

**ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД
МОСКВА

ТОМ 113, ВЫПУСК 3
МАРТ, 1998
«НАУКА»

**К НЕПРЕРЫВНОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ
ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК**

© 1998

В. С. Бескин, И. В. Кузнецова

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия
Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 1997 г.

Исследован вопрос о непрерывности гидродинамических и магнитогидродинамических осесимметричных стационарных течений вблизи особых точек звуковых поверхностей при их сильном отличии от сферической симметрии. Показано, что течение остается непрерывным в момент бифуркации характеристик, но может стать разрывным при дальнейшем искажении течения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема непрерывности течений вблизи особых поверхностей является одной из классических задач теоретической физики [1–5]. Однако даже в простейшем случае идеальной гидродинамики задача сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, меняющемуся от эллиптического к гиперболическому на звуковой поверхности. Напомним, что уравнения подобного вида, восходящие к классическому уравнению Трикоми, обсуждались с начала этого века в связи с проблемой трансзвуковых гидродинамических течений (сопло, крыло). В частности, для плоских течений чрезвычайно плодотворным оказался метод преобразования годографа (приводящий к линейному уравнению Чаплыгина), который позволил существенно продвинуться в понимании рассматриваемых процессов [1–3]. Несмотря

на это, вопрос о построении последовательной аналитической теории таких течений остается, фактически, открытым.

Сложность состоит прежде всего в том, что сама постановка прямой задачи в рамках уравнения равновесия оказывается нетривиальной. Иными словами, нетривиальной является задача построения решения по заданным граничным условиям. Поэтому даже для одной из простейших версий — плоского гидродинамического течения — построение решения прямой задачи (нахождение течения по форме сопла или крыла) не имеет последовательного решения. В результате в большинстве случаев приходилось довольствоваться решением обратной задачи (нахождение формы сопла по известному течению) [1–3].

Еще одна сложность такого подхода состоит в том, что, например, в гидродинамическом пределе уравнение равновесия содержит три «интеграла движения», которые должны быть определены из граничных условий. Это значит, что для определения структуры трансзвукового течения на некоторой поверхности должны быть заданы четыре граничных условия, например, две термодинамические функции, а также две компоненты скорости. Однако для определения интеграла Бернулли, без знания которого уравнение равновесия, естественно, не может быть решено, необходимо знать все три компоненты скорости, что невозможно, поскольку третья компонента скорости сама должна быть найдена из решения. В такой непоследовательности и заключена, собственно, одна из основных сложностей излагаемого здесь метода. В результате построение решения для прямой задачи сталкивается со значительными трудностями. С другой стороны, было показано, что течение, гладко проходящее через звуковую и сепаратрисную поверхности, является аналитическим вблизи особой точки — точки касания звуковой и сепаратрисной поверхностей [3]. Этот важный результат позволяет анализировать свойства течения в случае, если оно слабо отличается от известного точного решения задачи, путем разложения решения по малым отклонениям от особой точки непосредственно в физической плоскости.

Что же касается астрофизических приложений, то и здесь точные решения были построены лишь для ряда модельных задач. В большинстве же случаев исследования проводились либо с помощью различных автомодельных подстановок [6–10], либо численно [11–17]. Так, недавно в работе Боговалова [18] по численному моделированию холодного замагниченного ветра из вращающейся звезды с квазимонопольным магнитным полем было показано, что при увеличении угловой скорости вращения звезды в районе особой точки за быстрой магнитозвуковой поверхностью появляется разрыв, который не исчезает при дальнейшем увеличении угловой скорости. В той же работе была высказана гипотеза, что такой разрыв возникает в момент бифуркации характеристик, когда при непрерывном изменении параметров течения структура характеристических поверхностей вблизи особой точки резко изменяется. Цель настоящей работы состоит, фактически, в проверке этого предположения.

Во втором разделе нашей работы сформулированы основные уравнения, описывающие осесимметричные стационарные течения. Третий раздел посвящен обсуждению условий, при которых происходит бифуркация характеристик. В четвертом разделе течение вблизи особой точки рассмотрено в гидродинамическом пределе. Показано, что течение остается непрерывным в момент бифуркации характеристик, но, в принципе, может стать разрывным при дальнейшем искажении течения. Однако для этого форма звуковой поверхности должна уже сильно отличаться от сферической. В пятом разделе подобная программа осуществлена для магнитогидродинамической задачи, рассмотрен-

ной Боговаловым. Здесь особенность в момент бифуркации также отсутствует. С другой стороны, показано, что найденная выше неустойчивость могла бы служить причиной разрыва, обнаруженного Боговаловым.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сформулируем прежде всего основные уравнения, в рамках которых мы будем исследовать осесимметричные стационарные течения. Для гидродинамических течений можно ввести функцию тока $\Phi(r, \theta)$, определяемую из условия

$$n\mathbf{v}_p = \frac{1}{2\pi\varpi} [\nabla\Phi \mathbf{e}_\varphi]. \quad (1)$$

Здесь $\varpi = r \sin\theta$ — расстояние от оси вращения, а n и \mathbf{v}_p — плотность и полоидальная скорость вещества. Линии $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ как раз определяют линии тока, причем благодаря условию $d\Phi = n\mathbf{v}d\mathbf{S}$ величина $\Phi(r, \theta)$ совпадает с потоком вещества через поверхность, ограниченную окружностью $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $0 < \varphi < 2\pi$. В частности, полный поток через сферу радиуса r есть $\Phi(r, \pi)$. При этом благодаря определению (1) уравнение непрерывности $\nabla(n\mathbf{v}) = 0$ удовлетворяется автоматически.

В гидродинамическом пределе имеются лишь три интеграла движения, постоянные на поверхностях $\Phi = \text{const}$. Это поток энергии (интеграл Бернулли)

$$E(\Phi) = \frac{v^2}{2} + w + \varphi_G(r, \theta) \quad (2)$$

(w — удельная энтальпия, φ_G — гравитационный потенциал), компонента момента импульса $L(\Phi)$

$$L(\Phi) = v_\varphi r \sin\theta, \quad (3)$$

а также энтропия $s(\Phi)$, которая в рамках идеальной гидродинамики также постоянна на линиях тока. Ниже мы для простоты рассмотрим лишь гидродинамические течения с нулевым угловым моментом $L = 0$ и постоянными во всем пространстве энтропией s и энергией E . Именно такая ситуация возникает при аккреции газа на движущийся гравитирующий центр [19]. В этом случае уравнение равновесия линий тока переписется в виде [20]

$$-\varpi^2 \nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Phi \right) - \frac{(\nabla^i \Phi)(\nabla^k \Phi)(\nabla_i \nabla_k \Phi)}{D(\nabla \Phi)^2} + \frac{(\nabla \varpi^2)(\nabla \Phi)}{2D\varpi^2} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{(\nabla \varphi_G)(\nabla \Phi)}{D(\nabla \Phi)^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$D = -1 + \frac{c_s^2}{v_p^2}, \quad (5)$$

c_s — скорость звука, а все операторы ковариантного дифференцирования ∇_k действуют в плоском пространстве. Уравнение (4) содержит лишь одну особую поверхность — звуковую, определяемую из условия $D = 0$.

Уравнение (4) является обобщением на осесимметричный случай хорошо известного уравнения [3, 5]

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{\varphi_y^2 \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_x^2 \varphi_{yy}}{D(\nabla\varphi)^2} = 0, \tag{6}$$

описывающего плоское изэнтропийное течение для потенциала $\varphi(x, y)$, задающего скорость вещества согласно определению $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Как и (6), уравнение (4) представляет собой фактически уравнение Эйлера, переписанное теперь для функции тока $\Phi(r, \theta)$. Подчеркнем, что уравнение равновесия (4), как и уравнение (6), содержит лишь функцию тока Φ и два интеграла движения E и s . Действительно, уравнение (2) с помощью определения (1) (и при $L = 0$) переписывается в виде

$$2E - 2\varphi_G(r, \theta) - 2w = \frac{(\nabla\Phi)^2}{4\pi^2 r^2 n^2 \sin^2 \theta}. \tag{7}$$

Поскольку энтальпия w может быть выражена как функция n и s , уравнение (7) и определяет, хотя и неявно, плотность n , а вместе с ней и все остальные термодинамические величины, как функции потенциала Φ и двух интегралов движения. Условие (7) можно переписать также в виде

$$\nabla_k n = n \frac{N_k}{D}, \tag{8}$$

где

$$N_k = -\frac{(\nabla^i \Phi)(\nabla_i \nabla_k \Phi)}{(\nabla\Phi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\nabla_k \varpi^2}{\varpi^2} - 4\pi^2 \varpi^2 n^2 \frac{\nabla_k \varphi_G}{(\nabla\Phi)^2}, \tag{9}$$

а D задается уравнением (5).

Аналогично в рамках магнитной гидродинамики можно ввести функцию магнитного потока $\Psi(r, \theta)$ как

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{2\pi\varpi} [\nabla\Psi \mathbf{e}_\varphi], \tag{10}$$

где \mathbf{B}_p — полоидальное магнитное поле. Соответственно, скорость частиц может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \frac{\eta}{n} \mathbf{B} + \Omega_F \varpi \mathbf{e}_\varphi. \tag{11}$$

В этом случае для холодной плазмы $s = 0$ (и в пренебрежении гравитацией) уравнение равновесия магнитных поверхностей может быть записано в виде [20] (см. также [9, 10, 13])

$$A \left[\nabla_k \left(\frac{1}{\varpi^2} \nabla^k \Psi \right) + \frac{1}{\varpi^2 (\nabla\Psi)^2} \frac{(\nabla^a \Psi)(\nabla^b \Psi)(\nabla_a \nabla_b \Psi)}{D} \right] - \frac{A}{\varpi^2 (\nabla\Psi)^2} \frac{1}{2D} (\nabla'_k F)(\nabla^k \Psi) + \frac{1}{\varpi^2} (\nabla'_k A)(\nabla^k \Psi) + \frac{\Omega_F}{c^2} \frac{d\Omega_F}{d\Psi} (\nabla\Psi)^2 + \frac{64\pi^4}{\varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial\Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} = 0. \tag{12}$$

Здесь μ — релятивистская энтальпия, совпадающая для холодной плазмы с массой частиц, $M^2 = 4\pi\eta^2\mu/n$, градиент ∇'_k действует на все величины за исключением M^2 , а производная $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Кроме того,

$$D = \frac{A}{M^2} + \frac{1}{M^2} \frac{B_\varphi^2}{B_p^2}, \quad (13)$$

а альфвеновский фактор A есть

$$A = 1 - \Omega_F^2 \varpi^2 / c^2 - M^2. \quad (14)$$

Наконец,

$$G = \varpi^2 (E - \Omega_F L / c)^2 + M^2 L^2 - M^2 \varpi^2 E^2 \quad (15)$$

и

$$F = \frac{64\pi^4}{M^4} \frac{K}{A^2} - \frac{64\pi^4}{M^4} \varpi^2 \eta^2 \mu^2, \quad (16)$$

а все операторы ∇ вновь действуют в плоском пространстве. При этом тороидальное магнитное поле B_φ и электрическое поле \mathbf{E} определяются как

$$B_\varphi = -\frac{2I}{c\varpi}; \quad (17)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_F}{2\pi c} \nabla \Psi. \quad (18)$$

Здесь $I(r, \theta)$ — полный электрический ток внутри области $\Psi < \Psi(r, \theta)$.

Как и в гидродинамическом пределе, уравнение равновесия (12) содержит лишь функцию $\Psi(r, \theta)$ и четыре интеграла движения, а именно, поток энергии $E(\Psi)$ и углового момента $L(\Psi)$:

$$E = E(\Psi) = \frac{\Omega_F I}{2\pi c^4} + \mu\eta + \mu\eta \frac{v^2}{2c^2}, \quad (19)$$

$$L = L(\Psi) = \frac{I}{2\pi c^3} + \mu\eta\varpi \frac{u_\varphi}{c}, \quad (20)$$

а также угловую скорость вращения магнитных поверхностей $\Omega_F(\Psi)$ и отношение потока частиц к магнитному потоку $\eta(\Psi)$. При этом электрический ток выражается через интегралы движения в виде [20]

$$I = 2\pi c^3 \frac{L - \Omega_F \varpi^2 E / c}{1 - \Omega_F^2 \varpi^2 / c^2 - M^2}. \quad (21)$$

С другой стороны, уравнение равновесия (12) содержит две особые поверхности — альфвеновскую поверхность, на которой $A = 0$, и быструю магнитозвуковую поверхность, на которой $D = 0$. Следовательно, уравнение (12) требует задания четырех граничных условий на поверхности вращающегося тела.

Наконец, условие связи, эквивалентное уравнению Бернулли в гидродинамике, которое как раз и позволяет выразить величины M^2 через интегралы движения, переписывается в виде

$$\frac{\varpi^2 (E - \Omega_F L / c)^2 (1 - \Omega_F^2 \varpi^2 / c^2 - 2M^2) + M^4 (\varpi^2 E^2 - L^2)}{\varpi^2 A^2} = \frac{1}{64\pi^4} \frac{M^4 (\nabla \Psi)^2}{\varpi^2} + \eta^2 \mu^2, \quad (22)$$

а производная $\nabla_k M^2$ — как

$$\nabla_k M^2 = \frac{N_k}{D}, \tag{23}$$

где теперь числитель N_k имеет вид

$$N_k = -\frac{A}{(\nabla\Psi)^2} \nabla^b \Psi \nabla_k \nabla_b \Psi + \frac{A}{2} \frac{\nabla'_k F}{(\nabla\Psi)^2}. \tag{24}$$

Как мы видим, в обоих случаях уравнение равновесия является уравнением второго порядка, линейным относительно старших производных. Иными словами, оно может быть записано в канонической форме

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2\mathcal{B} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \mathcal{F} = 0, \tag{25}$$

где коэффициенты $\mathcal{A} - \mathcal{F}$ не зависят от вторых производных. Вычислив теперь известную комбинацию $\mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2$, получаем для МГД-течений

$$\mathcal{D} = A^2 D(D + 1), \tag{26}$$

и, соответственно, $\mathcal{D} = D(D + 1)$ в гидродинамике. Следовательно, уравнение равновесия меняется от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях, на которых полоидальная скорость вещества сравнивается либо с быстрой или медленной магнитозвуковой скоростью, когда $D = 0$, либо с касповой скоростью, когда $D = -1$ [20]. В приближении холодной плазмы условие $D = 0$ выполняется лишь на быстрой магнитозвуковой поверхности, а медленная и касповая поверхности отсутствуют. В гидродинамическом же пределе единственной особой поверхностью будет звуковая поверхность $D = 0$.

3. БИФУРКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим теперь вопрос о бифуркации характеристик, которая может происходить при сильном отличии течения от сферической симметрии. Чтобы продемонстрировать это, запишем уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{A}}, \tag{27}$$

описывающее траектории характеристических поверхностей в гиперболической области уравнения равновесия (25). Воспользовавшись теперь явным видом коэффициентов $\mathcal{A} - \mathcal{C}$, имеем, например, в гидродинамическом пределе

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 (\partial\Phi/\partial r) (\partial\Phi/\partial\theta) \pm \left[r^2 (\partial\Phi/\partial r)^2 + (\partial\Phi/\partial\theta)^2 \right] \sqrt{-D(D+1)r^2}}{(\partial\Phi/\partial\theta)^2 + D^2 \left[r^2 (\partial\Phi/\partial r)^2 + (\partial\Phi/\partial\theta)^2 \right]}. \tag{28}$$

Уравнение (28) показывает, что в общем случае на звуковой поверхности $D = 0$ производная $d(r - r_s)/d\theta$ ($r_s = r_s(\theta)$ — радиус звуковой поверхности) отлична от нуля.

Соответственно, через каждую точку будут проходить две характеристики [5]. Однако в особых точках, в которых производная $\partial\Phi/\partial r = 0$, для определения поведения характеристических поверхностей требуется более детальное рассмотрение, которое можно провести путем разложения решения вблизи особой точки $r = r_*$. В итоге в безразмерных переменных

$$R = \frac{r_s - r}{r_* D_1}, \quad (29)$$

где $D_1 = r_*(\partial D/\partial r)$ при $r = r_*$, уравнение (28) может быть переписано в виде

$$\frac{dR}{d\theta} = a\theta \pm \sqrt{R}, \quad (30)$$

где

$$a = -\frac{2(\partial D/\partial\theta^2)_{r=r_*,\theta=0} + r_*(D_1/\Phi_*)(\partial^2\Phi/\partial r\partial\theta^2)_{r=r_*,\theta=0}}{D_1^2}. \quad (31)$$

Точное решение уравнения (30) может быть найдено с помощью замены

$$R(\theta) = k^2(\theta)\theta^2. \quad (32)$$

Подставляя (32) в уравнение (30), получаем в неявном виде

$$k(\theta) = k_1 + C^{(k_1-k_2)/k_1} [k_2 - k(\theta)]^{k_2/k_1} \theta^{(k_2-k_1)/k_1}. \quad (33)$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а k_1 и k_2 — два выделенных значения $k(\theta)$, не зависящие от угла θ . Они могут быть получены непосредственно из соотношения (30). В результате имеем

$$2k^2 \pm k - a = 0, \quad (34)$$

и, следовательно,

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{4}. \quad (35)$$

Поведение характеристических поверхностей показано на рис. 1, 2. При этом условии $a > 0$ соответствует классическому случаю [1–5], для которого через особую точку проходят четыре характеристики, как раз соответствующие двум ветвям корней (35). Действительно, при $k \approx k_1$ уравнение (33) дает

$$k(\theta) \approx k_1 + C_1\theta^m, \quad (36)$$

где показатель степени

$$m = -\frac{1 + 8a + \sqrt{1 + 8a}}{4a}. \quad (37)$$

Поэтому при $a > 0$, когда $m < 0$, второе слагаемое в (36) расходится при $\theta \rightarrow 0$. Следовательно, при $k \approx k_1$ через начало координат будет проходить лишь характеристика,

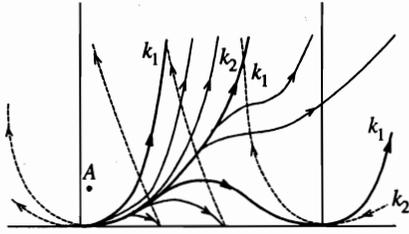


Рис. 1

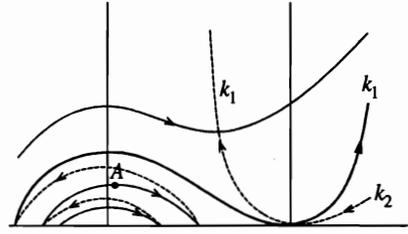


Рис. 2

Рис. 1. Поведение характеристических поверхностей в случае, когда параметр a для нестандартной особой точки (слева) удовлетворяет условию $-1/8 < a < 0$. Жирной линией отмечена сепаратрисная характеристика, а также соответствующие $k = k_1$ и $k = k_2$. Классическая особая точка $a > 0$ показана справа. Точка A не оказывает влияния на дозвуковую область

Рис. 2. То же для $a < -1/8$. Возмущение от точки A вдоль характеристики достигает звуковой поверхности

соответствующая $C_1 = 0$. В случае же $a < 0$ (который не может быть реализован для плоского гидродинамического течения в отсутствие гравитационного поля) ситуация существенно иная. Так, при выполнении условия $-1/8 < a < 0$, соответствующего действительным корням (35), через особую точку проходит бесконечно много характеристик, поскольку теперь $m > 0$ и $k(\theta) \rightarrow k_1$ при $\theta \rightarrow 0$ для всех значений постоянной C_1 . С другой стороны, при $a < -1/8$, когда корни (35) становятся комплексными, структура характеристических поверхностей резко изменяется, в результате чего через особую точку не проходит уже ни одна характеристика. Сферически же симметричный случай соответствует условию $a = 0$.

Таким образом, при достаточно сильном отличии течения от сферически-симметричного вся структура характеристических поверхностей, в том числе и сепаратрисная характеристика (которая, как известно, как раз и разделяет две причинно несвязанные области [1–3]), скачком изменяется. В частности, если при $a > -1/8$ сепаратрисная характеристика соединяет обе особые точки, то при $a < -1/8$ уже нет. В результате область, находящаяся непосредственно над особой точкой с $a < 0$, также скачком начинает влиять на эллиптическую область уравнения равновесия, поскольку, как видно из рис. 2, возмущение из этой области вдоль характеристик достигает теперь звуковой поверхности. Теперь становится понятным, почему именно момент бифуркации характеристик был предложен Боговаловым в качестве возможной причины появления разрыва при истечении из вращающегося замагниченного тела [18].

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Перейдем теперь к последовательному исследованию поведения решения вблизи особых точек уравнения равновесия (25). Прежде всего рассмотрим аккрецию в гидродинамическом пределе с нерелятивистской скоростью в окрестности точки $\theta = 0, r = r_*$, где r_* — радиус звуковой поверхности при $\theta = 0$. Такая ситуация может быть реализо-

вана при аккреции на движущуюся черную дыру [20]. Следуя Франклю [3], представим первые члены разложения функции тока Φ , плотности n и скорости v по степеням $r - r_*$ и θ в виде

$$\Phi = \Phi_* \left[\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}bh\theta^2 - \frac{q}{24}\theta^4 + \frac{p_1}{720}\theta^6 + \frac{p_2}{24}\theta^4 h + \frac{p_3}{2}h^2\theta^2 \right], \quad (38)$$

$$n = n_*(1 + \eta_1 h + \eta_2 \theta^2), \quad (39)$$

$$v = v_*(1 + w_1 h + w_2 \theta^2), \quad (40)$$

где $h = (r - r_*)/r_*$. Ясно, что при $b = 0$, $q = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ и $p_3 = 0$, когда $\eta_2 = 0$ и $w_2 = 0$, функция Φ (38) соответствует сферически-симметричному течению

$$\Phi = \Phi_0(1 - \cos\theta). \quad (41)$$

С другой стороны, понятно, что разложение (38) в принципе не требует ограничений на значения коэффициентов b , q и $p_1 - p_3$. Напомним, что в классической особой точке вся структура трансзвукового течения (при заданных постоянных значениях интегралов E и s) определялась с помощью еще одной функции. В прямой постановке такой функцией была бы форма границы течения, например, сопла или крыла. Однако, как уже говорилось, в этом случае построение решения сталкивается с серьезными трудностями. С другой стороны, благодаря аналитичности трансзвукового течения [3], решение вблизи звуковой поверхности может быть построено путем разложения в ряд при задании еще одной функции, характеризующей течение. Так, для плоского симметричного потока в качестве такой функции может быть задана продольная скорость на оси симметрии $f(x) = v_x(x, 0)$ [3]. В нашем же случае в качестве определяющей функции удобно рассмотреть поток $nv_r(r, 0)$ на оси, $\theta = 0$. Согласно (1) и (38) это означает, что роль «граничных условий» будут играть величины b и p_3 , как раз и определяющие отличие течения от сферически-симметричного. Так, для случая аккреции на движущуюся со скоростью v_∞ черную дыру [20] получаем

$$b = 2k_1(\Gamma)\varepsilon_1, \quad (42)$$

$$p_3 = \frac{2b}{\sqrt{10 - 6\Gamma}} \left(\frac{4 - \sqrt{10 - 6\Gamma}}{\Gamma + 1} - 1 \right), \quad (43)$$

где малый параметр $\varepsilon_1 = v_\infty/c_s(\infty)$, а численный коэффициент $k_1(\Gamma) \sim 1$ определен в [20]. Все же остальные коэффициенты разложения в (38)–(41) должны быть в итоге выражены через эти величины. Фактически наша задача как раз и будет состоять в том, чтобы проверить непрерывность такой процедуры при $a = -1/8$.

В результате, воспользовавшись уравнением (4) и выражением (9) для N_r , получаем следующие соотношения для коэффициентов разложения функций Φ и n :

$$\eta_1 = \frac{2b - 4 + \sqrt{(4 - 2b)^2 - (\Gamma + 1)(6 - 6b + 2p_3 + b^2)}}{\Gamma + 1}, \quad (44)$$

$$q = 1 + \frac{3}{4}b^2, \quad (45)$$

$$w_1 = b - 2 - \eta_1, \quad (46)$$

$$w_2 = -\eta_2, \quad (47)$$

причем знак + перед корнем в выражении (44) соответствует аккреции. При этом

$$b = 2 - \frac{GM}{r_* v_*^2}, \tag{48}$$

где $v_* = \Phi_*/2\pi n_* r_*^2$ — скорость потока в точке $\theta = 0, h = 0$, так что для сферически симметричного течения, когда [22] $r_* = GM/2v_*^2$, имеем $b = 0$. Выше для простоты использовалось политропное уравнение состояния $P = kn^\Gamma, 1 < \Gamma < 5/3$, для которого удельная энтальпия $w = c_s^2/(\Gamma - 1)$, где $c_s^2 = (1/m_p)k\Gamma n^{\Gamma-1}$ — квадрат скорости звука. Подчеркнем, что при $b = 0, p_3 = 0$ соотношение (44) для η_1 переходит в хорошо известное выражение [22, 23]

$$\eta_1 = \frac{-4 + \sqrt{10 - 6\Gamma}}{\Gamma + 1} \tag{49}$$

для сферически-симметричного течения.

Далее, первые члены разложения по степеням h и θ для θ -компоненты уравнения (8) дают

$$\eta_2 = - \frac{\left(\frac{1}{60}p_1 + \frac{1}{36}q^2 + \frac{1}{15} - \frac{1}{9}q + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{24}bp_2\right)\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}p_2 + bp_3 - \frac{1}{3}qb\right)h}{(\Gamma+1)\eta_2\theta^2 + [(\Gamma+1)\eta_1 + (4-2b)]h}. \tag{50}$$

Из уравнения (50) видно, что имеют место следующие выражения для p_1 и p_2 :

$$p_1 = -60(\Gamma+1)\eta_2^2 - \frac{5}{3}q^2 - 4 + \frac{20}{3}q - 5b^2 - \frac{5}{2}bp_2, \tag{51}$$

$$p_2 = -6[(\Gamma+1)\eta_1 + 4 - 2b]\eta_2 - 2(q - 1 + b) + qb - 3bp_3. \tag{52}$$

Кроме того, в рассматриваемом случае потенциального течения имеем

$$[\nabla v] = 0. \tag{53}$$

Благодаря уравнению (53) получим выражение для коэффициента η_2 :

$$\eta_2 = \frac{1 - q}{6} - \frac{1}{4}\eta_1 b + \frac{p_3}{2}. \tag{54}$$

Соотношения (44)–(54) и позволяют определить все остальные коэффициенты в разложении функции тока Φ и плотности n через величины b и p_3 .

Наконец, коэффициент a из уравнения (30) выражается через величины b и p_3 следующим образом:

$$a = - \frac{2b + p_3(\Gamma + 1)}{D_1^2}, \tag{55}$$

где

$$D_1^2 = (4 - 2b)^2 - (\Gamma + 1)(6 - 6b + 2p_3 + b^2) \tag{56}$$

— подкоренное выражение в соотношении (44). Из условия (55) видно, что в момент бифуркации характеристик, когда $a = -1/8$, не происходит никаких изменений в процедуре определения коэффициентов разложения функции тока Φ и плотности n через

величины b и p_3 . Иными словами, течение остается непрерывным. Однако при дальнейшем искажении течения, когда $D_1^2 \rightarrow 0$ и, следовательно, $a \rightarrow -\infty$, возможность представить решение уравнения равновесия в виде аналитического ряда (38) нарушается, поскольку величина η_1 , а значит и все остальные коэффициенты разложения, становятся комплексными величинами. Как известно, это как раз и означает, что непрерывный режим течения становится невозможным [5].

Аналогичным образом можно получить соотношения для коэффициентов разложения потоковой функции и плотности вблизи экватора. В этом случае, который реализуется, например, в случае аккреции на вращающуюся черную дыру [20, 21], имеем

$$\Phi = \Phi_* \left[1 + \beta - \frac{q}{6} + bh\beta + \frac{p_1}{120}\beta^3 + \frac{p_2}{6}\beta^3 h + p_3\beta h^2 \right], \quad (57)$$

$$n = n_*(1 + \eta_1 h + \eta_2 \beta^2), \quad (58)$$

где $\beta = \theta - \pi/2$.

Уравнения для коэффициентов разложения имеют теперь вид

$$q = 1 + b^2, \quad (59)$$

$$\eta_1 = \frac{2b - 4 + \sqrt{(4 - 2b)^2 - (\Gamma + 1)(6 - 6b + 2p_3 + b^2)}}{\Gamma + 1}, \quad (60)$$

$$p_1 = -12(\Gamma + 1)\eta_2^2 - 8 - 12b^2 + 12q - 3q^2 - 4bp_2, \quad (61)$$

$$p_2 = -b - 2b^2 - 4p_3b + b^3 - 2(\Gamma + 1)\eta_1\eta_2 - 4(2 - b)\eta_2, \quad (62)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(2p_3 - b^2 - \eta_1 b). \quad (63)$$

Видно, что в этом случае ситуация аналогична рассмотренной выше.

Таким образом, мы приходим к заключению, что в момент бифуркации характеристик процедура определения решения вблизи особой точки не нарушается. Иными словами, для определения решения нам, помимо двух интегралов движения E и s , по-прежнему необходимо задать еще одну свободную функцию. С другой стороны, непрерывность может быть нарушена при дальнейшем искажении течения, т. е. при достаточно больших значениях b и p_3 , когда подкоренное выражение D_1^2 в (44) становится отрицательным. Правда, как показал анализ, для значений (42), (43) это становится возможным лишь при $\varepsilon_1 > 1$, когда в натекающем потоке неизбежно возникает ударная волна. Напомним, что для сферически симметричного течения $D_1^2 = 10 - 6\Gamma$, так что $D_1^2 > 0$ при $\Gamma < 5/3$.

5. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим теперь нерелятивистское МГД-течение холодной плазмы (и в пренебрежении гравитацией) в окрестности особой точки $\theta = \pi/2$, $h = 0$. Как уже говорилось, для определения трансзвукового течения необходимо задать четыре функции на поверхности тела, например, плотность и скорость вещества, а также угловую скорость вращения и нормальную компоненту магнитного поля. Для простоты, как и в случае течения, рассмотренного Боговаловым [18], будем считать, что все эти величины постоянны на поверхности:

$$n(R, \theta) = n_{in} = \text{const}, \tag{64}$$

$$v(R, \theta) = v_{in} = \text{const}, \tag{65}$$

$$\Omega_F(R, \theta) = \Omega = \text{const}, \tag{66}$$

$$B_n(R, \theta) = B_n = \text{const}. \tag{67}$$

Запишем первые члены разложения потока Ψ и плотности n по степеням h и β в виде

$$\Psi = \Psi_* \left[1 + \beta + \alpha_1 h \beta - \frac{\alpha_2}{6} \beta^3 + \frac{\alpha_3}{120} \beta^5 + \frac{\alpha_4}{6} \beta^3 h + \alpha_5 h^2 \beta \right], \tag{68}$$

$$n = n_*(1 + \eta_1 h + \eta_2 \beta^2). \tag{69}$$

При $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$ и $\alpha_5 = 0$ поток Ψ переходит в сферически-симметричное решение уравнения (12), которое имеет место при угловой скорости $\Omega_F = 0$ и угловом моменте $L = 0$:

$$\Psi = \Psi_0(1 - \cos \theta). \tag{70}$$

В этом случае альфвеновская поверхность совпадает с быстрой магнитозвуковой поверхностью. Для нерелятивистских скоростей течения условие связи (22) имеет вид

$$E - \mu\eta = \frac{M^2(\nabla\Psi)^2}{128\pi^4\varpi^2\mu\eta} + \frac{K}{A^2}, \tag{71}$$

где теперь

$$A = 1 - M^2, \tag{72}$$

$$K = (2\Omega_F L \mu \eta \varpi^2 - \Omega_F^2 \varpi^4 \mu^2 \eta^2)(1 - 2M^2) + M^4 L^2. \tag{73}$$

Как и в работе Боговалова, мы будем рассматривать истечение холодной плазмы с постоянными интегралами движения Ω_F , $E = \mu\eta(1 + v_{in}^2/2c^2)$,

$$\eta = \frac{2\pi n_{in} v_{in} R^2}{\Psi_0} \tag{74}$$

и угловым моментом

$$L(\Psi) = L_0 \left[1 - \frac{(\Psi - \Psi_*)^2}{\Psi_*^2} \right]. \tag{75}$$

В результате из уравнений (12) и (71) можно получить следующие соотношения:

$$\alpha_1 = 1 - 2(\omega^2 + 1)\xi_* + \xi_*^2 \frac{X_A^2}{X_*^2} \frac{M_*^2 - 1}{\alpha^2}, \tag{76}$$

$$\alpha_2 = (2\xi_*^2 \omega^2 + 2\xi_*) \frac{M_*^2}{X_*^2} + \alpha_1^2 + \alpha_1 - 1, \tag{77}$$

$$\eta_1 = -\frac{4}{3}\xi_* - \frac{2}{3}\omega^2(1 - \alpha_1) - D_1, \tag{78}$$

$$D_1^2 = \left[\frac{4}{3}\xi_* + \frac{2}{3}\omega^2(1 - \alpha_1) \right]^2 - \frac{4(2M_*^2 - 1)}{3M_*^2} \xi_*^2 - \omega^2(1 - \alpha_1) + \frac{\omega^2}{3}(1 - \alpha_1)^2 - \frac{2}{3}\omega^2 \alpha_5, \tag{79}$$

где нами введены безразмерные величины

$$\alpha = \frac{\Omega_F r_A}{v_A}, \quad \omega^2 = \frac{M_*^2 - 1}{M_*^2}, \quad \xi_* = \frac{\Omega_F r_*^2 \mu \eta}{I_* M_*^2}, \quad (80)$$

$$X_* = \frac{r_*}{r_A}, \quad X_A = \frac{r_a}{r_A}. \quad (81)$$

Здесь $I_* = I(r_*, \pi/2)/2\pi$, $I(r, \theta)$ — полный ток, текущий в области $\Psi < \Psi(r, \theta)$, причем

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{L - \Omega_F \varpi^2 \mu \eta}{1 - M^2}, \quad (82)$$

а $v_A = v_{in}$ — альфвеновская скорость на звуковой поверхности при $\Omega = 0$

$$v_A^2 = \frac{\Psi_0^2}{64\pi^4 r_A^4 \mu^2 \eta^2}. \quad (83)$$

Наконец, r_A и r_a — альфвеновские радиусы при сферически-симметричном течении и течении с $\alpha \neq 0$. Для течения близкого к сферически-симметричному имеем, естественно, $\alpha \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$, $X_* \rightarrow 1$, $\Psi_* \rightarrow \Psi_0$.

Далее, условие $D = 0$ запишется через введенные величины в следующем виде:

$$\omega^2 = \frac{\Psi_0^2}{\Psi_*^2} \frac{X_*^6 \alpha^2}{\xi_*^2 M_*^6}, \quad (84)$$

а уравнение связи (71) как

$$1 = \frac{M_*^4}{X_*^4} \frac{\Psi_*^2}{\Psi_0^2} + \alpha^2 (2X_A^2 - X_*^2) + \frac{\alpha^2 (X_A^2 - X_*^2)^2}{X_*^2 \omega^4}. \quad (85)$$

Наконец, из уравнения равновесия (22) можно определить и коэффициент η_2 :

$$\eta_2 = -\omega^2 \left[\frac{\alpha_2}{2} - \alpha_5 - \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 X_A^2 X_*^2}{M_*^2 (1 - M_*^2)} \frac{\Psi_0^2}{\Psi_*^2} (X_*^2 - X_A^2 M_*^2) \right] - \frac{1}{2} \eta_1 \alpha_1. \quad (86)$$

Таким образом, как и в случае гидродинамического течения, выражения для всех коэффициентов разложения (76)–(78) имеют корневую особенность. К сожалению, выражение (78) для η_1 требует задания четырех величин, характеризующих течение, которые не могут быть напрямую определены из граничных условий (64)–(67). Соответственно, нельзя с определенностью определить и значение угловой скорости α , при которой подкоренное выражение становится отрицательным (если это вообще имеет место). Однако при малых $\alpha \ll 1$ соотношение (78) можно записать в следующем виде:

$$\eta_1 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \alpha^2 - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{9} \alpha^2}. \quad (87)$$

В частности, для $\alpha = 0$ выражение (87) дает $\eta_1 = -2$, что как раз соответствует свободному истечению вещества. Как мы видим, соотношение (87) показывает, что подкоренное выражение уменьшается при увеличении угловой скорости вращения. Поэтому возможно, что при дальнейшем искажении сферически-симметричного течения оно

может стать разрывным. Более того, согласно (87) подкоренное выражение становится отрицательным именно при $\alpha \sim 1$, что как раз соответствует результату Боговалова.

Отметим, наконец, что коэффициент a из уравнения (30) при $\alpha \ll 1$ имеет вид

$$a = -\frac{6\alpha^2}{D_1^2}. \quad (88)$$

Видно, что, как и в случае гидродинамического течения, в момент бифуркации характеристик течение остается непрерывным. Переход же к режиму, при котором течение становится разрывным, соответствует $a = -\infty$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе было показано, что решение уравнения равновесия вблизи особых точек остается непрерывным в момент бифуркации характеристик, но может стать разрывным при дальнейшем искажении течения. Тем самым продемонстрирована возможность образования ударной волны, полученной численно в работе Боговалова. С другой стороны, непрерывность процедуры определения параметров течения при $a = -1/8$ показывает, что резкое изменение положения сепаратрисной характеристики (разделяющей причинно несвязанные области) не влияет на количество граничных условий, необходимое для определения структуры течения.

Авторы благодарны А. В. Гуревичу за интерес к работе, полезное обсуждение и поддержку, а также В. Б. Баранову и С. В. Боговалову за плодотворные дискуссии. Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-02-18217).

Литература

1. К. Г. Гудерлей, *Теория околосвуковых течений*, Изд. иностр. лит., Москва (1960).
2. Р. Мизес, *Математическая теория течений сжимаемой жидкости*, Изд. иностр. лит., Москва (1961).
3. Ф. И. Франкль, *Избранные труды по газовой динамике*, Наука, Москва (1973).
4. М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Наука, Москва (1970).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
6. R. D. Blandford and D. G. Payne, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **199**, 883 (1982).
7. В. С. Low and K. Tsinganos, *Astrophys. J.* **302**, 163 (1986).
8. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. М. Каждан, А. А. Клыпин и др., *Астрон. ж.* **56**, 359 (1979).
9. K. Tsinganos and C. Sauty, *Astron. Astrophys.* **255**, 405 (1992).
10. R. V. E. Lovelace, J. C. L. Wang, and M. E. Sulkanen, *Astrophys. J.* **315**, 504 (1987).
11. J. F. Hawley, L. L. Smarr, and J. R. Wilson, *Astrophys. J.* **277**, 296 (1984).
12. G. W. Pneuman and R. A. Kopp, *Solar Phys.* **18**, 258 (1971).
13. Zh.-Yu Li, T. Chuen, and M. C. Begelman, *Astrophys. J.* **394**, 459 (1992).
14. R. Hunt, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **198**, 83 (1979).
15. L. I. Petrich, S. Shapiro, R. F. Stark, and S. Teukolsky, *Astrophys. J.* **336**, 313 (1989).
16. M. Ruffert and D. Arnett, *Astrophys. J.* **427**, 351 (1994).

17. X. Cao and H. C. Spruit, *Astron. Astrophys.* **287**, 80 (1994).
18. S. V. Bogovalov, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **280**, 39 (1996).
19. В. С. Бескин, Ю. Н. Пидопрыгора, *ЖЭТФ* **107**, 1025 (1995).
20. В. С. Бескин, В. И. Парьев, *УФН* **163**, 95 (1993).
21. V. I. Pariev, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **283**, 1264 (1996).
22. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Релятивистская астрофизика*, Наука, Москва (1967).
23. С. Шапиро, С. Тьюколски *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, т. 1, 2. Мир, Москва (1985).