина волны электрона). Учитывая значительную роль промежуточных состояний в e^+e^- -взаимодействии,

которая была отмечена выше для диаграмм 1–4, используем то обстоятельство, что существенной областью интегрирования для диаграмм 5–8 является область $|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''| \sim \sim 1/mc$. Так как волновые функции электрона и позитрона, в соответствии с предположением о малости скоростей их движения в атоме позитрония, незначительно меняются на таких расстояниях, то в (2.2) можно выделить интегрирование по $\mathbf{r} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''$, считая в аргументах волновых функций $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'''$. Тогда пятый член в (2.2) примет следующий вид:

$$\frac{e^3}{4\pi} a_2^+ b_2^+ a_1 b_1 \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \frac{\exp(2imc\mathbf{r})}{2} \sum_{i\pm} \frac{1}{\omega_i(1-i0) + \omega - \omega_2^{(-)}} \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \hat{A}(\mathbf{r}') \Psi_i(\mathbf{r}') \times \left\{ \Psi_i^*(\mathbf{r}'') \Psi_1^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}''') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \left(\Psi_i^*(\mathbf{r}'') \alpha'' \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \right) \left(\Psi_1^{(+)*}(\mathbf{r}''') \alpha''' \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \right) \right\}. \quad (2.10)$$

Несобственный интеграл по переменной \mathbf{r} равен $-\pi/(mc)^2$. Таким образом, e^+e^- -взаимодействие, соответствующее жесткой моде взаимодействия диаграммы Фейнмана 5, будет определяться следующим оператором [13]:

$$B_{5l}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{\pi}{m^2 c^2} (1 - \alpha'' \alpha''') \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''). \quad (2.11)$$

Такой же оператор может быть выделен и в остальных членах матрицы (2.2) жесткой моды e^+e^- -взаимодействия. Зависимость оператора (2.11) от индексов считается условной и имеет смысл только при подстановке его в соответствующий матричный элемент матрицы (2.2).

2.2. Учет других промежуточных состояний

В обобщенных брейтовских операторах B_{sl} ($s=1,2,\dots,4$), а также в операторах B_{5l} , были учтены лишь те промежуточные состояния, которые соответствуют максимальным значениям резонансных множителей, в которых присутствуют разности различных частот. Учтем теперь остальные промежуточные состояния, для которых резонансные множители обращаются в $\pm 1/2mc^2$. Тогда для мягкой моды e^+e^- -взаимодействия можно сопоставить матрице эффективной энергии взаимодействия соответствующий оператор эффективной энергии взаимодействия с излучением (поглощением) реального фотона. Этот оператор имеет следующий вид:

$$U_{soft}^{(3)} = -\frac{e^3}{8\pi mc^2} \left\{ -\gamma'_4 \gamma'_6 A_\delta(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} + \gamma_4''' \gamma_6''' A_\delta(\mathbf{r}''') \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right\}, \quad (2.12)$$

где в обобщенных брейтовских операторах оставлен лишь кулоновский член, поскольку коэффициенты f_{l1} , f_{l2} , f_{l3} и f_{l4} будут содержать множитель $1/c^2$.

3. ПЕРЕХОД К ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ВОЛНОВЫМ ФУНКЦИЯМ ЭЛЕКТРОНА И ПОЗИТРОНА

Как известно [13], для малых скоростей ($v \ll c$) частиц возможен переход от четырехкомпонентных волновых функций $\Psi_n^{(\pm)}$ к приближенным двухкомпонентным функ-

циям $\Phi_n^{(\pm)}$ с точностью до членов $1/c^2$. Представим функции $\Psi_n^{(\pm)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(+)} &= \begin{pmatrix} \varphi_n^{(+)} \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{2mc} \varphi_n^{(+)} \end{pmatrix}, & \varphi_n^{(+)} &= \left(1 - \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) \Phi_n^{(+)}, \\ \Psi_n^{(-)} &= \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \mathbf{p}}{2mc} \chi_n^{(-)} \\ \chi_n^{(-)} \end{pmatrix}, & \chi_n^{(-)} &= \left(1 - \frac{p^2}{8m^2c^2}\right) \Phi_n^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где операторы σ , \mathbf{p} действуют на те переменные, от которых зависит волновая функция $\Phi_n^{(\pm)}$. Будем использовать в дальнейшем вместо штриховых индексов индексы 1, 2, 3 для соответствующих операторов.

Преобразуем с учетом (3.1) матричный элемент $\langle \bar{\Psi}_2^{(+)}(\mathbf{r}') \hat{A}(\mathbf{r}') \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \rangle$, входящий в первое слагаемое (2.2). После необходимых преобразований получим с точностью до членов $1/c^3$:

$$\langle \bar{\Psi}_2^{(+)} \hat{A} \Psi_1^{(+)} \rangle = \langle \Phi_2^{(+)}(\mathbf{r}') | U_{NR}^{(1)} | \Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} U_{NR}^{(1)} &= \frac{1}{mc} (\mathbf{p}_1 \mathbf{A}_1) + \frac{\hbar}{2mc} (\sigma_1 \mathbf{H}_1) + \\ &+ \frac{1}{16m^3c^3} \left\{ 2(\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_1^2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_1) + \hbar(\sigma_1 \mathbf{H}_1) \mathbf{p}_1^2 + \hbar \mathbf{p}_1^2 (\sigma_1 \mathbf{H}_1) \right\}, \end{aligned}$$

где учтено, что $\nabla_1 \mathbf{A}_1 = 0$, $\mathbf{H}_1 = [\nabla_1 \mathbf{A}_1]$ — напряженность магнитного поля в точке \mathbf{r}' . Здесь и в дальнейшем будем использовать обычную гауссову систему единиц измерения, вводя постоянную \hbar .

Аналогичным образом преобразуем матричный элемент $\langle \bar{\Psi}_2^{(-)} \hat{A} \Psi_1^{(-)} \rangle$, используя (3.1). После необходимых преобразований найдем тот же, что и в (3.2), нерелятивистский оператор, преобразующий волновую функцию $\Phi_1^{(-)}$ в функцию $\Phi_2^{(-)}$.

Преобразуем теперь матричный элемент $\langle \Psi_{1i}^*(\mathbf{r}'') \Psi_{1i}^{(-)*}(\mathbf{r}''') B_{1i} \Psi_{1i}^{(+)}(\mathbf{r}'') \Psi_{2i}^{(-)}(\mathbf{r}''') \rangle$, входящий в первый член (2.2), с точностью до членов типа $1/c^2$. При этом преобразование кулоновского члена в операторе (2.8) будем совершать с помощью волновых функций $\varphi_n^{(\pm)}$, $\chi_n^{(\pm)}$, содержащих оператор $(1 - p^2/8m^2c^2)$. Для преобразования запаздывающих членов в (2.8) достаточно просто заменить $\varphi_n^{(+)}$, $\chi_n^{(-)}$, на $\Phi_n^{(+)}$, $\Phi_n^{(-)}$ соответственно.

Опуская громоздкие вычисления, получим следующий нерелятивистский оператор, преобразующий волновую функцию $\Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_2^{(-)}(\mathbf{r}''')$ пары частиц в волновую функцию $\Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_1^{(-)}(\mathbf{r}''')$:

$$\begin{aligned} B_{1i}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} - \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{4m^2c^2} \left(\frac{1}{2} f_{i1} - 1 \right) \frac{4}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} (\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) + \frac{1}{2} f_{i1} \frac{1}{4m^2c^2} \times \\ &\times \frac{e^2}{4\pi} \frac{4}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \mathbf{n}_{23} (\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_3) \mathbf{p}_2 + \frac{e^2}{4\pi} \frac{\hbar}{4m^2c^2} \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|^2} \left\{ \sigma_3 [\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_3] - \sigma_2 [\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_2] + \right. \\ &+ 4\sigma_3 [\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_2] \left(\frac{1}{2} f_{i1} - 1 \right) - 2\sigma_2 [\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_3] \left(\frac{1}{2} f_{i1} - 1 \right) + f_{i1} \sigma_2 [\mathbf{n}_{23} \mathbf{p}_3] \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{2m^2c^2} \frac{\hbar^2}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|^3} \left(\frac{1}{2} f_{l1} - 1 \right) \left\{ (\sigma_2 \sigma_3) - 3(\sigma_2 \mathbf{n}_{23})(\sigma_3 \mathbf{n}_{23}) \right\} + \\
 & + \pi \frac{e^2}{4\pi} \frac{\hbar^2}{m^2c^2} \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''') - \frac{e^2}{4\pi} \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \left(\frac{1}{2} f_{l1} - 1 \right) \frac{8\pi}{3} (\sigma_2 \sigma_3) \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''') , \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_{23} = (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''')/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|$. Так как оператор (3.3) содержит высшие степени величины $1/|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|$, нужно устранить расходимость, выделяя начало координат $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'''$. Интеграл по поверхности, окружающей начало координат при $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'''$ дает конечную величину. При $f_{l1} = 1$ оператор (3.3) переходит в оператор Брейта для электрона и позитрона.

Преобразование второго, третьего и четвертого членов в матрице (2.2) для мягкой моды взаимодействия электрона и позитрона дает такой же, как и (3.3), нерелятивистский оператор с соответствующей заменой индексов у операторов импульса, спина и радиус-вектора.

3.1. Жесткая мода e^+e^- -взаимодействия

Преобразуем матричный элемент $\langle \bar{\Psi}_l^{(-)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}''') | B_{5l} | \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \rangle$, входящий в пятый член (2.2), используя волновые функции (3.1).

Учитывая то, что в операторе (2.11) уже содержится множитель $1/c^2$, мы можем опустить в волновых функциях (3.1) оператор $O = 1 - p^2/8m^2c^2$. Перемножая волновые функции в искомом матричном элементе, получим, что матричный элемент от первого слагаемого в операторе (2.11) является величиной порядка $1/c^4$, т. е. находится за пределами того приближения, которое выбрано в нашем рассмотрении. Матричный элемент от второго слагаемого оператора (2.11) дает следующий оператор:

$$B_{5l}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{m^2c^2} (3 + \sigma_2 \sigma_3) \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''') , \quad (3.4)$$

совпадающий с оператором обменного взаимодействия электрона и позитрона [13].

Выражение (2.10) содержит также суммирование по промежуточным состояниям l_+ электронов с положительной энергией. Это означает, что требуется вычислить также матричные элементы типа $\langle \bar{\Psi}_l^{(+)}(\mathbf{r}'') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}''') | B_{5l} | \Psi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \rangle$. Однако в этом случае знаменатель резонансного множителя является величиной порядка $2mc^2$, и поэтому матричные элементы такого типа могут быть отброшены.

Рассмотрим теперь шестой член в матрице (2.2) и преобразуем матричный элемент $\langle \bar{\Psi}_2^{(-)}(\mathbf{r}') \bar{\Psi}_1^{(+)}(\mathbf{r}''') | B_{6l} | \Psi_l^{(+)}(\mathbf{r}') \Psi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \rangle$, используя волновые функции (3.1). Легко показать в этом случае, что оператор B_{6l} совпадает с оператором (3.4) с соответствующей заменой индексов.

3.2. Оператор эффективной энергии взаимодействия электрона и позитрона с полем виртуальных и реальных фотонов

Подставим операторы (3.4), (3.3) и $U_{NR}^{(1)}$ в матрицу (2.2). Выделим в (2.2) слагаемые с промежуточными состояниями ω_l , которые содержат знаменатели в резонансных множителях, значительно меньшие $2m^2c^2$. Обозначим эту часть матрицы (2.2) как $U_{i \rightarrow f}^{(3)}(l_+)$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned}
 U_{i \rightarrow f}^{(3)} \left(\begin{matrix} l_+ \\ l_- \end{matrix} \right) = & \frac{1}{\hbar} a_2^+ b_2^+ b_1 a_1 \left\{ - \sum_{l_+} \frac{\langle \Phi_2^{(+)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}') | \Phi_1^{(+)} \rangle \langle \Phi_1^{(+)} \Phi_1^{(-)} | B_{1l}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_2^{(+)}} - \right. \\
 & - \sum_{l_+} \frac{\langle \Phi_2^{(+)} \Phi_1^{(-)} | B_{2l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle \langle \Phi_1^{(+)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}'') | \Phi_1^{(+)} \rangle}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_1^{(+)}} - \\
 & - \sum_{l_-} \frac{\langle \Phi_1^{(-)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}'') | \Phi_1^{(-)} \rangle \langle \Phi_2^{(+)} \Phi_1^{(-)} | B_{3l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_1^{(-)}} - \\
 & - \sum_{l_-} \frac{\langle \Phi_2^{(+)} \Phi_1^{(-)} | B_{4l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') | \Phi_1^{(+)} \Phi_1^{(-)} \rangle \langle \Phi_1^{(-)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}''') | \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_2^{(-)}} + \\
 & + \sum_{l_-} \frac{\langle \Phi_2^{(-)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}') | \Phi_1^{(-)} \rangle \langle \Phi_1^{(-)} \Phi_1^{(+)} | B_{5l}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_2^{(-)}} + \\
 & + \sum_{l_+} \frac{\langle \Phi_2^{(-)} \Phi_1^{(+)} | B_{6l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle \langle \Phi_1^{(+)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}'') | \Phi_1^{(+)} \rangle}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_1^{(+)}} + \\
 & + \sum_{l_+} \frac{\langle \Phi_1^{(+)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}'') | \Phi_1^{(+)} \rangle \langle \Phi_2^{(-)} \Phi_1^{(+)} | B_{7l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''') | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_1^{(+)}} + \\
 & + \left. \sum_{l_-} \frac{\langle \Phi_2^{(-)} \Phi_1^{(+)} | B_{8l}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') | \Phi_1^{(+)} \Phi_1^{(-)} \rangle \langle \Phi_1^{(-)} | U_{NR}^{(1)}(\mathbf{r}''') | \Phi_2^{(-)} \rangle}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_2^{(-)}} \right\}. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно выделить в матрице (2.2) члены с промежуточными слагаемыми, которые соответствуют знаменателям в резонансных множителях порядка $2mc^2$. Эта часть матрицы (2.2) может быть обозначена как $U_{i \rightarrow f}^{(3)} \left(\begin{matrix} l_+ \\ l_- \end{matrix} \right)$ и записана в явном виде с использованием оператора $U_{soft}^{(3)}$ (2.12).

Пусть $\Phi_{pr}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \Phi_p^\alpha(\mathbf{r}') \Phi_r^\beta(\mathbf{r}'')$ — волновая функция системы из электрона и позитрона, представляющая собой простое произведение волновых функций отдельных частиц в состояниях $p, r = 1, 2$ ($\alpha, \beta = +, -$). Тогда матрица (3.5) может быть представлена как совокупность слагаемых типа

$$\langle \Phi_{pr}^{\alpha\beta} | U_{NR}^{(1)} | \Delta \Phi_{nm}^{\alpha\beta} \rangle + \langle \Delta \Phi_{pr}^{\alpha\beta} | U_{NR}^{(1)} | \Phi_{nm}^{\alpha\beta} \rangle, \tag{3.6}$$

где $\Delta \Phi_{nm}^{\alpha\beta}$, $\Delta \Phi_{pr}^{\alpha\beta}$ — поправки к невозмущенным функциям $\Phi_{nm}^{\alpha\beta}$ и $\Phi_{pr}^{\alpha\beta}$. Далее учтем, что величины матричных элементов вида $\langle \Delta \Phi_{pr}^{\alpha\beta} | U_{NR}^{(1)} | \Delta \Phi_{pr}^{\alpha\beta} \rangle$ значительно меньше матричных элементов (3.6). Тогда вместо матричных элементов (3.6) имеем

$$\langle \Phi_{pr}^{\alpha\beta} + \Delta \Phi_{pr}^{\alpha\beta} | U_{NR}^{(1)} | \Phi_{nm}^{\alpha\beta} + \Delta \Phi_{nm}^{\alpha\beta} \rangle, \tag{3.7}$$

где формально наряду с эффектами третьего порядка включены также эффекты первого порядка типа $\langle \Phi_{pr}^{\alpha\beta} | U_{NR}^{(1)} | \Phi_{pr}^{\alpha\beta} \rangle$. Фактически введение матричных элементов (3.7) можно интерпретировать следующим образом. Процесс излучения (поглощения) реального фотона системой из электрона и позитрона, взаимодействующих друг с другом через поле виртуальных фотонов, можно описать как эффект первого порядка, если рассматривать электрон и позитрон как единую динамическую систему. Это означает, что вместо волновых функций $\Phi_{pr}^{\alpha\beta}$ можно ввести волновые функции атома позитрония.

При этом в зависимости от выбора слагаемых в операторах $B_{s,l}$ мы можем учесть как орбитальные, так и спиновые степени свободы электрона и позитрона. Более того, в зависимости от выбора слагаемых в операторе $U_{NR}^{(1)}$ можно рассматривать различные типы квантовых переходов в атоме позитрония.

В задаче о взаимодействии двух электронов, принадлежащих двум водородоподобным атомам, на произвольном расстоянии друг от друга [3, 4] для введения понятия поляризующих полей были также выделены матричные элементы типа (3.7). При этом эффекты первого порядка приводили к изменению квантового состояния одного из электронов, что эквивалентно учету внешнего поля в месте расположения этого электрона. Эффекты третьего порядка, не вызывая квантовых переходов в спектре другого электрона, формировали поляризующее поле (электронное и позитронное в зависимости от типа промежуточных состояний), обусловленное обменом виртуальными фотонами. Таким образом, поляризующее поле в задаче [3, 4] не является полем реальных фотонов и рассматривается как добавка к внешнему полю, действующему на отдельные электроны. Явный вид поляризующих полей в этой задаче зависит от типа квантовых переходов (электродипольных, магнитных и т. д.) в спектре взаимодействующих электронов и соответствует одноэлектронным переходам. В [20] рассмотрены двухэлектронные переходы, когда происходит излучение или поглощение реального фотона с удвоенной энергией. В соответствии с законом сохранения энергии излучение или поглощение фотона удвоенной энергии невозможно одним из атомных электронов, поэтому эффекты первого порядка в матричных элементах типа (3.7) запрещены, и такой процесс является двухчастичным, т. е. описывается как эффект третьего порядка квантовой электродинамики. Аналогичная ситуация имеет место и в системе электрон-позитрон в атоме позитрония. Процесс излучения и поглощения реального фотона является двухчастичным и рассматривается как эффект третьего порядка с матрицей (3.5).

С другой стороны, в нерелятивистской теории квантовых переходов могут быть использованы одночастичные волновые функции атома позитрония, если рассматривать его в системе центра инерции и вводить относительные координаты и импульс. Тонкая структура атома позитрония описывается с помощью соответствующих операторов электрон-позитронного взаимодействия, путем перехода к операторам суммарного спина и орбитального момента [13]. Квантовые переходы в такой системе описываются как эффекты первого порядка теории возмущений [10]. Такой способ описания квантовых переходов в спектре атома позитрония можно рассматривать как эквивалент способу, основанному на применении матрицы (3.5) с двухчастичными волновыми функциями атома позитрония, если речь идет, например, только о вычислении вероятности квантовых переходов между двумя какими-либо состояниями атома позитрония. Ситуация существенно меняется, если требуется детальное описание кинетики квантовых переходов, например, как в задаче [12], где рассматривается аннигиляционный распад атома позитрония из двух состояний, между которыми возможны спонтанные и вынужденные оптические переходы. Описание такого процесса требует применения соответствующих коммутационных соотношений для фермионных и бозонных операторов, а также представления о двухчастичных волновых функциях атома позитрония. Применение одночастичных волновых функций потребовало бы введения паулионных соотношений коммутации. Такой переход к другой статистике скрывает физическую сущность рассматриваемого процесса. Таким образом, введение двухчастичных волновых функций позитрония, а следовательно, понятия поляризующих полей, является конструктивным при описании самосогласованного взаимодействия атома позитрония с полем собствен-

ных и внешних фотонов, при описании процессов постепенного формирования поля фотонов внутри атома и т. д. При этом явный вид поляризуемого поля, действующего на электрон или позитрон в атоме позитрония, определяется из матрицы (3.5) после подстановки в эту матрицу соответствующих слагаемых оператора $U_{NR}^{(1)}$ (3.2).

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДИПОЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В АТОМЕ ПОЗИТРОНИЯ

Рассмотрим электрические дипольные переходы между некоторыми состояниями 1 и 2 (например, $1S$ и $2P$) атома позитрония при следующих условиях.

1) Промежуточные состояния l_{\pm} выбраны таким образом, что разность энергий $\hbar(\omega_l \pm \omega \mp \omega_k^{\pm})$ в матрице (2.2) значительно меньше $2mc^2$ ($k = 1, 2$). Такие промежуточные состояния с положительной или отрицательной частотой будем рассматривать как квазирезонансные состояния.

2) В операторах B_{sl} оставим лишь те члены, которые не содержат скорости света, т. е. нерелятивистские члены. Как показано выше, такие члены возникают только в мягкой моде e^+e^- -взаимодействия. Именно при этих условиях электрические дипольные переходы должны иметь наибольшую эффективную энергию взаимодействия и, следовательно, вероятность в единицу времени квантового перехода с излучением (поглощением) оптического фотона.

Наличие электрических дипольных переходов в атоме позитрония будет определяться следующей отличной от нуля величиной:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{k}) = & -\frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R \omega}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} \frac{e^2}{4\pi\hbar} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \times \\
 & \times \sum_{l_{\pm}} \left\{ \frac{-1}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_2^{(+)}} \Phi_2^{(+)*}(\mathbf{r}') (\mathbf{p}_1 \mathbf{e}) \Phi_l^{(+)}(\mathbf{r}') \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') \Phi_1^{(-)*}(\mathbf{r}''') \times \right. \\
 & \times \frac{1}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|} \Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') \Phi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \frac{1}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_1^{(+)}} \Phi_2^{(+)*}(\mathbf{r}') \Phi_1^{(-)*}(\mathbf{r}''') \times \\
 & \times \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|} \Phi_l^{(+)}(\mathbf{r}') \Phi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \Phi_l^{(+)*}(\mathbf{r}'') (\mathbf{p}_2 \mathbf{e}) \Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}'') - \frac{1}{\omega_l(1-i0) + \omega - \omega_1^{(-)}} \times \\
 & \times \Phi_1^{(-)*}(\mathbf{r}'') (\mathbf{p}_2 \mathbf{e}) \Phi_l^{(-)}(\mathbf{r}'') \Phi_2^{(+)*}(\mathbf{r}') \Phi_l^{(-)*}(\mathbf{r}''') \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|} \Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \Phi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') - \\
 & - \frac{1}{\omega_l(1-i0) - \omega - \omega_2^{(-)}} \Phi_2^{(+)*}(\mathbf{r}') \Phi_1^{(-)*}(\mathbf{r}'') \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''|} \times \\
 & \left. \times \Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}') \Phi_l^{(-)}(\mathbf{r}'') \Phi_l^{(-)*}(\mathbf{r}''') (\mathbf{p}_3 \mathbf{e}) \Phi_2^{(-)}(\mathbf{r}''') \right\}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

где V_R — объем квантования электромагнитного поля, \mathbf{k} — волновой вектор оптического фотона, \mathbf{a} — радиус-вектор местоположения атома позитрония, \mathbf{e} — единичный вектор поляризации оптического фотона.

Для вычисления величины $G(\mathbf{k})$, а также вероятности в единицу времени излучения или поглощения фотона частоты ω необходимо знать волновые функции электрона и позитрона и соответствующие значения энергии частиц в атоме позитрония.

4.1. Стационарные состояния электрона и позитрона в атоме позитрония

Операторы (3.3), (3.4) можно применить к задаче о позитронии как связанной системе электрон–позитрон. При этом нерелятивистские члены этих операторов определяют невозмущенный оператор Гамильтона, а релятивистские члены с точностью до $1/c^2$ — тонкую структуру атома позитрония. Невозмущенная задача приводится к задаче об атоме водорода в нерелятивистской квантовой механике, если воспользоваться системой координат, в которой центр инерции позитрония покоится. Тогда невозмущенное уравнение Шредингера совпадает с уравнением движения электрона в атоме водорода, если в нем заменить массу электрона на приведенную массу $m/2$. Поэтому значения энергии атома позитрония вдвое меньше по абсолютной величине соответствующих энергий атома водорода, а радиусы орбит — вдвое больше [13].

В отличие от традиционного подхода [13], найдем отдельно волновые функции электрона и позитрона в атоме позитрония, а также набор квантовых чисел этих частиц. Запишем невозмущенный оператор Гамильтона атома позитрония в следующем виде:

$$H = H_{01} + H_{02} ,$$

$$H_{01} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_1^2 - \frac{e^2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} , \quad H_{02} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_2^2 - \frac{e^2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} , \quad (4.2)$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1$ — радиус-вектор и оператор импульса электрона, а $\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2$ — то же для позитрона.

Вычислим коммутатор $[H_{01}, H_{02}]$. Для этого необходимо использовать следующие коммутаторы:

$$\left[\mathbf{p}_1^2, \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right] = 2i\hbar \frac{(\mathbf{n}_{12}\mathbf{p}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} , \quad \left[\mathbf{p}_2^2, \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right] = -2i\hbar \frac{(\mathbf{n}_{12}\mathbf{p}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} , \quad (4.3)$$

где $\mathbf{n}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Учитывая, что $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ в атоме позитрония, получим, что $[H_{01}, H_{02}] = 0$. Это означает, что мы можем ввести интегралы движения l_1^2, l_{1z}, H_{01} для электрона и l_2^2, l_{2z}, H_{02} для позитрона с соответствующим набором квантовых чисел l_1, m_{1z}, n_1 и l_2, m_{2z}, n_2 . Следуя [21], для движения частицы в поле центральной симметрии найдем волновые функции и значения энергии электрона:

$$\Phi_{n_1 l_1 m_1}^{(+)} = R_{n_1 l_1}(r) Y_{l_1 m_1}(\Theta, \varphi) , \quad E_{n_1} = -\frac{1}{2n_1^2} \frac{me^4}{4\hbar^2} , \quad (4.4)$$

где $n_1 \geq l_1 + 1$ — главное квантовое число, l_1 — орбитальное квантовое число, m_1 — магнитное квантовое число электрона. Радиальные волновые функции определяются с помощью полиномов Лагерра [21] и указывают на то, что радиусы орбит электрона в атоме позитрония вдвое больше орбит электрона в атоме водорода. Значения энергии E_{n_1} электрона в четыре раза меньше энергии атома водорода. Аналогичные результаты получим и для позитрона в атоме позитрония.

Энергия атома позитрония, согласно [13], определяется следующей формулой:

$$E_n = -\frac{1}{4} \frac{me^4}{n^2 \hbar^2} , \quad (4.5)$$

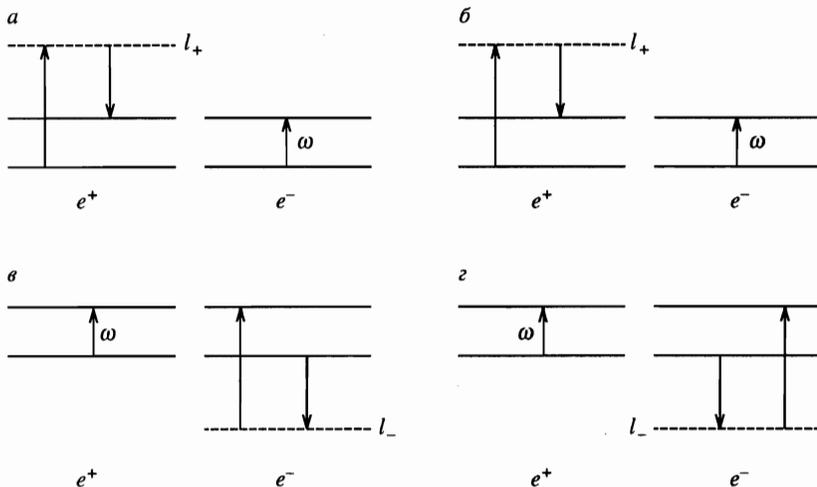


Рис. 2. Схемы квантовых переходов в атоме позитрония при поглощении реального фотона

где n — главное квантовое число позитрония. Сравнивая (4.5) с (4.4), получим, что $n_1 = n_2 = 1$ при $n = 1$, $n_1 = n_2 = 2$ при $n = 2$ и т. д. Орбитальные L и магнитные M квантовые числа атома позитрония могут быть выражены через квантовые числа l_1, m_1 и l_2, m_2 , при рассмотрении задачи сложения моментов l_1 и l_2 электрона и позитрона [21]. При этом имеем $M = m_1 + m_2$,

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|. \tag{4.6}$$

Это означает, что в атоме позитрония главные квантовые числа позитрония, электрона и позитрона совпадают, а орбитальные и магнитные квантовые числа могут быть различными. Так, в состоянии $1S$ атома позитрония имеем:

$$n = n_1 = n_2 = 1, \quad m_1 = m_2 = 0, \quad L = 0, \quad l_1 = l_2 = 0.$$

В состоянии $2P$:

$$n_1 = n_2 = n = 2, \quad L = 1, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \pm 1$$

или

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_1 = 0, \pm 1.$$

Волновые функции позитрония выражаются в виде суперпозиции простых произведений волновых функций электрона и позитрона с соответствующими коэффициентами Клебша–Гордана [20].

4.2. Поляризуемые поля в атоме позитрония

На рис. 2 представлены различные схемы квантовых переходов, соответствующих каждому слагаемому в (4.1). Рассмотрим первую схему поглощения оптического фотона. В соответствии с разложением общего решения уравнения Дирака (2.2а) имеем для этой схемы начальное состояние электрона и позитрона с волновой функцией

$\Phi_1^{(+)}(\mathbf{r}'')\Phi_1^{(-)*}(\mathbf{r}''')$ и энергиями $2E_1$, где E_1 определяется формулой (4.1). В результате взаимодействия электрона и позитрона через поле виртуальных фотонов электрон оказывается в промежуточном состоянии l_+ с положительной энергией, а позитрон в состоянии 2. Затем в результате поглощения реального фотона электрон из состояния l_+ переходит в состояние 2. Вторая схема поглощения оптического фотона рис. 2б отличается от первой. Действительно, вначале происходит переход электрона из состояния 1 в состояние l_+ под действием реального фотона частоты ω . Затем в результате e^+e^- -взаимодействия через поле виртуальных фотонов электрон и позитрон переходят в состояние 2. Схемы квантовых переходов рис. 2в, г аналогичны рассмотренным, однако они протекают с участием промежуточных состояний с отрицательной энергией $\hbar\omega_{l-}$.

Используя выражение (4.1), запишем в явном виде формулы для векторных потенциалов полей в месте расположения электрона и позитрона с радиус-векторами r_1 и r_2 соответственно. При этом учтем многомодовый характер взаимодействия частиц, введя векторы поляризации $\mathbf{e}_{k\lambda}$, частоты ω_k и волновые векторы \mathbf{k} различных фотонов, участвующих в наведении поляризующих полей ($\lambda = 1, 2$ индексы поляризации фотонов). Для этого представим взаимодействие электрона с поляризующим полем $\mathbf{A}_e(\mathbf{r}_1, t)$ с помощью оператора $U_{NR1}^{(1)} = -(e/mc)\mathbf{p}_1\mathbf{A}_e$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}_1, t) = & \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R\omega_k}} e^{-i\omega_k t} \mathbf{e}_{k\lambda} c_{k\lambda} \lambda e^{i\mathbf{k}r_1} \frac{1}{\langle \Phi_2^{(+)} | \mathbf{p}_1 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_1^{(+)} \rangle} \times \\ & \times \sum_{l_+} \left\{ \frac{-1}{\hbar [\omega_l(1-i0) + \omega_k - \omega_2^{(+)}]} \langle \Phi_2^{(+)} | \mathbf{p}_1 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_{l_+}^{(+)} \rangle \langle \Phi_{l_+}^{(+)} \Phi_1^{(-)} | \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\hbar [\omega_l(1-i0) - \omega_k - \omega_1^{(+)}]} \langle \Phi_2^{(+)} \Phi_1^{(-)} | \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} | \Phi_{l_+}^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle \langle \Phi_{l_+}^{(+)} | \mathbf{p}_2 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_1^{(+)} \rangle \right\}. \quad (4.1a) \end{aligned}$$

Аналогичным образом представим векторный потенциал $\mathbf{A}_p(\mathbf{r}_2, t)$ поляризующего поля, действующего на позитрон в атоме позитрония, введя оператор $U_{NR2}^{(1)} = -(e/mc)\mathbf{p}_2\mathbf{A}_p$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e(\mathbf{r}_2, t) = & \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V_R\omega_k}} e^{-i\omega_k t} \mathbf{e}_{k\lambda} c_{k\lambda} \lambda e^{i\mathbf{k}r_2} \frac{1}{\langle \Phi_2^{(-)} | \mathbf{p}_2 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_1^{(-)} \rangle} \times \\ & \times \sum_{l_+} \left\{ \frac{-1}{\hbar [\omega_l(1-i0) + \omega_k - \omega_1^{(-)}]} \langle \Phi_1^{(-)} | \mathbf{p}_2 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_{l_+}^{(-)} \rangle \langle \Phi_2^{(+)} \Phi_{l_+}^{(-)} | \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} | \Phi_1^{(+)} \Phi_2^{(-)} \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\hbar [\omega_l(1-i0) - \omega_k - \omega_1^{(-)}]} \langle \Phi_2^{(+)} \Phi_{l_+}^{(-)} | \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} | \Phi_1^{(+)} \Phi_{l_+}^{(-)} \rangle \langle \Phi_{l_+}^{(-)} | \mathbf{p}_2 \mathbf{e}_{k\lambda} | \Phi_2^{(-)} \rangle \right\}. \quad (4.1б) \end{aligned}$$

Очевидно, что поляризующие поля возникают и при излучении оптических фотонов. В этом случае в формулах (4.1а), (4.1б) следует заменить ω_k на $-\omega_k$, \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$ и оператор $c_{k\lambda}$ на оператор $c_{k\lambda}^+$ рождения фотона моды $k\lambda$, а также заменить индексы $1 \leftrightarrow 2$ состояний электрона и позитрона.

Формулы (4.1а), (4.1б) позволяют исследовать пространственно-временное поведение полей внутри атома позитрония в зависимости от выбора состояний 1 и 2 электрона и позитрона, включая ридберговские состояния. Число фотонных мод, участвующих в формировании полей, определяется законом сохранения энергии (2.3). Однако следует отметить, что на ранних стадиях формирования поля закон сохранения не имеет δ -образный характер, поэтому число фотонных мод может быть значительно увеличено. Детальный анализ полей (4.1а), (4.1б) в зависимости от координат и времени требует отдельного исследования.

4.3. Вероятность в единицу времени спонтанного излучения фотона

Применим формулу (4.1) для спонтанного излучения одного реального фотона. Для этого сделаем в формуле (4.1) следующие преобразования: $\omega \rightarrow -\omega$ и замена индексов $1 \leftrightarrow 2$. В соответствии с законом сохранения (2.3) имеем для перехода $2P \rightarrow 1S$:

$$\hbar\omega = \frac{3}{16} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (4.7)$$

Длина волны, соответствующая этому переходу, равна $\lambda = 2465 \text{ \AA}$. Время жизни состояния $2P$ атома позитрония, согласно [9], равно $\tau = 3.2 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Действительно, применяя для вычисления времени жизни τ одночастичные волновые функции атома позитрония [10] и значения энергии (4.5), легко получить этот результат. Соответственно, вероятность в единицу времени излучения спонтанных фотонов для рассматриваемого перехода равна $W = \tau^{-1} = 0,3125 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

Применим двухчастичные волновые функции позитрония (см. разд. 4.1) для вычисления величины $G(\mathbf{k})$ и вероятности W . Как видно из (4.1), для этого необходимо вычислить матричные элементы оператора импульса электрона или позитрона и матричные элементы оператора кулоновского взаимодействия электрона и позитрона, учитывая различные промежуточные состояния l_{\pm} . Для этого удобно воспользоваться разложением оператора кулоновского взаимодействия в матричных элементах через сферические функции $Y_{kq}(\Theta_1, \varphi_1)$ и $Y_{kq}(\Theta_2, \varphi_2)$ [21]:

$$\frac{e^2}{r_{12}} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} \sum_q Y_{kq}(\Theta_1, \varphi_1) Y_{kq}^*(\Theta_2, \varphi_2), \quad (4.8)$$

где $\Theta_1, \varphi_1, \Theta_2, \varphi_2$ — угловые переменные электрона и позитрона, через $r_{<}$ и $r_{>}$ обозначены меньший и больший из модулей векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Следуя методу вычисления матричных элементов в атомной спектроскопии [21], получим, что расчет вероятности W оптического перехода на основе формулы (4.1) с применением двухчастичных волновых функций дает тот же результат, что и в [9, 10].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной статье дано детальное обоснование физического смысла постоянной взаимодействия $G(\mathbf{k})$ в эффективном гамильтониане (2.1). Для электрических дипольных переходов получена формула (4.1), в которой учтены различные типы e^+e^- -взаимодействия в поле оптических и аннигиляционных фотонов. Для других типов квантовых переходов с учетом релятивистских членов в операторе B_{sl} формула (4.1) может быть легко обобщена на основе матрицы (2.2) и последующего рассмотрения.

В данной статье решена задача о взаимодействии электрона с позитроном, сопровождающемся излучением или поглощением мягкого фотона. Такое взаимодействие рассматривается как эффект третьего порядка квантовой электродинамики с диаграммами рис. 1. Выделим основные свойства этого взаимодействия.

Составной частью диаграмм рис. 1 является обмен виртуальными мягкими и жесткими фотонами. В соответствии с этим можно выделить мягкую и жесткую моды e^+e^- -взаимодействия, которые описываются операторами B_{sl} . Если излучение (поглощение) реального фотона отсутствует, то e^+e^- -взаимодействие является эффектом второго порядка квантовой электродинамики. В этом случае в операторах B_{sl} исчезает зависимость от промежуточных состояний $\omega_{l\pm}$ и мягкая мода взаимодействия соответствует оператору $B_1 \equiv U^{(2)}$, где $U^{(2)}$ — оператор Брейта. Жесткая мода взаимодействия будет описываться оператором B_5 (3.4).

При учете излучения (поглощения) реального фотона в диаграммах рис. 1 обмен виртуальными фотонами приводит к возникновению промежуточных состояний, переход в которые не сопровождается законом сохранения энергии. В результате в обобщенных операторах B_{sl} возникает зависимость от частот $\omega_{l\pm}$ промежуточных состояний.

В атоме позитрония благодаря равенству масс электрона и позитрона удастся получить двухчастичные волновые функции атома позитрония. Это позволяет ввести понятие поляризующих полей внутри атома позитрония. Мы предполагаем, что понятие поляризующих полей является важным в прецизионной оптической и радиоспектроскопии атома позитрония, а также в квантовой позитронике.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Литература

1. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
2. О. Н. Гадомский, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, *ЖЭТФ* **63**, 813 (1972).
3. О. Н. Гадомский, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, *ЖЭТФ* **70**, 435 (1976).
4. О. Н. Гадомский, Р. А. Власов, *Оптическая эхо-спектроскопия поверхности*, Наука и Техника, Минск (1990).
5. O. N. Gadomsky and K. V. Krutitsky, *Quantum and Semiclassical Optics. J. of the Europ. Opt. Soc. B* **9**, 343 (1997).
6. О. Н. Гадомский, К. В. Крутицкий, *ЖЭТФ* **106**, 936 (1994).
7. O. N. Gadomsky and K. V. Krutitsky, *JOSA B* **13**, 1679 (1996).
8. G. W. F. Drake, *Phys. Rev.* **5**, 1979 (1972).
9. K. P. Ziock, C. D. Dermer, R. H. Howell, and F. Magnotta, *Preprint UCRL-100160* (1989).
10. C. D. Dermer and J. C. Weisheit, *Phys. Rev. A* **40**, 5526 (1989).
11. A. Rich, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 127 (1981).
12. О. Н. Гадомский, *ЖЭТФ* **110**, 1228 (1996).
13. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Физматгиз, Москва (1959).
14. Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **18**, 562 (1948).
15. Б. Н. Федюшин, *ЖЭТФ* **22**, 140 (1952).
16. Г. М. Гарибян, *ЖЭТФ* **24**, 617 (1953).
17. J. Pirenne, *Arch. Sci. Phys. Nat.* **29**, 207 (1947).
18. В. Б. Берестецкий, Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **19**, 673 (1949).
19. C. S. Chang and P. Stehle, *Phys. Rev.* **4**, 630 (1971).
20. О. Н. Гадомский, *ТМФ* **106**, 145 (1996).
21. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Физматгиз, Москва (1963).