*ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 2, стр. 513–520* 

# О САМОВОЗДЕЙСТВИИ ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОМ ВАКУУМЕ

*Н. Н. Розанов*

*Научно-исследовательский институт лазерной физики*
*Научный центр «Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова»*
*199034, Санкт-Петербург, Россия*
*Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики*
*197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 12 марта 1997 г.

Проведен анализ эффектов самовоздействия интенсивного когерентного электромагнитного излучения в электрон-позитронном вакууме, находящемся в однородных статических электрическом и магнитном полях. Для учета дисперсии вакуума используется модификация теории Гейзенберга–Эйлера с включением в лагранжиан членов с производными от поля. Нефизическая ветвь решений дисперсионного уравнения исключается переходом к квазиоптическому уравнению для медленно меняющейся огибающей поля, которое описывает распространение излучения с учетом дифракции, пространственно-временной дисперсии и нелинейности вакуума. Продемонстрировано существование «темных» (с провалом интенсивности) солитонов излучения в вакууме. Показано наличие самофокусировки излучения и определена критическая мощность самофокусировки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект поляризации вакуума в сильных электромагнитных полях нарушает линейность уравнений Максвелла [1], что отвечает разнообразным нелинейно-оптическим явлениям, которые могут наблюдаться как в астрофизических исследованиях [2–6], так и в лабораторных экспериментах с использованием мощных лазерных установок [7–9]. Теория Гейзенберга–Эйлера этого эффекта приводит к уравнениям Максвелла, совпадающим по форме с уравнениями нелинейной электродинамики сплошных сред в отсутствие дисперсии [1]. Тем самым вакуум уподобляется прозрачной среде с нерезонансной слабой нелинейностью. Более точно, дисперсия слаба вдали от резонанса для излучения с характерными частотами $\omega \ll \omega_c$, где $\omega_c = mc^2/2\hbar$, $m$ — масса электрона, $c$ — скорость света. Отвечающее рождению электрон-позитронных пар поглощение излучения в вакууме экспоненциально мало для полей с докритическими напряженностями, $E \ll E_c = m^2c^3/e\hbar$, где $e$ — заряд электрона.

Вместе с тем локально слабые эффекты нелинейности и дисперсии могут накапливаться на длине трассы распространения излучения, что и обосновывает важность их учета. Для включения в рассмотрение даже слабой дисперсии необходим выход за рамки теории Гейзенберга–Эйлера, развитой для статических однородных полей. Это возможно сделать при дополнении лагранжиана членами, содержащими производные от поля [10, 11]. При этом, однако, нетрудно убедиться (см. [12] и обсуждение уравнений (6)–(10) ниже), что уже в случае слабого поля в дисперсионном соотношении возникают новые нефизические ветви. Задача настоящей работы состоит в выводе и анализе лишенного таких трудностей квазиоптического уравнения для огибающей поля (приближение медленно меняющихся амплитуд). Последнее уравнение как раз и учитывает эффекты слабой нелинейности и дисперсии вакуума, что позволяет корректно описывать широкий круг таких нелинейно-оптических явлений как самофокусировка, солитоны, стабилизация ударных волн и т. д. Дисперсионное расплывание в вакууме импульсов слабого излучения кратко рассматривалось в [12]. Насколько нам известно, эффекты самовоздействия в диспергирующем вакууме в литературе ранее не анализировались.

## 2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Далее используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$, постоянная Планка $\hbar = 1$, а квадрат заряда электрона $e$ дает постоянную тонкой структуры $e^2 = 1/137$. Исходным служит лагранжиан электромагнитного поля вида

$$L = L_0 + L_{HE} + L'. \tag{1}$$

Здесь $L_0 = -(1/16\pi)F_{ik}F^{ik}$ — лагранжиан классического электромагнитного поля, квадратичный по тензору электромагнитного поля $F_{ik}$ [13] (используется вещественная форма этого тензора); $L_{HE}$ — поляризационная поправка в рамках теории Гейзенберга–Эйлера, содержащая более высокие степени тензора $F_{ik}$ [1], и $L'$ — найденная в работе [10] поляризационная поправка, включающая производные от тензора электромагнитного поля. В низшем по степеням поля и производным приближении

$$L_{HE}^{(4)} = \frac{e^4}{360\pi^2 m^4}(4F^2 + 7G^2), \tag{2}$$

$$L' = g[-(\partial_i F_k^i)(\partial_n F^{nk}) + F_{ik} \,\Box\, F^{ik}], \tag{3}$$

$g = e^2/360\pi m^2$, $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ — оператор Даламбера, $\Delta$ — оператор Лапласа, $F$ и $G$ обозначают инварианты поля:

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad G = \mathbf{EB}, \tag{4}$$

$\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженности электрического и магнитного полей. Условия применимости такой формы лагранжиана имеют вид

$$\omega \ll m, \quad k \ll m, \quad E \ll E_c, \tag{5}$$

где $\omega$ и $k$ — характерные частота и волновое число излучения, $E_c = m^2/e$ — критическая напряженность рождения электрон-позитронных пар.

Первая пара уравнений Максвелла выражает связь напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей с потенциалами и потому сохраняет вид

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t. \tag{6}$$

Вторая пара уравнений Максвелла находится варьированием действия с лагранжианом (1) и также записывается в прежней форме:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \tag{8}$$

а $\mathbf{P} = \partial(L_{HE} + L')/\partial\mathbf{E}$ и $\mathbf{M} = \partial(L_{HE} + L')/\partial\mathbf{H}$ — векторы электрической и магнитной поляризации. Однако теперь эти величины нелокально связаны с напряженностями полей (в отличие от теории Гейзенберга–Эйлера, в рамках которой дисперсия отсутствует, см. [1]). В низшем приближении по дисперсии и нелинейности имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HE}^{(3)} - 6g \,\square\, \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{HE}^{(3)} + 6g \,\square\, \mathbf{B}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_{HE}^{(3)} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4}(-4F\mathbf{E} + 7G\mathbf{B}), \quad \mathbf{M}_{HE}^{(3)} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4}(4F\mathbf{B} + 7G\mathbf{E}). \tag{10}$$

Уравнения Максвелла (6), (7) вместе с «материальными уравнениями» (8)–(10) составляют замкнутую систему уравнений, описывающую нелинейные и дисперсионные эффекты при распространении электромагнитного излучения в электрон-позитронном вакууме при выполнении условий (5). Заметим, что в соответствии с (9) дисперсия является и пространственной, и временной, характеризуясь одной и той же постоянной $g$. В связи с первыми двумя условиями (5) дисперсия должна быть слабой. Игнорирование этого требования вело бы к следующему затруднению. В пределе весьма слабых полей, $E \ll (\omega/m)E_c$, можно было бы пренебречь в выражении (9) для поляризации нелинейными по полю членами, $P_{HE}^{(3)}, H_{HE}^{(3)} \to 0$, сохранив дисперсионные члены. В соответствующем волновом уравнении в дополнение к обычной ветви $k^2 = \omega^2$ появилась бы новая ветвь дисперсионной кривой, не имеющая физического смысла. Этой ветви отвечают резкие пространственно-временные изменения поля, не удовлетворяющие условиям (5).

Как и в теории Гейзенберга–Эйлера, плоская волна остается решением приведенных уравнений, т. е. поляризация вакуума плоской волной отсутствует. Хотя формально дополнительные («дисперсионные») члены в (9) линейны по полю, они исчезают для слабых полей, удовлетворяющих обычному дисперсионному соотношению. Дисперсия вакуума проявляется при нарушении классического дисперсионного соотношения $k^2 = \omega^2$. Этого можно добиться различными способами: за счет нелинейности при взаимодействии нескольких плоских волн (скрещенные пучки излучения) [7–9], при наличии разреженного вещества (плазмы) [14] и т. д. Далее будет рассмотрен наиболее простой вариант распространения электромагнитного излучения на фоне достаточно сильных статических однородных электрического и магнитного полей, нарушающих указанное дисперсионное соотношение.

## 3. СЛАБОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА ФОНЕ СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Представим поле в виде наложения статических электрического и магнитного полей (индекс 0) и пучка/импульса сравнительно высокочастотного электромагнитного излучения (величины со штрихом):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \tag{11}$$

В данном разделе будем считать высокочастотное излучение слабым, пренебрегая в выражении для поляризации нелинейными по $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ членами:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'. \tag{12}$$

Слабое излучение может быть представлено суперпозицией плоских волн с пространственно-временной зависимостью вида

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] \tag{13}$$

и аналогичных соотношений для $\mathbf{B}'$, $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{H}'$. Для отдельной плоской волны, характеризуемой волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой $\omega$, уравнения Максвелла сводятся к соотношениям

$$[\mathbf{kE}'] = \omega \mathbf{B}', \quad [\mathbf{kH}'] = -\omega \mathbf{D}'. \tag{14}$$

Материальные уравнения, выражающие $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{H}'$ через $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$, получаются линеаризацией по $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ выражений (9), (10). С их помощью нетрудно найти дисперсионные соотношения между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой $\omega$. Внешние статические поля приводят к анизотропии вакуума, что делает общие соотношения громоздкими. Поэтому рассмотрим сначала примыкающий к кристаллооптике одноосных кристаллов случай наличия только одного из статических полей — магнитного ($\mathbf{E}_0 = 0$). Тогда материальные уравнения примут вид

$$\mathbf{D}' = (1 - \beta)\mathbf{E}' + 7\gamma(\mathbf{E}'\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{H}' = (1 - \beta)\mathbf{B}' - 4\gamma(\mathbf{B}'\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0, \tag{15}$$

где

$$\beta = 2\gamma + 24\pi g(k^2 - \omega^2), \quad \gamma = e^4/45\pi m^4. \tag{16}$$

Это отвечает тензорам диэлектрической и магнитной проницаемости вакуума

$$D'_i = \epsilon_{ik} E'_k, \quad H'_i = \mu_{ik} B'_k \tag{17}$$

вида

$$\epsilon_{ik} = 1 - \beta + 7\gamma B_{0i} B_{0k}, \quad \mu_{ik} = 1 - \beta - 4\gamma B_{0i} B_{0k}. \tag{18}$$

Пространственно-временная дисперсия выражается в зависимости $\beta$ от частоты $\omega$ и от волнового числа $k$. В пренебрежении этой зависимостью результат совпадает с приведенным в [1] (при исправлении опечатки в формуле (130,4) [1]). Соответственно, анизотропия и дисперсия вакуума во внешнем поле отсутствуют, если $\mathbf{B}'\mathbf{B}_0 = 0$ и одновременно либо $\mathbf{E}'\mathbf{B}_0 = 0$, либо $[\mathbf{kB}_0] = 0$. В остальных случаях имеются анизотропия и дисперсия вакуума. Их удобно описывать, выбрав в качестве двух независимых поляризаций излучения линейные поляризации, при которых вектор $\mathbf{B}'$ перпендикулярен плоскости, проходящей через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (индекс «$\perp$») или лежит в ней (индекс «$\|$»). Введя малое отклонение показателя преломления от единицы, $\delta n$, вычисленное при фиксированной поляризации в пренебрежении дисперсией, найдем

$$\frac{k}{\omega} = 1 + \delta n + 48\pi g \omega^2 \delta n^2. \tag{19}$$

В низшем по нелинейности приближении выражение для $\delta n$ для двух указанных состояний поляризации имеет вид [1]

$$\delta n = K\gamma B_0^2 \sin^2\theta, \quad K_\perp = 7/2, \quad K_\parallel = 2, \tag{20}$$

где $\theta$ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$.

Как видно из (19), волновое число нелинейно зависит от частоты, причем коэффициент нелинейности в свою очередь квадратичен по нелинейному сдвигу $\delta n$ показателя преломления. Соответственно для групповой скорости $v_g$ импульса электромагнитного излучения получаем

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = 1 + \delta n + 144\pi g\omega^2 \delta n^2. \tag{21}$$

Расплывание импульсов характеризуется параметром квадратичной дисперсии [15]

$$D_2 = \frac{d^2k}{d\omega^2} = 288\pi g\omega \delta n^2. \tag{22}$$

Неравенство $D_2 > 0$ отвечает нормальной (в отличие от аномальной) дисперсии, естественной ввиду удаленности от резонанса ($\omega \ll \omega_c$). При этом характерная длина расплывания импульса с исходной длительностью $\tau_p$ составляет

$$L_{disp} = \tau_p^2 / D_2. \tag{23}$$

Как видно из (23), наиболее велико влияние дисперсии вакуума в случае коротких импульсов высокочастотного излучения.

## 4. САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Наличие дисперсии существенно для проявления разнообразных нелинейно-оптических эффектов в вакууме, в том числе она влияет на вероятность реализующегося в условиях синхронизма распада фотона на два во внешнем поле [1] (на языке нелинейной оптики — параметрический распад высокочастотного излучения [16]). Далее мы будем интересоваться наиболее низкопороговыми явлениями самовоздействия в вакууме, возможными при наличии дисперсии. Ограничимся наиболее простым вариантом поляризационной структуры излучения. Выберем ось $z$ вдоль направления преимущественного распространения высокочастотного излучения и будем считать, что вектор электрической напряженности близок к направлению оси $x$ (орт $\mathbf{e}_x$), а магнитной напряженности — оси $y$ (орт $\mathbf{e}_y$). При наличии и электрического (с напряженностью $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_x$), и магнитного (с напряженностью $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_y$) статических полей соотношения (19), (21) и (22) сохраняют свой вид, а вместо (20) имеем [12]

$$\delta n = 2\gamma (E_0 - B_0)^2. \tag{24}$$

Теперь, в отличие от предыдущего раздела, мы учтем не только линейные, но и низшие нелинейные (кубичные) по напряженностям переменных полей члены. При этом мы используем стандартное в нелинейной оптике приближение медленно меняющихся амплитуд, или же метод квазиоптического уравнения [16], т. е. считаем, что огибающая переменного поля $E_1$ меняется мало за времена порядка периода и на расстояниях порядка длины волны высокочастотных колебаний. Для этого представим напряженность переменного поля в виде

$$E' = \frac{1}{2} E_1 \exp\left[i\omega(z-t)\right] + \text{c. c.} \tag{25}$$

Пренебрегая нерезонансными (не удовлетворяющими условиям синхронизма) членами, приходим к следующему виду квазиоптического уравнения:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{1}{2i\omega}\,\Delta_\perp E_1 + i\frac{D_2}{2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - i\omega n_2 |E_1|^2 E_1 = 0, \tag{26}$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad n_2 = \frac{e^4}{360\pi m^4}\delta n^2. \tag{27}$$

Коэффициент нелинейности $n_2$ положителен, что отвечает самофокусировке (в отличие от дефокусировки). Отметим, что в данном приближении коэффициент нелинейности не зависит от частоты, так что дисперсия нелинейности отсутствует.

Квазиоптическое уравнение (26) описывает эффекты дифракции, дисперсии и нелинейности сравнительно низкочастотного электромагнитного излучения в вакууме. Имеет смысл по отдельности рассмотреть проявления этих факторов, используя аналогию уравнения (26) с квазиоптическим уравнением для «обычной» керровской среды [15–18]. При этом существенно совпадение знаков коэффициентов дисперсии и нелинейности ($D_2 > 0$, $n_2 > 0$).

Рассмотрим сначала случай непрерывного или квазинепрерывного излучения (длительность импульса излучения $\tau_p$ достаточно велика, так что дисперсионные искажения на трассе длины $L$ еще не сказываются, $L \ll L_{disp}$). Тогда в (26) можно пренебречь членом, содержащим $D_2$. После перехода к движущейся с групповой скоростью излучения $v_g$ системе отсчета с заменой $t$ на

$$\tau = t - z/v_g \tag{28}$$

уравнение (26) преобразуется к нелинейному уравнению Шредингера

$$i\omega\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\Delta_\perp E_1 + \omega^2 n_2 |E_1|^2 E_1 = 0. \tag{29}$$

Это хорошо изученное в литературе уравнение (см. [16, 17]) описывает баланс между дифракционным расплыванием пучка излучения и его нелинейным схлопыванием, т. е. самофокусировку и коллапс в керровской среде излучения с мощностью, превышающей критическую $P_{sf}$. При этом

$$P_{sf} = \frac{5.763}{8\pi n_2 \omega^2} = \frac{5.763c}{8\pi n_2 k^2}. \tag{30}$$

В последнем выражении для критической мощности самофокусировки использованы обычные единицы и волновое число $k = \omega/c$. В этих единицах коэффициент нелинейности $n_2$ имеет вид

$$n_2 = \frac{\alpha^3}{475\pi^3}\left(\frac{E_0 - B_0}{E_c}\right)^4 \frac{1}{E_c^2}, \tag{31}$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Если мощность излучения превышает критическое значение, то в рамках квазиоптического уравнения (29) излучение будет фокусироваться, причем вблизи нелинейного фокуса интенсивность стремится к бесконечности (коллапс). Реально ограничение интенсивности в фокусе будет происходить из-за неучитываемых в квазиоптическом уравнении факторов: поглощения излучения в вакууме за счет интенсивного рождения электрон-позитронных пар («пробой вакуума»), влияния членов с высшими степенями нелинейности в лагранжиане поля и уменьшения при фокусировке ширины пучка до величин порядка длины волны излучения. Заметим, что другой вариант самофокусировки — мелкомасштабная самофокусировка, или филаментация, при которой широкий пучок разбивается на отдельные интенсивные нити [19], — требуют значительно больших мощностей ($P \gg P_{sf}$). В соответствии с (30) критическая мощность уменьшается с увеличением частоты излучения как $\omega^{-2}$. Даже если мощность излучения меньше критического значения, нелинейность вакуума будет сказываться, в первую очередь, на угловой расходимости излучения, причем характерная длина нелинейных искажений

$$L_{nl} = \frac{1}{kn_2E_c^2}\,\frac{E_c^2}{|E|^2}.$$

Другой важный пример самовоздействия связан с балансом между дисперсионным расплыванием и нелинейным сжатием импульсов излучения [15]. В этом случае, считая, что длина трассы меньше характерной длины поперечных искажений пучка, пренебрежем в (26) членом с оператором Лапласа, а также используем замену (28):

$$i\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{D_2}{2}\,\frac{\partial^2 E_1}{\partial \tau^2} + \omega n_2|E_1|^2E_1 = 0. \tag{32}$$

Это одномерное уравнение Шредингера допускает точное решение методом обратной задачи теории рассеяния [20]. Особую роль играют солитоноподобные решения уравнения (32), для которых профиль интенсивности импульса не меняется при его распространении. Ввиду положительности коэффициентов $D_2$ и $n_2$ это уравнение не имеет решений типа «светлых» солитонов (импульс с нулевой интенсивностью на переднем и заднем фронтах). Однако нетрудно проверить наличие решения (32) в виде «темного» солитона (импульса с постоянным фоном на периферии и ее провалом в центре, см., например, [15, 16]):

$$E_1 = A\,\mathrm{th}(q\tau)\exp(i\Gamma z). \tag{33}$$

Параметры солитона — амплитуда на периферии $A$, обратная длительность импульса $q$ и постоянная распространения $\Gamma$ — связаны соотношениями

$$\Gamma = D_2q^2 = \omega n_2A^2. \tag{34}$$

Темный солитон может также быть интерпретирован как распространение ударной волны огибающей, фронт которой (перепад между двумя значениями амплитуды огибающей, $-A$ и $A$) стабилизирован за счет дисперсии. Для численных оценок удобно выразить частоту и напряженности электромагнитного поля в приведенных выше соответствующих критических значениях $\omega_c/2\pi = 6.2\cdot10^{18}$ Гц, $E_c = 4.4\cdot10^{13}$ ед.СГСЭ. Тогда (22) примет вид

$$D_2\left[\frac{\mathrm{c}^2}{\text{см}}\right] = 3.34\cdot10^{43}K^2\frac{\omega}{\omega_c}\left(\frac{B_0}{E_c}\sin\theta\right)^4, \tag{35}$$

а коэффициент нелинейности (31) запишем в форме

$$n_2[\text{ед.СГСЭ}] = 1.4 \cdot 10^{-38} \left( \frac{E_0 - B_0}{E_c} \right)^4 . \tag{36}$$

Если, в соответствии с условиями (5), положить $\omega/\omega_c = 0.1$, $(E_0 - B_0)/E_c = 0.1$, то $D_2 = 10^{-47}$ с$^2$/см и $n_2 = 10^{-42}$ ед.СГСЭ.

Таким образом, в данной работе сформулированы квазиоптические уравнения, описывающие распространение узконаправленных и квазимонохроматических пучков и импульсов сравнительно низкочастотного и слабого электромагнитного излучения (условия (5)) в электрон-позитронном вакууме в присутствии внешних статических электрических и магнитных полей. Учет дифракции, дисперсии и нелинейности вакуума позволил, при использовании аналогии с эффектами самовоздействия излучения в керровской среде, продемонстрировать возможность самофокусировки и формирования темных солитонов в экстремальных астрофизических условиях. Такие эффекты могли бы проявляться и в экспериментах со сверхкороткими лазерными импульсами в геометрии со скрещенными пучками.

Автор благодарен С. В. Федорову за полезные обсуждения. Данные исследования поддержаны Госкомвузом России (грант № 95-0-5.5-74 по исследованиям в области фундаментального естествознания).

## Литература

1. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
2. M. Lutzky and J. S. Toll, Phys. Rev. **113**, 1649 (1959).
3. T. Eber, Rev. Mod. Phys. **38**, 626 (1966).
4. S. L. Adler, Ann. Phys. (N.Y.) **67**, 599 (1971).
5. A. E. Shabad, Ann. Phys. (N.Y.) **90**, 166 (1975).
6. Z. Bialynicka-Birula, Physica **20**, 513 (1981).
7. Е. Б. Александров, А. А. Ансельм, А. Н. Москалев, ЖЭТФ **89**, 1181 (1985).
8. Н. Н. Розанов, ЖЭТФ **103**, 1996 (1993).
9. N. N. Rosanov, Proc. SPIE **2097**, 252 (1993).
10. С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, М. И. Эйдес, ЯФ **33**, 1675 (1981).
11. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, Москва (1988).
12. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров. Опт. и спектр. (1997), в печати.
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1960).
14. Г. Г. Павлов, Ю. А. Шибанов, ЖЭТФ **76**, 1457 (1979).
15. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных импульсов*, Наука, Москва (1988).
16. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
17. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН **111**, 203 (1973).
18. N. N. Rosanov, Progress in Optics (ed. by E. Wolf) **35**, 1 (1996).
19. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **3**, 471 (1966).
20. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).