

САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХЧАСТОТНОГО ПОЛЯ С СИСТЕМОЙ ТРЕХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ В ВИДЕ ФАЗОВОМОДУЛИРОВАННЫХ СИМУЛТОНА И РАМАНОВСКОГО СОЛИТОНА

*А. В. Андреев**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 апреля 1997 г.

Исследованы особенности взаимодействия системы трехуровневых атомов с бихроматическим электромагнитным полем. Найдены стационарные решения в виде унимодальных и неунимодальных уединенных волн, соответствующих паре импульсов в виде симултона или рамановского солитона. Найден аналитический вид решений, соответствующих фазовомодулированному симултону и рамановскому солитону. Определены условия их возбуждения. Полученные решения представляют интерес с точки зрения интерпретации механизма образования двухчастотных связанных возбуждений, наблюдающихся в различных экспериментах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование нестационарных когерентных процессов в системе трехуровневых атомов вызывает постоянный интерес исследователей на протяжении многих лет. Этот интерес имеет как чисто теоретический, так и прикладной аспекты. Прикладной аспект связан с успешной разработкой схем преобразования частоты и формы импульсов, т. е. получения импульсов с высоким контрастом и сдвигом частоты вверх или вниз. Обнаружение симултонных решений дало толчок к развитию методов обратной задачи рассеяния на случай трехуровневых сред [1]. Значительный интерес в исследовании трехуровневых сред был связан с разработкой схем «безынерционного» усиления [2], с экспериментальным и теоретическим исследованием эффекта когерентного пленения населенностей [3]. Успешные эксперименты по наблюдению рамановских солитонов, проведенные в последнее время в различных лабораториях [4–7], вызывают повышенный интерес к развитию последовательной теории указанного явления [5, 8, 9]. Большинство моделей, используемых при теоретическом анализе динамики образования рамановских солитонов, основано на рассмотрении двухчастотных взаимодействий в среде двухуровневых атомов с дипольно-запрещенным переходом. Эти модели, по-видимому, адекватны экспериментам по вынужденному комбинационному рассеянию в водороде [4–6], когда частота импульса накачки далека от резонанса с каким-либо переходом. Однако в случае экспериментов с газом NH_3 [7] частота излучения CO_2 -лазера, используемого в качестве импульса накачки, квазирезонансна колебательному, а частота стоксова кванта — вращательному переходам молекулы NH_3 . В этом случае параметры солитона существенно зависят от величины отстройки и последовательная модель

*E-mail: andreev@sr1.ilc.msu.su

должна учитывать динамику населенностей как на переходе накачки, так и на стоксовом переходе. Следует отметить, что симулантные решения были найдены методами обратной задачи рассеяния лишь в случае точного резонанса и равенства сил осцилляторов на смежных переходах [1, 10]. В настоящей работе мы нашли решения в виде стационарных импульсов при отличии сил осцилляторов на смежных переходах и произвольной отстройке частоты импульса накачки от частоты соответствующего перехода.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гамильтониан взаимодействия протяженной системы атомов с полихроматическим полем имеет вид

$$H = H_a + H_{int} + H_f, \tag{1}$$

где H_a — гамильтониан свободной системы атомов,

$$H_a = \sum_{i=1}^N \sum_k \hbar \omega_k b_{ki}^+ b_{ki},$$

H_{int} — гамильтониан взаимодействия,

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV,$$

H_f — гамильтониан свободного поля. Оператор плотности тока \mathbf{j} имеет вид

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^N \sum_k \sum_l \mathbf{m}_{kl} b_{ki}^+ b_{li} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

где $\mathbf{m}_{kl} = i\omega_{kl} \mathbf{d}_{kl}$ — матричный элемент тока перехода между k -ым и l -ым уровнями атома, \mathbf{d}_{kl} — дипольный момент перехода.

Рассмотрим взаимодействие трехуровневого атома, схема энергетических уровней которого показана на рис. 1, с бихроматическим полем. Пусть переход $1 \leftrightarrow 2$ является дипольно запрещенным, $\mathbf{d}_{12} = 0$. Этот случай соответствует так называемой Λ -схеме. Однако, как хорошо известно, полученные результаты легко обобщаются и на случай V -схемы и Ξ -схемы, что и будет сделано ниже.

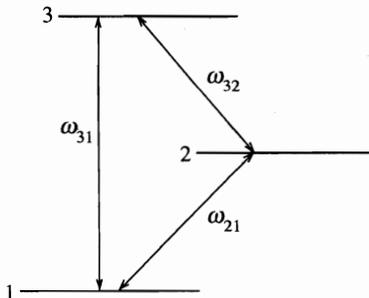


Рис. 1. Схема энергетических уровней

Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ электромагнитного поля удобно представить в следующем виде:

$$\mathbf{A}(z, t) = \mathbf{A}_1^+(z, t) \exp \left[i\omega_{31} \left(1 - \frac{z}{c} \right) \right] + \mathbf{A}_2^+(z, t) \exp \left[i\omega_{32} \left(1 - \frac{z}{c} \right) \right] + \text{с.с.} \quad (2)$$

Используя гамильтониан (1) и считая, что $\mathbf{A}_{1,2}^+(z, t)$ являются медленноменяющимися амплитудами, несложно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial z} &= \beta_1 b_3^+ b_1, & \frac{\partial b_{1,2}}{\partial t} &= b_3 a_{1,2}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial z} - i\delta a_2 &= \beta_2 b_3^+ b_2, & \frac{\partial b_3}{\partial t} &= -b_1^+ a_1 - b_2^+ a_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$a_i = \frac{i\tau}{\hbar c} \mathbf{m}_{3i}^* \mathbf{A}_i^+, \quad b_i = \frac{1}{\sqrt{N/V}} \frac{1}{V_1} \sum_{n \in V_1} \langle \hat{b}_{in} \rangle \exp \left[i\omega_i \left(t - \frac{z_n}{c} \right) \right],$$

$$\beta_i = \frac{2\pi\omega_{3i} |\mathbf{d}_{3i}|^2}{\hbar} \frac{N}{V} \tau^2, \quad \delta = 2\pi (\chi(\omega_{32}) - \chi(\omega_{31})) \omega_{32} \tau.$$

Безразмерный векторный потенциал $a_{1,2}$ в (3) нормирован таким образом, что плотность энергии поля имеет вид

$$w_f = \left(\hbar\omega_{31} \frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \hbar\omega_{32} \frac{|a_2|^2}{\beta_2} \right) \frac{N}{V},$$

где N/V — плотность атомов. При введении волны амплитуды вероятности возбуждения i -го уровня мы провели усреднение по физически малому объему V_1 . В (3) мы ввели безразмерное время $t' = t/\tau$ и координату $z' = z/L$, где L — длина среды, а $\tau = L/c$. Штрихи в (3) и далее опущены. Параметр δ в (3) учитывает дисперсию, т. е. различие поляризуемостей $\chi(\omega_{3i})$ на частотах ω_{3i} . Несложно видеть, что с помощью преобразований $a'_2 = a_2 e^{-i\delta z}$, $b'_2 = b_2 e^{-i\delta z}$ мы можем исключить параметр δ из уравнений (3), поэтому мы будем полагать далее $\delta = 0$.

Система уравнений (3) является системой уравнений для медленноменяющихся амплитуд поля, удовлетворяющих условию $|\partial a_i / \partial t| \ll \omega_{3i} |a_i|$, и амплитуд вероятности возбуждения i -го уровня b_i . Переход от квантовых уравнений (3) к полуклассическим осуществляется при использовании полуклассических расщеплений вида $\langle b_i^+ a_k \rangle = \langle b_i^+ \rangle \langle a_k \rangle$ (см. подробнее [11]).

3. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Найдем ряд интегралов движения системы уравнений (3), которые будут использоваться нами при получении аналитических решений.

Представим амплитуды волн в (3) в следующем виде:

$$a_i(z, t) = A_i(z, t) \exp [i\varphi_i(z, t)], \quad b_i(z, t) = B_i(z, t) \exp [i\psi_i(z, t)],$$

тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_1 + A'_1 &= \beta_1 B_3 B_1 \cos(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1), \\
 \dot{A}_2 + A'_2 &= \beta_2 B_3 B_2 \cos(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{B}_3 &= -B_1 A_1 \cos(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1) - B_2 A_2 \cos(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{B}_2 &= B_3 A_2 \cos(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{B}_1 &= B_3 A_1 \cos(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1), \\
 (\dot{\varphi}_1 + \varphi'_1) A_1 &= \beta_1 B_3 B_1 \sin(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1), \\
 (\dot{\varphi}_2 + \varphi'_2) A_2 &= \beta_2 B_3 B_2 \sin(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{\psi}_3 B_3 &= -B_1 A_1 \sin(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1) - B_2 A_2 \sin(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{\psi}_2 B_2 &= B_3 A_2 \sin(\psi_2 - \psi_3 - \varphi_2), \\
 \dot{\psi}_1 B_1 &= -B_3 A_1 \sin(\psi_1 - \psi_3 - \varphi_1).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Частная производная по времени в (4) обозначена точкой, а по пространственной координате — штрихом.

Система уравнений (4) обладает следующими интегралами движения и законами сохранения:

$$B_1^2(z, t) + B_2^2(z, t) + B_3^2(z, t) = B_1^2(z, 0) + B_2^2(z, 0) + B_3^2(z, 0), \tag{5}$$

$$\psi_1(z, t) B_1^2(z, t) + \psi_2(z, t) B_2^2(z, t) = \psi_3(z, t) B_3^2(z, t), \tag{6}$$

$$(\dot{\varphi}_i(z, t) + \varphi'_i(z, t)) A_i^2(z, t) = -\beta_i \dot{\psi}_i(z, t) B_i^2(z, t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_i^2(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i^2(z, t)}{\partial z} = \beta_i \frac{\partial B_i^2(z, t)}{\partial t}. \tag{8}$$

Уравнение (5) есть закон сохранения числа возбуждений или числа атомов в системе. Уравнению (6) можно придать смысл закона сохранения углового момента. Такой же смысл имеют и уравнения (7). Уравнения (8) есть уравнения непрерывности. Действительно, складывая уравнения (8) для $i = 1, 2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \frac{|a_2|^2}{\beta_2} + 1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \frac{|a_2|^2}{\beta_2} \right) = 0.$$

Как мы отмечали выше, $|a_1|^2/\beta_1$ есть плотность числа квантов поля A_1 , нормированная на плотность числа атомов N/V , а $1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 = |b_3|^2$. Следовательно, изменение суммы числа квантов полей A_1 и A_2 и числа атомов на уровне 3 в объеме V связано лишь с потоком квантов через поверхность, ограничивающую объем V

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \frac{|a_2|^2}{\beta_2} + |b_3|^2 \right) dz = \left(\frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \frac{|a_2|^2}{\beta_2} \right) \Big|_{z=z_1} - \left(\frac{|a_1|^2}{\beta_1} + \frac{|a_2|^2}{\beta_2} \right) \Big|_{z=z_2}$$

4. РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала резонансный случай, когда выполняются следующие условия:

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\psi}_i = 0. \quad (9)$$

В этом случае система уравнений (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + A_1' &= \beta_1 B_3 B_1, & \dot{B}_1 &= B_3 A_1, & \dot{B}_2 &= B_3 A_2, \\ \dot{A}_2 + A_2' &= \beta_2 B_3 B_2, & \dot{B}_3 &= -B_1 A_1 - B_2 A_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Самосогласованному распространению импульсов отвечают такие решения системы уравнений (4), когда амплитуды $A_{1,2}$ зависят лишь от запаздывающего времени

$$A_i(z, t) = A_i \left(t - \frac{z}{v} \right),$$

где v — скорость самосогласованного распространения импульсов.

В задачах взаимодействия двухчастотного поля с системой трехуровневых атомов возможны два основных типа самосогласованных решений. В первом случае поля на обоих смежных переходах имеют вид уединенных импульсов, амплитуда которых при $t \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулю. Такие решения называются симултонами. Во втором случае амплитуда одного из полей при $t \rightarrow -\infty$ стремится к константе, а амплитуда второго поля — к нулю. Поле, имеющее ненулевую амплитуду при $t \rightarrow -\infty$, выступает в качестве импульса накачки. Такие решения называются рамановскими солитонами.

При самосогласованном распространении импульса уравнение (8) принимает вид

$$B_i^2(z, t) + \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) A_i^2 \left(t - \frac{z}{v} \right) = B_i^2(z, t_0) + \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) A_i^2 \left(t_0 - \frac{z}{v} \right), \quad (11)$$

где t_0 — произвольный момент времени.

Как видно из (11), в зависимости от знака коэффициента $k_i = (1 - v)/\beta_i v$ возможны различные варианты динамики самосогласованного распространения импульса. Для Λ -системы частоты ω_{3i} положительны, поэтому коэффициенты β_i положительны. Следовательно, параметр k_i положителен при $v < 1$ и отрицателен при $v > 1$. Для V -схемы коэффициенты $\beta_i < 0$ и параметр k_i положителен при $v > 1$ и отрицателен при $v < 1$. Нормированная скорость импульса меньше единицы в случае, когда импульс распространяется в изначально поглощающей среде. Это означает, что при $t \rightarrow \pm\infty$ должны выполняться условия $|b_3(t \rightarrow \pm\infty)| < |b_2(t \rightarrow \pm\infty)| < |b_1(t \rightarrow \pm\infty)|$ для Λ -схемы и обратные неравенства для V -схемы. В изначально возбужденных средах скорость стационарного импульса может быть выше скорости света. Далее мы будем рассматривать первоначально невозбужденные среды. Следовательно, мы полагаем, что $k_i > 0$ для Λ -схемы и $k_i < 0$ для V -схемы. Однако полученные результаты легко могут быть обобщены на изначально возбужденные среды.

а) Λ -схема. Рассмотрим сначала случай $k_i > 0$. В этом случае правая часть уравнений (11) положительна и мы можем переписать их в следующем виде:

$$B_i^2 + k_i A_i^2 = C_i^2,$$

или

$$A_i = \gamma_i \sqrt{C_i^2 - B_i^2}, \quad (12)$$

где

$$C_i^2 = B_i^2(z, t_0) + \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) A_i^2 \left(t_0 - \frac{z}{v} \right), \quad \gamma_i = \sqrt{\frac{1}{k_i}} = \sqrt{\frac{\beta_i v}{1-v}}. \quad (13)$$

Используя (12) и (5), несложно получить следующую замкнутую систему уравнений для амплитуд B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= \gamma_1 \sqrt{C_1^2 - B_1^2} \sqrt{1 - B_1^2 - B_2^2}, \\ \dot{B}_2 &= \gamma_2 \sqrt{C_2^2 - B_2^2} \sqrt{1 - B_1^2 - B_2^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем новые переменные $x_{1,2}$

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 \cos x_1, & B_2 &= C_2 \cos x_2, \\ A_1 &= \gamma_1 C_1 \sin x_1, & A_2 &= \gamma_2 C_2 \sin x_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения движения для $x_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\gamma_1 \sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 x_1 - C_2^2 \cos^2 x_2}, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma_2 \sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 x_1 - C_2^2 \cos^2 x_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Несложно видеть, что переменные $x_{1,2}$ связаны соотношением

$$x_1 - x_{10} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (x_2 - x_{20}).$$

Следовательно, связанное движение самосогласованных импульсов на переходах $3 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 1$ определяется следующим уравнением движения для переменной $x = x_1$:

$$\dot{x} = -\gamma_1 \sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 x - C_2^2 \cos^2 [\alpha(x - x_0)]}, \quad (17)$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}, \quad x_0 = x_{10} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} x_{20}.$$

Уравнение (17) имеет вид закона сохранения энергии для механической частицы

$$K + U = 0,$$

где

$$K = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{\gamma_1^2}{2} (C_1^2 \cos^2 x + C_2^2 \cos^2 [\alpha(x - x_0)] - 1).$$

Основываясь на этой аналогии, мы можем легко проанализировать характер динамики оптической системы. Самосогласованному распространению уединенного импульса соответствует движение механической частицы из максимума x_n потенциала $U(x)$,

определяющегося условиями $U'(x_n) = 0$ и $U''(x_n) < 0$, с нулевой начальной скоростью и заканчивающееся в максимуме x_m . При $x_0 = 0$ и целочисленных значениях α точками максимумов $U(x)$ являются точки $x_n = \pi n$. Начальная скорость движения частицы из точек максимума равна нулю при условии

$$C_1^2 + C_2^2 = 1. \quad (18)$$

В этом случае уравнение (17) принимает вид

$$\dot{x} = -\gamma_1 \sqrt{C_1^2 \sin^2 x + C_2^2 \sin^2 \alpha x}. \quad (19)$$

б) Симултоны. Решение уравнения (19) при $\alpha = 1$ имеет вид

$$\cos x = \text{th} \left[\gamma \left(t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad (20)$$

где $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$. Следовательно, амплитуды полей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma C_1 / \text{ch } \Phi, & B_1 &= C_1 \text{ th } \Phi, \\ A_2 &= \gamma C_2 / \text{ch } \Phi, & B_2 &= C_2 \text{ th } \Phi, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \gamma = \sqrt{\frac{\beta v}{1-v}}. \quad (22)$$

Как видно, решения (21) описывают симултонное распространение импульсов на смежных переходах $3 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 1$, возникающее при выполнении хорошо известных условий равенства сил осцилляторов на смежных переходах

$$\beta_1 = \beta_2 \quad \text{или} \quad \omega_{31} |d_{31}|^2 = \omega_{32} |d_{32}|^2, \quad (23)$$

где d_{31} — матричный элемент дипольного момента на переходе $3 \leftrightarrow 1$.

В случае $\alpha = 2$ решение уравнения (19) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_1 C_1 \sqrt{\frac{1+p^2}{\text{ch}^2 \Phi + p^2}}, & B_1 &= \frac{C_1 \text{ sh } \Phi}{\sqrt{\text{ch}^2 \Phi + p^2}}, \\ A_2 &= \gamma_2 C_2 \frac{2 \text{ sh } \Phi \sqrt{1+p^2}}{\text{ch}^2 \Phi + p^2}, & B_2 &= C_2 \left(1 - 2 \frac{1+p^2}{\text{ch}^2 \Phi + p^2} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \sqrt{\gamma_1^2 C_1^2 + \gamma_2^2 C_2^2}, \quad p = \frac{2C_2}{C_1}. \quad (25)$$

Решения (24) являются новым видом решений симултонного типа. Условия их возникновения отличаются от условий (23) и имеют вид

$$4\omega_{31} |d_{31}|^2 = \omega_{32} |d_{32}|^2. \quad (26)$$

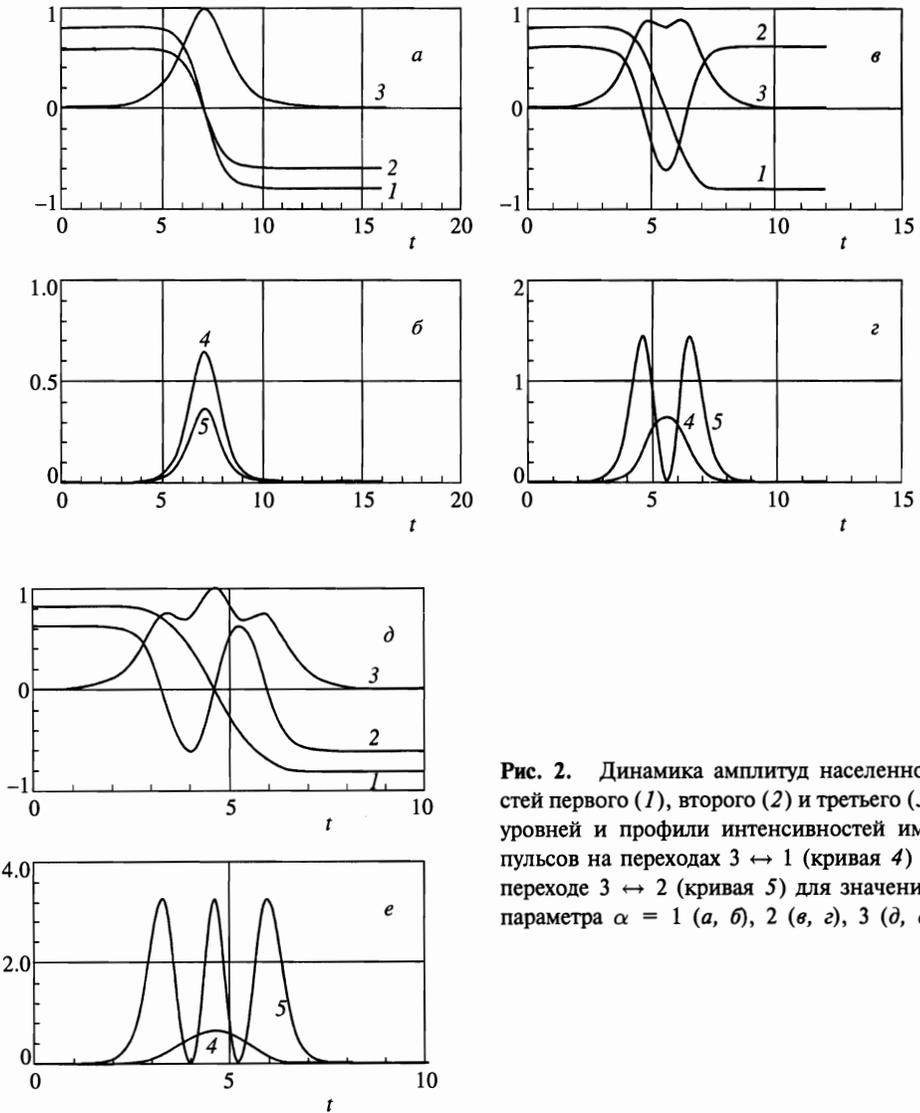


Рис. 2. Динамика амплитуд населенностей первого (1), второго (2) и третьего (3) уровней и профили интенсивностей импульсов на переходах $3 \leftrightarrow 1$ (кривая 4) и $3 \leftrightarrow 2$ (кривая 5) для значений параметра $\alpha = 1$ (а, б), 2 (в, г), 3 (г, е)

Как можно видеть из (24), профили интенсивности импульсов на смежных переходах различны, что отличает решения (24) от традиционных симултонных решений (21). Профили интенсивности импульсов на смежных переходах и динамика амплитуд населенностей уровней показаны на рис. 2 для случаев $\alpha = 1$ (а, б); 2 (в, г); 3 (г, е).

в) Рамановские солитоны. Решения (21) и (24) уравнения (17) получены для случая $x_0 = 0$. Рассмотрим теперь случай $x_0 = \pi/2\alpha$. Уравнение (17) приобретает в этом случае вид

$$\dot{x} = -\gamma_1 \sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 x - C_2^2 \sin^2 \alpha x}. \tag{27}$$

При целочисленных α и $C_1 > C_2$ максимумы потенциала $U(x)$ достигаются в точках

$x_n = \pi n$. Начальная скорость движения частицы из точки максимума равна нулю при условии $C_1 = 1$.

При $\alpha = 1$ решение уравнения (27) имеет вид

$$\cos x = \text{th} \left[\gamma \sqrt{1 - C_2^2} \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]. \quad (28)$$

Следовательно, амплитуды полей $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma / \text{ch} \Phi, & B_1 &= \text{th} \Phi, \\ A_2 &= \gamma C_2 \text{th} \Phi, & B_2 &= C_2 / \text{ch} \Phi, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \gamma \sqrt{1 - C_2^2} = \sqrt{\frac{\beta v}{1 - v} (1 - C_2^2)}. \quad (30)$$

Как видно из (29), на переходе $3 \leftrightarrow 1$ имеет место «светлый», а на переходе $3 \leftrightarrow 2$ «темный» солитоны. Такое возбуждение по аналогии с [4, 5, 8, 9] можно назвать резонансным рамановским солитоном. Условием их возбуждения является выполнение соотношений (23).

При $\alpha = 2$ решение уравнения (27) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_1 C_1 \sqrt{\frac{1 - 4C_2^2}{\text{ch}^2 \Phi - 4C_2^2}}, & B_1 &= \frac{C_2 \text{sh} \Phi}{\sqrt{\text{ch}^2 \Phi - 4C_2^2}}, \\ A_2 &= \gamma_2 C_2 \frac{2 \text{sh} \Phi \sqrt{1 - 4C_2^2}}{\text{ch}^2 \Phi - 4C_2^2}, & B_2 &= C_2 \left(1 - 2 \frac{1 - 4C_2^2}{\text{ch}^2 \Phi - 4C_2^2} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2^2 C_2^2}.$$

Несложно видеть, что решения (31) являются обобщением решений, соответствующих резонансным рамановским солитонам на случай $\alpha = 2$, т. е. когда частоты и матричные элементы переходов удовлетворяют условию (26).

Профили интенсивности импульсов и динамика амплитуд населенностей уровней показаны на рис. 3 для случая $\alpha = 2$ (а, б, в), 3 (г, д, е).

Из уравнения (27) видно, что при $C_1 = 1$ и $\alpha C_2 > 1$ решения в виде пары светлого и темного солитонов существуют при произвольном значении α . На рис. 4 показаны динамика амплитуд населенностей уровней (а) и профили светлого (б) и темного (в) солитонов для случая $\alpha = \pi/2$.

г) V-схема. Как мы отмечали выше, соотношения между амплитудами $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$, определяемые интегралом движения (11), качественно различны в случаях $k_i > 0$ и $k_i < 0$, что безусловно будет сказываться на характере динамики распространения импульсов. Выше мы рассмотрели случай $k_i > 0$. Пусть теперь $k_i < 0$. В этом случае интеграл движения (11) принимает вид

$$B_i^2(z, t) - \frac{1}{\beta_i} \left(1 - \frac{1}{v} \right) A_i^2 \left(t - \frac{z}{v} \right) = B_{i0}^2 - \frac{1}{\beta_i} \left(1 - \frac{1}{v} \right) A_{i0}^2. \quad (32)$$

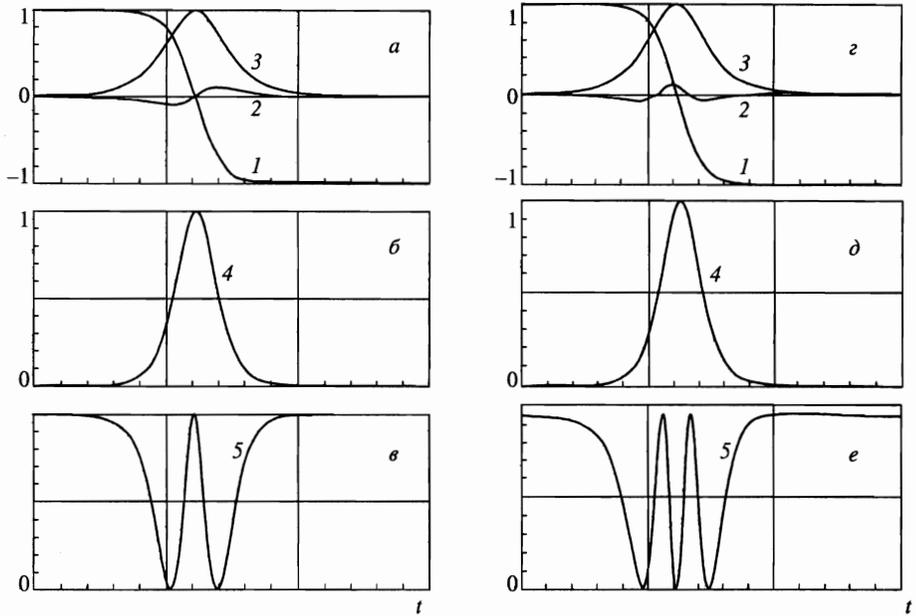


Рис. 3. Динамика амплитуд населенностей первого (1), второго (2) и третьего (3) уровней и профили интенсивностей импульсов на переходах $3 \leftrightarrow 1$ (кривая 4) и переходе $3 \leftrightarrow 2$ (кривая 5) для значений параметра $\alpha = 2$ (а, б, в), 3 (з, д, е)

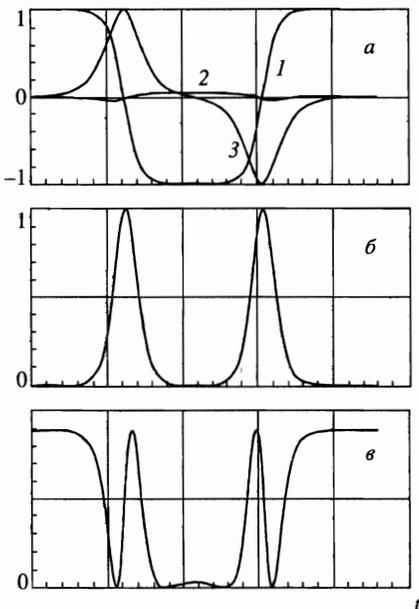


Рис. 4. Динамика амплитуд населенностей первого (1), второго (2) и третьего (3) уровней и профили интенсивностей импульсов на переходах $3 \leftrightarrow 1$ (б) и переходе $3 \leftrightarrow 2$ (в) для значения параметра $\alpha = \pi/2$

Самосогласованные решения в виде уединенного импульса возникают лишь при условии

$$B_{i0}^2 - \frac{1}{\beta_i} \left(1 - \frac{1}{v}\right) A_{i0}^2 = 0,$$

приводящем к следующей связи амплитуд $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$:

$$A_i = \gamma_i B_i, \quad (33)$$

где параметры γ_i определяются теперь выражением

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{|\beta_i|v}{1-v}}.$$

Соотношения (33) приводят к следующим уравнениям движения для амплитуд $B_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= \gamma_1 B_1 \sqrt{1 - B_1^2 - B_2^2}, \\ \dot{B}_2 &= \gamma_2 B_2 \sqrt{1 - B_1^2 - B_2^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Несложно видеть, что уравнения (34) имеют интеграл движения следующего вида:

$$B_2 = C B_1^{\gamma_2/\gamma_1}. \quad (35)$$

Следовательно, связанное движение самосогласованных импульсов на переходах $3 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 1$ описывается уравнением

$$\dot{B} = \gamma_1 B \sqrt{1 - B^2 - C^2 B^{2\gamma_2/\gamma_1}}. \quad (36)$$

При $\gamma_1 = \gamma_2$ решение уравнения (36) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\gamma}{\sqrt{1+C^2} \operatorname{ch} \Phi}, & B_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+C^2} \operatorname{ch} \Phi}, \\ A_2 &= \frac{C\gamma}{\sqrt{1+C^2} \operatorname{ch} \Phi}, & B_2 &= \frac{C}{\sqrt{1+C^2} \operatorname{ch} \Phi}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v}\right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \gamma.$$

Как видно, эти решения соответствуют случаю, когда в начальный момент все атомы находятся на уровне 3, что для Λ -схемы соответствует двухцветному сверхизлучению, а для V -схемы — попутному распространению импульсов, резонансных смежным переходам.

д) Когерентное пленение населенностей. Как мы отмечали в начале данного раздела, случай, когда не выполняются неравенства

$$|b_3(t \rightarrow \pm\infty)| < |b_2(t \rightarrow \pm\infty)| < |b_1(t \rightarrow \pm\infty)|,$$

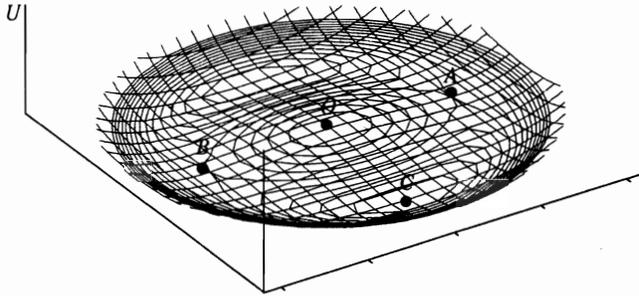


Рис. 5. Вид потенциальной поверхности в координатах (b_1, b_2) : O — точка локального максимума, A, B — седловые точки, C — точка локального минимума

соответствует изначально возбужденной среде. В этом случае уравнения движения для переменных $b_{1,2}$ можно привести к гамильтоновой форме с потенциальной энергией следующего вида:

$$U(b_1, b_2) = \frac{\gamma_1}{2}(b_1^4 - b_1^2) + \frac{\gamma_2}{2}(b_2^4 - b_2^2) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}b_1^2b_2^2.$$

Этот потенциал имеет вид чаши, изображенной на рис. 5. Потенциал имеет следующие экстремальные точки: $b_1 = b_2 = 0$ (точка O), $b_1 = 0, b_2 = 1/2$ (точка A), $b_1 = 1/2, b_2 = 0$ (точка C) и симметричные им точки. Точка O является точкой максимума, а точки A и C в зависимости от соотношения параметров γ_1 и γ_2 являются либо седловыми, либо точками минимума. Решения, стартующие из седловой точки, соответствуют рамановским солитонам, а точка минимума потенциала соответствует состоянию когерентного пленения населенностей.

5. НЕРЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

а) V -схема. В нерезонансном случае наряду с интегралом движения (11) мы должны учитывать и интеграл движения (7), совместное решение этих двух уравнений и определяет условия для связи амплитуд $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$:

$$\begin{aligned} (\varphi_i + \varphi'_i) A_i^2 + \beta_i \psi_i B_i^2 &= 0, \\ B_i^2 + \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) A_i^2 &= B_{i0}^2 + \frac{1}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) A_{i0}^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Сравнение двух уравнений (38) показывает, что в случае $k_i > 0$ самосогласованное

решение может быть лишь фазовомодулированным. Действительно, из (38) получаем

$$B_i^2 \left[\frac{\dot{\varphi}_i + \varphi'_i + (1 - 1/v)\dot{\psi}_i}{\dot{\varphi}_i + \varphi'_i} \right] = C_i^2.$$

Следовательно, B_i являются константами при постоянных $\dot{\varphi}_i$, $\dot{\psi}_i$ и φ'_i .

В случае $k_i < 0$ величины $\dot{\varphi}_i$, $\dot{\psi}_i$ и φ'_i могут быть постоянными. Действительно, из (38) получаем

$$\frac{1}{\beta_i} \left(1 - \frac{1}{v} \right) = - \frac{\dot{\varphi}_i + \varphi'_i}{\beta_i \dot{\psi}_i}.$$

Полагая

$$\varphi_i(z, t) = \varphi_i \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad (39)$$

получим

$$\dot{\varphi}_i = \Delta_i, \quad \dot{\psi}_i = -\Delta_i.$$

Таким образом, в случае $k_i > 0$ уравнения движения (34) легко обобщаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= \pm \gamma_1 B_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_1}{\gamma_1} \right)^2 - B_1^2 - B_2^2}, \\ \dot{B}_2 &= \pm \gamma_2 B_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_2}{\gamma_2} \right)^2 - B_1^2 - B_2^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

В случае, когда выполняется условие

$$\Delta_1 = \Delta_2 \sqrt{\beta_1/\beta_2}, \quad (41)$$

система уравнений (40) снова имеет интеграл движения вида (35) и уравнение связанного самосогласованного движения импульсов принимает вид

$$\dot{B} = \pm \gamma_1 B \sqrt{1 - (\Delta_1/\gamma_1)^2 - B^2 - (1 + C^2)B^{2\gamma_1/\gamma_2}}. \quad (42)$$

Решение уравнения (42) в случае $\gamma_1 = \gamma_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{1 - (\Delta/\gamma)^2}{1 + C^2}} \frac{\gamma}{\text{ch } \Phi}, & B_1 &= \sqrt{\frac{1 - (\Delta/\gamma)^2}{1 + C^2}} \frac{1}{\text{ch } \Phi}, \\ A_2 &= \sqrt{\frac{1 - (\Delta/\gamma)^2}{1 + C^2}} \frac{\gamma C}{\text{ch } \Phi}, & B_2 &= \sqrt{\frac{1 - (\Delta/\gamma)^2}{1 + C^2}} \frac{C}{\text{ch } \Phi}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \sqrt{\gamma^2 - \Delta^2}.$$

б) Фазовомодулированные симултоны. В случае $k_i > 0$ самосогласованное решение может иметь вид лишь фазовомодулированного импульса. Как следует из первого уравнения системы (38), $\dot{\varphi}_i, \dot{\psi}_i$ могут быть представлены в виде

$$\dot{\varphi}_i = \kappa_i B_i^2, \quad \dot{\psi}_i = \mu_i A_i^2, \tag{44}$$

где

$$\mu_i = \frac{\kappa_i}{\beta_i} \left(\frac{1}{v} - 1 \right) = \frac{\kappa_i}{\gamma_i^2}.$$

Подставляя (44) во второе уравнение (9), несложно получить следующие уравнения для амплитуд $B_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= \gamma_1 \sqrt{C_1^2 - B_1^2} \sqrt{1 - (1 + C_1^2 \Gamma_1^2) B_1^2 + \Gamma_1^2 B_1^4 - B_2^2}, \\ \dot{B}_2 &= \gamma_2 \sqrt{C_2^2 - B_2^2} \sqrt{1 - (1 + C_2^2 \Gamma_2^2) B_2^2 + \Gamma_2^2 B_2^4 - B_1^2}, \end{aligned} \tag{45}$$

где C_i определяется выражением (13), а

$$\Gamma_i = \mu_i \gamma_i = \kappa_i / \sqrt{\frac{\beta_i v}{1 - v}}.$$

Введем следующую замену переменных:

$$B_i = C_i \cos \gamma_i x_i, \quad A_i = \gamma_i C_i \sin \gamma_i x_i,$$

тогда система уравнений (45) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 \gamma_1 x_1 - C_2^2 \cos^2 \gamma_2 x_2 - \Gamma_1^2 C_1^4 \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_1 x_1}, \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{1 - C_1^2 \cos^2 \gamma_1 x_1 - C_2^2 \cos^2 \gamma_2 x_2 - \Gamma_2^2 C_2^4 \sin \gamma_2 x_2 \cos \gamma_2 x_2}. \end{aligned} \tag{46}$$

Из (46) видно, что при $C_1^2 + C_2^2 = 1$ скорости $\dot{x}_{1,2} = 0$ в точках

$$\gamma_1 x_{1n} = \pi n, \quad \gamma_2 x_{2m} = \pi m.$$

Тогда в случае $C_1^2 + C_2^2 = 1$ и $\Gamma_1 C_1 = \Gamma_2 C_2$ решение системы уравнений (45) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma_1 C_1 \sqrt{\frac{1 - \Gamma_1^2 C_1^2}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2 C_1^2}}, \quad B_1 = \frac{C_1 \text{sh} \Phi}{\sqrt{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2 C_1^2}}, \\ A_2 &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} A_1, \quad B_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} B_1 \end{aligned} \tag{47}$$

и

$$\dot{\varphi}_1 = \kappa_1 \frac{C_1^2 \text{sh}^2 \Phi}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2 C_1^2},$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = C_1 \sqrt{\gamma_1^2 - C_1^2 \kappa_1^2}. \quad (48)$$

в) **Фазовомодулированный рамановский солитон.** При $C_1 = 1$ точками, в которых $B_{1,2} = 0$, будут точки $B_1 = 1$, $B_2 = C_2$. Используя это обстоятельство, несложно получить связанные самосогласованные решения системы (48) в виде уединенных импульсов. Так, при $\gamma_1 = \gamma_2$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 C_2^2$ они имеют вид

$$A_1 = \gamma_1 \sqrt{\frac{1 - \Gamma_1^2}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}}, \quad B_1 = \frac{\text{sh} \Phi}{\sqrt{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}}, \quad (49)$$

$$A_2 = \frac{C_2 \text{sh} \Phi}{\sqrt{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}}, \quad B_2 = C_2 \sqrt{\frac{1 - \Gamma_1^2}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}}.$$

Динамика фаз импульсов определяется следующими выражениями:

$$\dot{\varphi}_1 = \kappa_1 \frac{\text{sh}^2 \Phi}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \kappa_2 \frac{C_2^2 (1 - \Gamma_1^2)}{\text{ch}^2 \Phi - \Gamma_1^2}, \quad (50)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \frac{1}{\tau_0} = \gamma_1 \sqrt{1 - \Gamma_1^2 - C_2^2}.$$

Из (50) видно, что при $t \rightarrow \pm\infty$ импульс накачки, т. е. импульс квазирезонансный переходу $1 \leftrightarrow 3$, отстроен от точного резонанса на величину κ_1 . В максимуме импульса накачки его отстройка от резонанса обращается в нуль, в то время как отстройка стоксова импульса достигает в этот момент максимума равного $\dot{\varphi}_2 = \kappa_2 C_2^2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ позволил определить вид самосогласованных решений в виде стационарных импульсов на смежных переходах трехуровневого атома, профиль интенсивности которых имеет как унимодальную, так и неунимодальную форму. Условия возникновения стационарных импульсов зависят от величины параметра α , определяющегося отношением сил осцилляторов на смежных переходах:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} = \sqrt{\frac{\omega_{32} |d_{32}|^2}{\omega_{31} |d_{31}|^2}},$$

параметров $C_{1,2}$, определяющихся начальными значениями населенностей уровней и амплитуд полей, и параметров κ_i , определяющих начальные отстройки частот импульсов или величину «чирпа».

В случае точного резонанса симултонные решения для Λ -схемы возникают при целочисленных значениях α . В этом случае импульс на переходе с большей силой осциллятора имеет многогорбый вид, число горбов которого равно α . Решения в виде

рамановских солитонов возникают при произвольном значении α , и число провалов в темновом солитоне определяется целой частью числа α . В случае V -схемы симултоны могут существовать как в резонансном, так и в нерезонансном случаях. В нерезонансном случае отстройки частот импульсов на смежных переходах связаны соотношением (41). Решения в виде фазовомодулированных симултона и рамановского солитона возникают при определенных (указанных нами) соотношениях между начальными отстройками импульсов и величинами сил осцилляторов на смежных переходах и зависят от начальных населенностей и амплитуд полей.

Поскольку профили стационарных импульсов описаны в аналитическом виде, то это может оказаться весьма полезным при изучении свойств солитоноподобных возбуждений, наблюдающихся в различных экспериментах.

Автор выражает благодарность С. Р. Дурлевичу за помощь в подготовке иллюстраций к статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19285).

Литература

1. Л. А. Большов, В. В. Лиханский, КЭ **12**, 1339 (1985).
2. О. Kocharovskaya, Phys. Rep. **219**, 175 (1992).
3. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, УФН **163**, 1 (1993).
4. K. Drühl, R. G. Wenzel, and J. L. Carlsten, Phys. Rev. Lett. **51**, 1171 (1983).
5. D. C. MacPherson, R. C. Swanson, and J. L. Carlsten, Phys. Rev. A **40**, 6745 (1989).
6. D. E. Gakhovich, A. S. Grabchikov, and V. A. Orlovich, Opt. Comm. **102**, 485 (1993).
7. D. P. Scherrer, M. Baumgartner, and F. K. Kneubühl, *Proc. 12th International Conference on Infrared and Millimeter Waves*, Orlando, Florida (Dec. 1995), p. 162.
8. J. C. Englund and C. M. Bowden, Phys. Rev. A **46**, 578 (1992).
9. C. Claude, F. Ginovart, and J. Leon, Physica **87**, 348 (1995).
10. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. M. Sklyarov, Phys. Rep. **191**, 1 (1990).
11. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).