ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 3, стр. 786–804

АННИГИЛЯЦИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОЗИТРОНА И K-ЭЛЕКТРОНА С ИСПУСКАНИЕМ ФОТОНА И ВТОРОГО K-ЭЛЕКТРОНА

*А. И. Михайлов, И. А. Михайлов**

Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Российской академии наук
188350, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 июля 1997 г.

Рассмотрен процесс аннигиляции быстрого позитрона с K-электроном, сопровождающийся испусканием фотона и второго K-электрона. Предполагается, что все электроны и позитроны движутся в кулоновском поле ядра и что кулоновский параметр $\alpha Z \ll 1$ ($\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, Z — заряд ядра). Межэлектронное взаимодействие, ответственное за вылет электрона из атома, учтено в первом порядке теории возмущений. Вычислены дифференциальное и полное сечения процесса, построена зависимость отношения сечений двукратной и однократной ионизаций от энергии налетающих позитронов. Найден высокоэнергетический предел этого отношения, равный $0.34/Z^2$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Аннигиляция позитрона со свободным электроном возможна только с излучением двух (или более) фотонов. В противном случае нельзя удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. При аннигиляции с атомным электроном из-за присутствия третьего тела (ядра) процесс может быть двухквантовым, одноквантовым и даже безрадиационным, если атом содержит более одного электрона:

$$\mathrm{A} + e^+ \to \mathrm{A}^+ + 2\gamma \,, \tag{1}$$

$$\mathrm{A} + e^+ \to \mathrm{A}^+ + \gamma \,, \tag{2}$$

$$\mathrm{A} + e^+ \to \mathrm{A}^{++} + e^-, \tag{3}$$

A — нейтральный атом или ион, A^+ (A^{++}) — ион, заряд которого на единицу (две единицы) больше, чем у A.

Реакция (1) представляет собой кросс-симметричный канал для комптоновского рассеяния фотонов на атоме и так же, как комптоновское рассеяние, может идти с малой передачей импульса ядру. Поэтому среди указанных реакций она характеризуется наибольшим сечением, которое по порядку величины совпадает с сечением на свободном электроне $\sigma \sim r_0^2$, где $r_0 = 2.82 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона. Двухфотонная аннигиляция на атомах исследована явно недостаточно. Авторам известна лишь одна экспериментальная [1] и одна теоретическая [2] работы, результаты которых к тому же расходятся.

Однофотонная аннигиляция (2) является кросс-симметричным каналом для атомного фотоэффекта. Эта реакция идет с передачей ядру большого импульса $q \sim m$

*E-mail: Mikhailo@thd.pnpi.spb.ru

(m — масса электрона)[1] и характеризуется сечением $\sigma \sim r_0^2 \alpha^4 Z^5$. Однофотонная аннигиляция на атомах довольно обстоятельно изучалась в работах [3–5].

Безрадиационная аннигиляция (3) рассматривалась в работах [6–9]. В этой реакции выделяющаяся при аннигиляции позитрона и электрона энергия передается другому электрону, который покидает атом. В результате образуется двукратно заряженный ион и свободный электрон с определенной энергией. Реакция (3) связана с передачей большого импульса $q > 2m$ ядру и большой энергии $\Delta E > 2m$ освобождающемуся электрону. В силу этого процесс идет на малых расстояниях $r \sim 1/q$ от ядра и с малым сечением $\sigma \sim r_0^2 (\alpha Z)^8$ [8, 9].

Возможны и более сложные аннигиляционные процессы на атоме, например однофотонная аннигиляция с вылетом электрона (названия процессам мы даем по числу реально испущенных в реакции фотонов). В результате атом становится двукратно ионизованным, а сам процесс можно назвать двойной ионизацией при однофотонной аннигиляции:

$$\mathrm{A} + e^+ \ \rightarrow \ \mathrm{A}^{++} + e^- + \gamma \ . \tag{4}$$

Энергия этой реакции делится между фотоном и электроном. Поэтому в отличие от (2) и (3) здесь мы имеем фотонные и электронные энергетические спектры.

Как будет показано ниже, сечение этой реакции для релятивистских позитронов есть $\sigma \sim r_0^2 \alpha (\alpha Z)^3$. Несмотря на появление дополнительной по сравнению с реакцией (3) малости $\sim \alpha$, связанной с излучением фотона, оно превосходит сечение безрадиационной аннигиляции. Выделяющаяся энергия распределяется между фотоном и электроном крайне неравномерно. Наибольший вклад в сечение дают две области энергетического спектра: краевая, где наблюдается вылет жесткого фотона и медленного электрона с передачей ядру большого импульса, и центральная, где и фотон, и электрон обладают большой энергией, а передаваемый ядру импульс мал. Краевая область очень узкая, ее ширина порядка энергии связи K-электрона, однако ее вклад в полное сечение сравним со вкладом от всей остальной части спектра. Центральная область составляет около половины всего спектра, но наиболее весомый вклад в сечение вносит та часть центральной области, которая соответствует вылету более медленных электронов.

Межэлектронное взаимодействие играет важнейшую роль в реакции (4), потому эта реакция, наряду с двойной фотоионизацией

$$\mathrm{A} + \gamma \ \rightarrow \ \mathrm{A}^{++} + 2e^- \ , \tag{5}$$

представляет определенный интерес при исследовании электронных корреляций в релятивистской области энергий столкновения [10]. Правда, экспериментальные исследования релятивистских процессов на легких элементах или на внешних оболочках тяжелых атомов, где корреляционные эффекты проявляются наиболее ярко, затруднены из-за малости соответствующих сечений. Однако поведение сечений в релятивистской области имеет свои особенности и заслуживает отдельного рассмотрения. Так, отношение сечения двукратной фотоионизации к сечению однократной, будучи постоянным в пределе больших, но нерелятивистских энергий [11–13], возрастает с энергией фотона при переходе в релятивистскую область, стремясь к новому пределу [10].

[1] В работе используется релятивистская система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

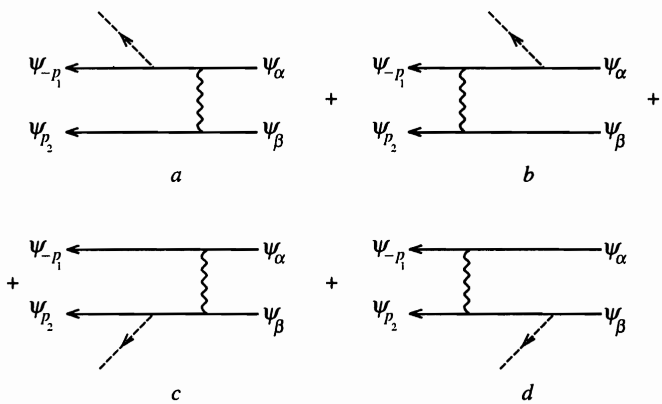

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для процесса (4). Сплошные линии изображают электроны в кулоновском поле ядра, штриховая линия — фотон, волнистая линия — межэлектронное взаимодействие (фотонный пропагатор)

В настоящей работе мы рассмотрели двойную ионизацию K-оболочек атомов и ионов при одноквантовой аннигиляции быстрых позитронов с атомными электронами. Считается, что электроны и позитрон движутся в кулоновском поле ядра с зарядом Z. Межэлектронное взаимодействие учитывается в первом порядке теории возмущений, что оправданно при $Z \gg 1$. В то же время предполагается, что $\alpha Z \ll 1$, и все аналитические выражения получены разложением по этому параметру. Однако в задаче есть еще один кулоновский параметр, $\xi = \alpha Z E/p$ (E, p — энергия и импульс электрона), который не всегда мал. В таких случаях зависимость от параметра ξ учитывалась точно. Найдены энергетический спектр и угловые распределения электронов и фотонов, а также полное сечение процесса. Рассчитана энергетическая зависимость отношения сечений двукратной и однократной ионизации. Приведены простые формулы в высокоэнергетическом пределе в релятивистской и нерелятивистской областях. Показано, что при нерелятивистских энергиях позитронов сечение двукратной ионизации может превзойти сечение однократной ионизации в случае аннигиляции на легких атомах.

2. АМПЛИТУДА И СЕЧЕНИЕ ДВОЙНОЙ ИОНИЗАЦИИ ПРИ ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ В КРАЕВОЙ ОБЛАСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА

Процесс двойной ионизации при однофотонной аннигиляции в первом порядке по межэлектронному взаимодействию изображается восемью диаграммами Фейнмана, четыре из которых приведены на рис. 1. Другие четыре диаграммы отличаются от приведенных знаком и перестановкой состояний ψ_α и ψ_β начальных электронов[2)].

При излучении фотона с энергией $\omega \ll m$ все графики одного порядка, а их вклад в полное сечение в α^{-1} раз меньше сечения безрадиационной аннигиляции (3). Из-за малости этого вклада мы не рассматриваем низкоэнергетическую часть фотонного спектра.

[2)] Буква α используется как для обозначения начального состояния электрона, так и в качестве постоянной тонкой структуры, однако в формулах всегда ясно, в каком смысле она употреблена.

При излучении жесткого фотона и медленного электрона графики *a* и *b* доминируют, так как их фотонный пропагатор значительно превосходит фотонный пропагатор графиков *c* и *d*. Поясним это. На графиках *a* и *b* виртуальный фотон переносит энергию $E_2 - E_\beta = \varepsilon_2 + I$ ($\varepsilon_2 = E_2 - m$ — кинетическая энергия эжектированного электрона, $I = m\alpha^2 Z^2/2$ — энергия связи K-электрона), тогда как на графиках *c* и *d* переносимая энергия равна $E_1 + E_\alpha \simeq E_1 + m$ (E_1 — энергия позитрона). Соответственно, графики *a* и *b* будут значительно больше графиков *c* и *d*.

При испускании высокоэнергетических фотона и электрона нужно учитывать все четыре графика рис. 1 вместе с четырьмя другими, полученными из первых перестановкой начальных (либо конечных) состояний.

Итак, в высокоэнергетической части фотонного спектра можно выделить две области, дающие основной вклад в полное сечение. Это краевая область, примыкающая к предельному значению фотонной энергии $\omega_{max} = E_1 + m$, или область медленных электронов (с кинетической энергией $\varepsilon_2 \sim I$), и центральная (или средняя) область, где энергия реакции делится между фотоном и электроном таким образом, что их суммарный импульс лишь на величину порядка $\eta = m\alpha Z$ отличается от импульса позитрона (импульс q, переданный ядру, мал: $q \sim \eta$). Эти две области надо рассматривать раздельно, так как в первой из них в значительной степени сохраняется картина нерелятивистского приближения, а во второй надо использовать полностью релятивистский подход.

Рассмотрим сначала краевую область фотонного спектра. Здесь надо отбросить графики *c* и *d* ввиду их крайней малости. Сравним теперь графики *a* и *b*. Существенное различие этих графиков связано с разной величиной электронных пропагаторов G_a и G_b в той части спектра, где электрон уносит малую энергию $\varepsilon_2 \sim I$. Пропагатор G_a есть кулоновская функция Грина медленного электрона, тогда как G_b — функция Грина электрона с большой отрицательной энергией ($-E_1$). Поскольку энергия входит в знаменатель пропагатора, график *b* оказывается во много раз меньше графика *a* и должен быть отброшен. Амплитуда двойной ионизации при однофотонной аннигиляции в краевой области дается только графиком *a* и графиком, полученным из *a* перестановкой начальных состояний ψ_α и ψ_β:

$$M_{edg}^{++} = M_{\alpha\beta} - M_{\beta\alpha} . \tag{6}$$

В координатном представлении амплитуду $M_{\alpha\beta}$ можно представить в виде[3)]

$$M_{\alpha\beta} = \int \bar{\phi}(\mathbf{r}')\gamma^\mu \psi_\alpha(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \int \frac{e^{iR\Delta}}{4\pi R} \bar{\psi}_{p_2}(\mathbf{r})\gamma_\mu \psi_\beta(\mathbf{r})d\mathbf{r} , \tag{7}$$

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}') = \int \bar{\psi}_{-p_1}(\mathbf{r}'')\hat{e}^* \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}'')G_C^E(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')d\mathbf{r}'' , \tag{8}$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| , \quad \Delta = E_2 - E_{1s} = \varepsilon_2 + I , \quad E = E_{1s} - \Delta = m - \varepsilon_2 - 2I, \tag{9}$$

$2I$ — энергия ионизации K-оболочки, $\hat{a} = \gamma_0 a_0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{a}$, $\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}$ — матрицы Дирака, $G_C^E(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$ — релятивистская кулоновская функция Грина для электрона с энергией E. В (7) суммирование по μ подразумевается.

[3)] Множители $4\pi\alpha$ от фотонного пропагатора и $\sqrt{4\pi\alpha/2\omega}$ от волновой функции фотона включены в выражение для сечения.

В дальнейшем мы не будем интересоваться поляризационными явлениями, потому ограничимся рассмотрением линейно поляризованных фотонов с импульсом **k** и вектором поляризации **e**. Тогда

$$\hat{e}^* = \hat{e} = -\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{ek} = 0 . \tag{10}$$

Дираковски-сопряженная волновая функция $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$, функции $\bar{\psi}_{-p_1}$ и $\bar{\psi}_{p_2}$ — волновые функции позитрона и электрона сплошного спектра, $E_1, \mathbf{p}_1$ ($E_2, \mathbf{p}_2$) — энергия и импульс позитрона (вылетающего электрона), ψ_α, ψ_β — волновые функции K-электронов с различной ориентацией спина. Волновые функции всех электронов и позитрона — кулоновские. Это является неплохим приближением для ионов и атомов, так как интегралы по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ насыщаются на расстояниях $r \sim r' \sim 1/\eta$ ($\eta = m\alpha Z$ — средний импульс K-электрона), где поле ядра слабо экранировано электронами. Интеграл по r'' сходится на еще меньших расстояниях — при $r'' \sim 1/|\mathbf{k} - \mathbf{p}_1| \sim 1/m$, где поле кулоновское.

Так как в краевой области вылетающий из атома электрон медленный ($p_2 \sim \eta$), векторная часть электронного тока мала по сравнению со скалярной:

$$\bar{\psi}_{p_2}\boldsymbol{\gamma}\psi_\beta \sim \frac{\mathbf{p}_2}{m}\varphi^*_{p_2}\varphi_\beta \ , \quad \bar{\psi}_{p_2}\gamma_0\psi_\beta \sim \varphi^*_{p_2}\varphi_\beta \ . \tag{11}$$

$\varphi_{p_2}, \varphi_\beta$ — нерелятивистские кулоновские функции свободного и связанного электронов.

Дальнейшие вычисления будем проводить в импульсном представлении. При учете (11) выражение для амплитуды $M_{\alpha\beta}$ значительно упрощается:

$$M_{\alpha\beta} = \int \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3}\ F_1(-\mathbf{p}_1, \mathbf{f}, \alpha)D(\mathbf{f})F_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{f}, \beta), \tag{12}$$

$$F_1(-\mathbf{p}_1, \mathbf{f}, \alpha) = \int \frac{d\mathbf{f}'d\mathbf{f}_1}{(2\pi)^6}\langle\bar{\psi}_{-p_1}|\mathbf{f}' - \mathbf{k}\rangle\hat{e}\langle\mathbf{f}'|G_C|\mathbf{f}_1\rangle\gamma_0\langle\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}|\psi_\alpha\rangle \ , \tag{13}$$

$$F_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{f}, \beta) = \int \frac{d\mathbf{f}_2}{(2\pi)^3}\ \langle\bar{\psi}_{p_2} \mid \mathbf{f}_2\rangle\gamma_0\langle\mathbf{f}_2 - \mathbf{f} \mid \psi_\beta\rangle \ , \tag{14}$$

$$D(\mathbf{f}) = \frac{1}{\mathbf{f}^2 - \Delta^2 - i0} \ , \qquad \Delta = \varepsilon_2 + I \ , \tag{15}$$

$\langle\mathbf{f}'|G_C|\mathbf{f}\rangle \equiv G^E_C(\mathbf{f}',\mathbf{f})$ — релятивистская кулоновская функция Грина в импульсном представлении.

Поскольку интегралы (12)–(14) насыщаются при $f \sim f_1 \sim f_2 \sim \eta$, в низшем приближении по αZ можно положить

$$D(\mathbf{f}) = 1/f^2 \tag{16}$$

и использовать нерелятивистские кулоновские функции для K-электронов и эжектированного электрона:

$$
\begin{aligned}
&|\psi_\alpha\rangle = |1s\rangle u_0(\alpha) \ , \quad |\psi_\beta\rangle = |1s\rangle u_0(\beta) \ , \quad \langle\psi_{p_2}| = \bar{u}_{p_2}\langle\varphi_{p_2}|, \\
&u_0(\alpha) = \begin{pmatrix} w(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u_0(\beta) = \begin{pmatrix} w(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad w(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad w(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\bar{u}_{p_2} = (w_2^+, 0) \ , \quad w_2 \equiv w(\lambda_2) \ , \quad w^+(\lambda)w(\lambda) = 1, \\
&|1s\rangle = N_1\left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\right) V_{i\eta}|0\rangle \ , \quad N_1^2 = \frac{\eta^3}{\pi} \ , \quad \eta = m\alpha Z, \\
&\langle\mathbf{f}'|V_{i\eta}|\mathbf{f}\rangle = \frac{4\pi}{(\mathbf{f}'-\mathbf{f})^2+\eta^2}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь u — биспинор Дирака, w — спинор Паули, $|0\rangle$ — плоско-волновое состояние с нулевым импульсом.

Используя (17), получаем для F_2 (14) следующее выражение:

$$
F_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{f}, \beta) = w_2^+ w(\beta) N_1 \left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\right) \langle\varphi_{p_2}|V_{i\eta}|\mathbf{f}\rangle \ . \tag{18}
$$

Расчет F_1 (13) значительно сложнее, так как туда входит релятивистская кулоновская функция Грина с малой кинетической энергией $E - m \sim I$. Для такой функции Грина кулоновский параметр $\xi = \alpha ZE/p \sim 1$, и разложение по нему невозможно. Для релятивистского позитрона, напротив, возможно разложение как по αZ, так и по параметру $\xi_1 = \alpha ZE_1/p_1 \approx \alpha Z$ [14]:

$$
\langle\psi_{-p_1}| = \bar{u}_{-p_1}\left\{\langle-\mathbf{p}_1| - \alpha Z\langle-\mathbf{p}_1|\hat{V}_0 G_1 + \ldots\right\} , \tag{19}
$$

G_1 — релятивистский пропагатор свободного электрона с энергией $-E_1$, $\bar{u}_{-p_1} = u^+_{-p_1}\gamma_0$, u_{-p_1} — биспинор с 4-импульсом $-p_1$. Первый член этого разложения (нулевое приближение по αZ) — плоская волна. Мы оставляем в (19) два члена, так как подстановка в (13) первого члена разложения приводит к нулевому результату в пределе $\alpha Z \to 0$. Обозначим F_{10} вклад плоской волны в интеграл (13). Вычисление с функцией ψ_α из (17) дает

$$
F_{10} = N_1 \bar{u}_{-p_1}\hat{e}U(\mathbf{f})u_0 \ , \quad U(\mathbf{f}) = -\frac{\partial}{\partial\eta}\langle\boldsymbol{\kappa}|G_C V_{i\eta}|-\mathbf{f}\rangle \ , \tag{20}
$$

$$
\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} - \mathbf{p}_1 \ .
$$

В (20) входит матричный элемент от релятивистской кулоновской функции Грина для электрона с малой кинетической энергией. Однако заменить эту функцию Грина на нерелятивистскую нельзя, так как она вычисляется при большом значении одного из импульсов (пользуясь законом сохранения энергии, можно показать, что $\kappa > 2m$). Преобразуем $U(\mathbf{f})$ к такому виду, чтобы гриновский оператор G_C стоял в обкладках нерелятивистских импульсов $f \sim f' \sim \eta$. С этой целью используем уравнение Липпмана–Швингера [15]:

$$
G_C = G - \alpha Z G\hat{V}_0 G_C \ . \tag{21}
$$

Здесь $\hat{V}_0 = \gamma_0 V_0$, $-\alpha Z V_0$ — оператор взаимодействия электрона с кулоновским полем ядра, G — релятивистский гриновский оператор в отсутствие поля. Матричный элемент этого оператора определяется равенством

$$\langle \mathbf{f}|G|\mathbf{f}'\rangle = G(\mathbf{f})(2\pi)^3\delta(\mathbf{f}-\mathbf{f}'),\ G(\mathbf{f}) = \frac{E\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{f} + m}{p^2 - f^2 + i0},\quad p^2 = E^2 - m^2. \tag{22}$$

Заметим, что при $E - m \ll m$, $f \sim \eta$ релятивистский оператор $G(\mathbf{f})$ связан с соответствующим нерелятивистским оператором простым соотношением:

$$G(\mathbf{f}) = G^{nr}(\mathbf{f})\frac{\gamma_0+1}{2}, \quad G^{nr}(\mathbf{f}) = \frac{2m}{p^2 - f^2 + i0}. \tag{23}$$

Подставляя (21) в (20), получим

$$U(\mathbf{f})u_0 = -\frac{\partial}{\partial\eta}G(\boldsymbol{\kappa})\left\{\langle\boldsymbol{\kappa}|V_{i\eta}|-\mathbf{f}\rangle - \alpha Z\int\frac{d\mathbf{f}'}{(2\pi)^3}\langle\boldsymbol{\kappa}|\hat{V}_0|\mathbf{f}'\rangle\langle\mathbf{f}'|G_C V_{i\eta}|-\mathbf{f}\rangle\right\}u_0. \tag{24}$$

Главный вклад в интеграл (24) набирается при $f' \sim \eta$. При таких $\mathbf{f}'$ множитель $\langle\boldsymbol{\kappa}|V_0|\mathbf{f}'\rangle \approx 4\pi/\kappa^2$ выносится из-под знака интеграла, а релятивистская функция G_C сводится к нерелятивистской кулоновской функции Грина G_C^{nr}. Действительно, итерируя уравнение Липпмана–Швингера, получаем

$$G_C u_0 = (G - \alpha Z G\hat{V}_0 G + \ldots)u_0 = (G^{nr} - \alpha Z G^{nr}V_0 G^{nr} + \ldots)u_0 = G_C^{nr}u_0, \tag{25}$$

где мы использовали (23) и равенства

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \left(\frac{\gamma_0+1}{2}\right)^n = \frac{\gamma_0+1}{2}, \quad \frac{\gamma_0+1}{2}u_0 = u_0. \tag{26}$$

Оба члена в фигурных скобках (24) — величины одного порядка[4)], но после взятия производной по η первый член умножится на $2\eta/\kappa^2$, тогда как второй — на величину $\sim 1/\eta$. Поэтому первый член в (24) надо отбросить. Тогда

$$U(\mathbf{f})u_0 \simeq \frac{4\pi\alpha Z}{\kappa^2}G(\boldsymbol{\kappa})\frac{\partial}{\partial\eta}\int\frac{d\mathbf{f}'}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{f}'|G_C^{nr}V_{i\eta}|-\mathbf{f}\rangle u_0. \tag{27}$$

Используя результаты работ [15, 16], можно получить довольно простое выражение для интеграла из (27):

$$J(\eta,\mathbf{f}) = \int\frac{d\mathbf{f}'}{(2\pi)^3}\langle\mathbf{f}'|G_C^{nr}V_{i\eta}|-\mathbf{f}\rangle = \frac{2ipm}{4\pi}I_y\langle 0|V_{py+i\eta}|\mathbf{f}\rangle, \tag{28}$$

$$I_y = \int_1^\infty dy\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{i\xi}, \qquad \xi = \frac{\alpha Z m}{p}.$$

Окончательное выражение для F_{10} принимает вид

[4)] Хотя перед интегралом в (24) и стоит множитель αZ, но сам интеграл $\sim 1/\alpha Z$, как можно убедиться, подставив вместо G_C свободную функцию Грина (22).

$$F_{10} = N_1\bar{u}_{-p_1}\hat{e}\left(1+\frac{\tilde{\kappa}}{2m}\right)u_0\,\frac{4ip\eta m}{\kappa^4}\left(-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)I_y\langle\mathbf{f}|V_{py+i\eta}|0\rangle\ , \tag{29}$$

$\tilde{a} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0\boldsymbol{\gamma}$ — матрица Дирака.

Оценим теперь F_{11} — вклад в интеграл (13) от второго члена (19):

$$F_{11} = \alpha Z N_1\bar{u}_{-p_1}\langle\boldsymbol{\kappa}|V_0|0\rangle\ G_1(-\mathbf{k})\hat{e}\frac{\partial}{\partial\eta}J(\eta,\mathbf{f})u_0 =$$

$$= \frac{4\pi\alpha Z N_1}{\kappa^2(\omega^2-p_1^2)}\ \frac{\partial J(\eta,\mathbf{f})}{\partial\eta}\ \bar{u}_{-p_1}(\omega-\tilde{k})\hat{e}u_0 \tag{30}$$

(ω — энергия фотона).

Суммируя вклады (29),(30), находим амплитуду F_1 (13):

$$F_1(-\mathbf{p}_1,\mathbf{f},\alpha) = F_{10}+F_{11} = -T(\lambda_1,\alpha)\,\frac{\partial J(\eta,\mathbf{f})}{\partial\eta}\ , \tag{31}$$

$$T(\lambda_1,\alpha) = N_1\frac{8\pi\eta}{\kappa^4}\bar{u}_{-p_1}(\lambda_1)\hat{e}\left(1+\frac{\tilde{\kappa}}{2m}+\frac{\tilde{k}-\omega}{2m}\,\frac{\kappa^2}{\omega^2-p_1^2}\right)u_0(\alpha)\ . \tag{32}$$

Величина $T(\lambda_1,\alpha)$ есть амплитуда однофотонной аннигиляции позитрона с поляризацией λ_1 и K-электрона с поляризацией α, вычисленная в низшем порядке по αZ.

Подставляя (16), (18) и (31) в (12), получим

$$M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}I_y\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta'}\int\frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3}\langle\varphi_{p_2}|V_{i\eta'}|\mathbf{f}\rangle\frac{1}{f^2}\langle\mathbf{f}|V_{py+i\eta}|0\rangle\ , \tag{33}$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{ipm}{2\pi}\ N_1T(\lambda_1,\alpha)w_2^+w(\beta)\ . \tag{34}$$

После взятия производных в (33) надо положить $\eta' = \eta$. С помощью равенства

$$\frac{1}{f^2}\ \langle\mathbf{f}|V_{ia}|0\rangle\ =\ \frac{1}{a^2}\ \langle\mathbf{f}|V_0-V_{ia}|0\rangle$$

и операторного тождества [14]

$$\frac{\partial}{\partial a}\ V_{ia}V_{ib}\ =\ V_{i(a+b)}$$

преобразуем (33) к виду

$$M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}I_y\ \frac{\partial}{\partial\mu}\,\frac{1}{(\mu-\eta')^2}\ \langle\varphi_{p_2}|V_{i\mu}-V_{i\eta}|0\rangle\ , \tag{35}$$

$$\mu = 2\eta+ry\ ,\qquad r = -ip = \sqrt{p_2^2+2\eta^2}\ .$$

Матричный элемент $\langle\varphi_{p_2}|V_{ia}|0\rangle$ с кулоновской функцией сплошного спектра φ_{p_2} для действительных a имеет вид [17]

$$\langle\varphi_{p_2}|V_{ia}|0\rangle = \frac{4\pi N_{p_2}}{p_2^2+a^2}\ \exp\left(-2\xi_2\,\mathrm{arctg}\,\frac{p_2}{a}\right)\ , \tag{36}$$

$$N_{p_2}^2 = \frac{2\pi\xi_2}{1-\exp(-2\pi\xi_2)}\ ,\quad \xi_2 = \frac{\eta}{p_2}\ .$$

Введем безразмерный параметр ν и выразим через него другие параметры задачи:

$$\nu = \frac{\varepsilon_2}{I} = \frac{p_2^2}{\eta^2}, \quad \xi_2 = \frac{\eta}{p_2} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \quad i\xi = \frac{\eta}{r} = \frac{1}{\sqrt{\nu+2}}. \tag{37}$$

Перейдем в (35) к новой переменной интегрирования

$$t = \frac{1-y}{1+y}.$$

После подстановки (36) в (35) получаем

$$M_{\alpha\beta} = -K(\nu)\, T(\lambda_1, \alpha) w^+(\lambda_2) w(\beta), \tag{38}$$

$$K(\nu) = N_1 N_{p_2} \frac{m}{\eta^4} J(\nu), \tag{39}$$

$$J(\nu) = \frac{8\zeta^2}{(1+\zeta)^3} \left(\frac{I_1}{\nu+1} - \frac{I_2}{\nu+2} \right), \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{\nu+2}}, \tag{40}$$

$$I_1 = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{\nu}} \operatorname{arctg} \sqrt{\nu} \right) \int_0^1 dt \frac{t^{-\zeta}(1-t)}{(1+st)^3}, \quad s = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \tag{41}$$

$$I_2 = \int_0^1 dt\, \frac{t^{-\zeta}(1-t)^3}{(1+st)^3}\, \phi_1(t)\phi_2(t), \tag{42}$$

$$\phi_1(t) = \exp\left[-\frac{2}{\sqrt{\nu}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\nu}(1-t)}{a+bt} \right], \quad a = \sqrt{\nu+2}+2, \quad b = \sqrt{\nu+2}-2,$$

$$\phi_2(t) = \frac{(3\zeta^2+1)(1-t)^2 + 6\zeta(1-t^2) + 2(1+t)^2}{\left[(2\zeta^2+1)(1-t)^2 + 4\zeta(1-t^2) + (1+t)^2\right]^2}. \tag{43}$$

Дифференциальное сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции, просуммированное по поляризациям фотона (λ_k) и конечного электрона (λ_2) и усредненное по поляризации позитрона (λ_1), имеет вид[5)]

$$d\sigma^{++} = \frac{(4\pi\alpha)^3}{2\omega j} \overline{|M^{++}|^2} \frac{d\mathbf{p}_2 d\mathbf{k}}{(2\pi)^5} \delta(\omega + E_2 - E_1 - 2m), \tag{44}$$

$j = p_1/E_1$ — плотность потока позитронов, M^{++} — амплитуда двойной ионизации при однофотонной аннигиляции.

Сечение для краевой области получается отсюда заменой $\overline{|M^{++}|^2}$ на

$$\overline{|M^{++}_{edg}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \lambda_1 \lambda_2} |M_{\alpha\beta} - M_{\beta\alpha}|^2 = K^2(\nu) \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \lambda_1} \left[|T(\lambda_1, \alpha)|^2 + |T(\lambda_1, \beta)|^2 \right] =$$

$$= 2K^2(\nu) \cdot \frac{1}{4} \sum_{\lambda_k \lambda_1 \lambda_0} |T(\lambda_1, \lambda_0)|^2 = 2K^2(\nu) \overline{|M^+|^2}. \tag{45}$$

[5)] Нормировочные множители $1/\sqrt{2E}$ от электронных волновых функций включены в соответствующие биспиноры u_p, которые нормированы условием $\bar{u}_p u_p = m/E$.

Здесь $\overline{|M^+|^2}$ — просуммированный по поляризации фотона (λ_k) и усредненный по поляризациям позитрона (λ_1) и связанного электрона (λ_0) квадрат амплитуды однофотонной аннигиляции. Дифференциальное сечение однофотонной аннигиляции на двух K-электронах выражается через эту величину:

$$d\sigma^+ = \frac{4\pi\alpha}{\omega j} \overline{|M^+|^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \delta(\omega - E_1 - m) . \tag{46}$$

Равенство (44) справедливо в любой части спектра. Особенностью же краевой части является простая связь между сечениями двукратной и однократной ионизаций, которая усматривается из формул (44)–(46):

$$d\sigma_e^{++} = \frac{2}{\pi} \alpha^2 K^2(\nu) d\mathbf{p}_2 d\sigma^+ . \tag{47}$$

Направим ось z вдоль импульса позитрона $\mathbf{p}_1$. Обозначим через θ_k, φ_k (θ_2, φ_2) полярный и азимутальный углы вылета фотона с импульсом $\mathbf{k}$ (электрона с импульсом $\mathbf{p}_2$), $d\Omega_k$ ($d\Omega_2$) — телесный угол, в который испускается фотон (электрон). Тогда[6)]

$$d\mathbf{p}_2 = mp_2 d\varepsilon_2 d\Omega_2 = \frac{\eta^3}{2}\sqrt{\nu}\, d\nu d\Omega_2 , \tag{48}$$

$$\pi d\sigma^+ = \sigma_0 Z^5 S(\theta_k) d\Omega_k , \quad \sigma_0 = \pi r_0^2 \alpha^4 , \tag{49}$$

$$S(\theta_k) = 2^5 (E_1 + m) \frac{p_1 m^4}{\kappa^6} \left(\frac{E_1 + 2m}{4m} - \frac{m^2}{\kappa^2} \right) \sin^2\theta_k , \quad \kappa = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}| . \tag{50}$$

После подстановки (48), (49) в (47) получаем тройное дифференциальное сечение:

$$\frac{d\sigma_e^{++}}{d\nu\, d\Omega_2 d\Omega_k} = \frac{Q(\nu)}{4\pi Z^2} \frac{d\sigma^+}{d\Omega_k} , \quad Q(\nu) = \frac{8J^2(\nu)}{1 - \exp(-2\pi/\sqrt{\nu})} . \tag{51}$$

Характерной особенностью соотношения (51) является независимость сечения от направления вылета электрона, т. е. медленные электроны, возникающие в процессе двойной ионизации при однофотонной аннигиляции, распределены изотропно по телесному углу. Интегрируя (51) по углам вылета фотона и электрона, находим энергетическое распределение медленных электронов ($\varepsilon_2 \ll m$, или $\nu \ll (\alpha Z)^{-2}$):

$$\frac{d\sigma_e^{++}}{d\nu} = \frac{Q(\nu)}{Z^2} \sigma^+ , \quad \sigma^+ = \sigma_0 Z^5 \varphi(E_1) , \tag{52}$$

$$\varphi(E_1) = \frac{4m^3}{p_1(E_1 + m)^2} \left(\frac{E_1^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{E_1}{m} + \frac{4}{3} - \frac{E_1 + 2m}{p_1} \ln\frac{E_1 + p_1}{m} \right) . \tag{53}$$

Функция $Q(\nu)$ графически изображена на рис. 2. Используя формулы (40)–(42), можно получить значения $Q(\nu)$ при малых и больших ν:

$$Q(0) = 0.168 , \qquad Q(\nu) = \frac{4}{\pi} \nu^{-7/2} \quad \text{при} \quad \nu \gg 1 . \tag{54}$$

---

6) Выражение для сечения однофотонной аннигиляции из [18] может быть сведено к виду (49), (50).

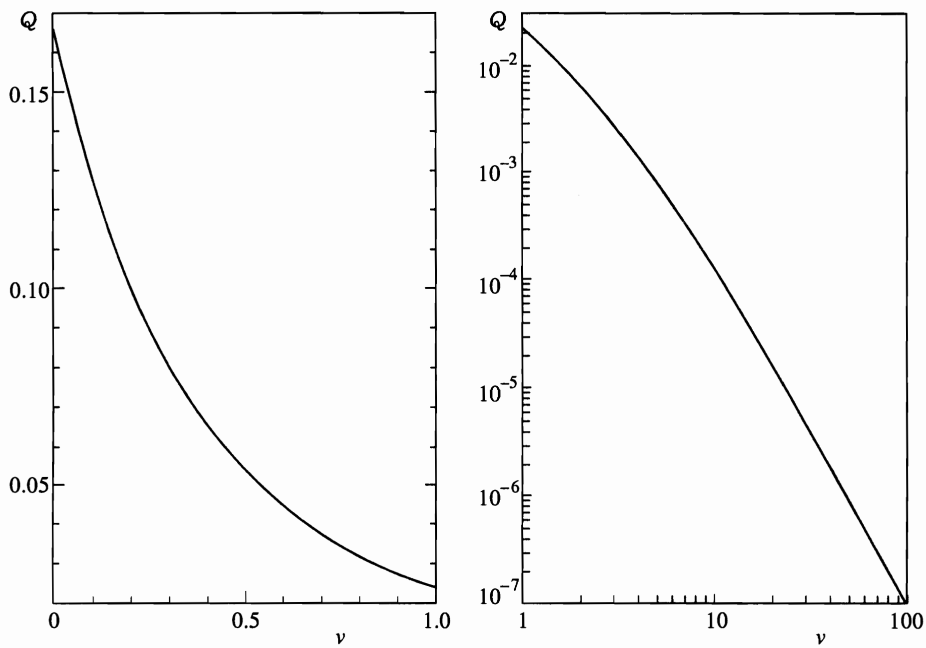

Рис. 2. Энергетический спектр медленных электронов $Q(\nu) = Z^2 d\sigma_e^{++}/\sigma^+ d\nu$, $\nu = \varepsilon_2/I$

Так как $Q(\nu)$ быстро убывает с возрастанием ν, при вычислении вклада от всей краевой области интегрирование по ν можно распространить до ∞:

$$\sigma_e^{++} = \frac{B}{Z^2}\sigma^+ = \sigma_0 Z^3 B\varphi(E_1) , \quad B = \int_0^\infty Q(\nu)d\nu = 0.090 . \tag{55}$$

Отношение $Z^2\sigma_e^{++}/\sigma^+ = B$ является константой, не зависящей ни от энергии налетающего позитрона, ни от заряда ядра.

Угловые распределения электронов и фотонов из краевой области очень просты:

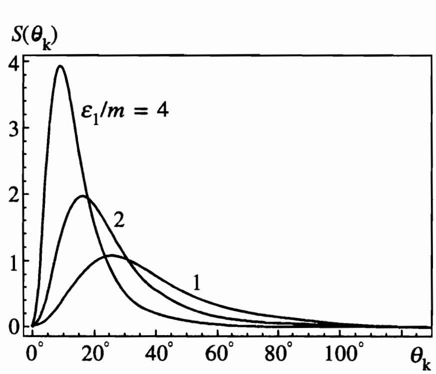

Рис. 3. Угловые распределения фотонов $S(\theta_k) = \pi(\sigma_0 Z^5)^{-1} d\sigma^+/d\Omega_k$, испущенных в процессе (2)

$$\frac{d\sigma_e^{++}}{d\Omega_2} = \frac{\sigma_e^{++}}{4\pi}, \quad \frac{d\sigma_e^{++}}{d\Omega_k} = \frac{B}{Z^2}\frac{d\sigma^+}{d\Omega_k} = B\sigma_0 Z^3 S(\theta_k) . \tag{56}$$

Угловая функция $S(\theta_k)$ для различных энергий позитрона построена на рис. 3. Она имеет максимум при углах $\theta < \pi/2$. Этот максимум сужается и смещается к малым углам с увеличением энергии позитрона. Отсутствует излучение фотонов «вперед», т. е. в направлении падающего позитронного пучка.

3. АМПЛИТУДА И СЕЧЕНИЕ ДВОЙНОЙ ИОНИЗАЦИИ ПРИ ОДНОФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА

Будем называть центральной ту часть энергетического спектра, в которой передаваемый ядру импульс может быть малым ($q \sim \eta$). Существует довольно широкая срединная область спектра, где $q = 0$. Ее границы определяются из условия совместности двух уравнений:

$$\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} = \mathbf{p}_1 , \qquad E_2 + \omega = E_1 + 2m . \tag{57}$$

Решая их, находим

$$\frac{2m\omega_0}{E_0 + p_1} \le \omega \le \frac{2m\omega_0}{E_0 - p_1} , \tag{58}$$

$$\omega_0 = E_1 + m , \qquad E_0 = E_1 + 2m .$$

Здесь ω_0 и E_0 — максимальные энергии, которые могут иметь фотон и электрон, испускаемые в процессе двойной ионизации при однофотонной аннигиляции. В центральной области нужно учитывать все четыре диаграммы рис. 1 и четыре диаграммы с переставленными ψ_α и ψ_β. Вычислим сначала диаграммы *a* и *b* рис. 1 (диаграммы *c* и *d* получаются из них перестановкой $\psi_{-p_1} \leftrightarrow \psi_{p_2}$, $\psi_\alpha \leftrightarrow \psi_\beta$). Так как эжектированный электрон релятивистский, виртуальный фотон переносит большую энергию. Большая энергия будет и у электрона в промежуточном состоянии (у функции Грина). По этой причине в качестве волновых функций позитрона и электрона можно взять плоские волны, а в качестве функции Грина — свободную релятивистскую функцию Грина G. Волновые функции связанных электронов по-прежнему кулоновские. Амплитуды M_a, M_b для рассматриваемых диаграмм имеют вид

$$M_a = \bar{u}_{-p_1}\hat{e}G(\boldsymbol{\kappa})\gamma^\mu \int \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3}\langle \mathbf{q} - \mathbf{f}|\psi_\alpha\rangle D(\mathbf{p}_2 - \mathbf{f})\bar{u}_{p_2}\gamma_\mu\langle \mathbf{f} \mid \psi_\beta\rangle , \tag{59}$$

$$M_b = \bar{u}_{-p_1}\gamma^\mu \int \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{f})\hat{e}\langle \mathbf{q} - \mathbf{f} \mid \psi_\alpha\rangle D(\mathbf{p}_2 - \mathbf{f})\bar{u}_{p_2}\gamma_\mu\langle \mathbf{f} \mid \psi_\beta\rangle . \tag{60}$$

Фотонный пропагатор $D(\mathbf{f})$ определен в (15). В области энергий, где $q \sim \eta$, основной вклад в интегралы (59), (60) дают $f \sim \eta$. Оставляя только главные члены, получим

$$D(\mathbf{p}_2 - \mathbf{f}) \simeq \frac{1}{2m\varepsilon_2} , \qquad G(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{f}) \simeq G(-\mathbf{k}) ,$$

$$M_a = \frac{\phi(\mathbf{q})}{2m\varepsilon_2} \bar{u}_{-p_1} \hat{e} G(\boldsymbol{\kappa}) \gamma^\mu u_0(\alpha) \bar{u}_{p_2} \gamma_\mu u_0(\beta) \ , \tag{61}$$

$$M_b = \frac{\phi(\mathbf{q})}{2m\varepsilon_2} \ \bar{u}_{-p_1} \gamma^\mu G(-\mathbf{k}) \hat{e} u_0(\alpha) \bar{u}_{p_2} \gamma_\mu u_0(\beta) \ , \tag{62}$$

$$\phi(\mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} \ \langle \mathbf{q} - \mathbf{f} | 1s \rangle \langle \mathbf{f} | 1s \rangle \ = \ \left(\frac{4\eta^2}{q^2 + 4\eta^2} \right)^2 \ , \tag{63}$$

$$G(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\gamma_0 E_a - \boldsymbol{\gamma\kappa} + m}{E_a^2 - \boldsymbol{\kappa}^2 - m^2} \approx \frac{\gamma_0 E_a + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}_2 + m}{-4m\varepsilon_2} \ , \quad E_a = m - \varepsilon_2 \ , \tag{64}$$

$$G(-\mathbf{k}) = \frac{\gamma_0 E_b + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} + m}{E_b^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} \approx \frac{\gamma_0 E_b + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} + m}{-2m\omega} \ , \quad E_b = m - \omega \ . \tag{65}$$

При получении (61), (62) мы положили $q = 0$ всюду, кроме множителя $\phi(\mathbf{q})$. Сечение процесса пропорционально $\phi^2(\mathbf{q})$. Именно с этим множителем связан особый статус центральной области, поскольку здесь $\phi^2(\mathbf{q}) \sim 1$, тогда как вне этой области $\phi^2(\mathbf{q}) \sim \sim (\alpha Z)^8$. Следует иметь в виду, что при $q \gg \eta$ выражения (61), (62) непригодны, однако заключение о малости вклада этих областей в сечение (за исключением очень узкой краевой области $p_2 \sim \eta$, рассмотренной в предыдущем разделе) остается в силе.

Обозначим буквами со штрихом диаграммы рис. 1 с переставленными начальными состояниями. Если в диаграммах a, b (a', b') переставить состояния ψ_{-p_1} и ψ_{p_2}, то получим диаграммы c', d' (c, d) соответственно. Полную амплитуду двойной ионизации при однофотонной аннигиляции, учитывающую вклад всех восьми диаграмм Фейнмана, можно представить в виде

$$M^{++} \ = \ M(-p_1, p_2) - M(p_2, -p_1) \ , \tag{66}$$

$$M(-p_1, p_2) = M_a + M_b - M_{a'} - M_{b'} \ , \quad M(p_2, -p_1) = M_{c'} + M_{d'} - M_c - M_d \ .$$

Амплитуду процесса в центральной области обозначим M_{centr}^{++}. Она получается из (66), если в качестве M_a, M_b и т. д. взять выражения (61), (62) и подобные им. Квадрат амплитуды (66), просуммированный и усредненный по поляризациям частиц, как в (44), (45), после длительной процедуры вычисления следов, принимает неожиданно компактный вид:

$$\overline{|M_{centr}^{++}|^2} \ = \ \frac{\phi^2(\mathbf{q}) W(\omega)}{(2m)^4 E_1 E_2} \ , \tag{67}$$

$$W(\omega) = \left(\frac{\varepsilon_2 + \omega_0}{\varepsilon_2 \omega_0} \right)^2 \left\{ E_1 E_2 - m^2 - p_{1n} p_{2n} + \left(\frac{m\omega}{\varepsilon_2 \omega_0} \right)^2 (E_1 E_2 + m^2 + p_{1n} p_{2n} - 2\varepsilon_2 \omega_0) \right\} , \tag{68}$$

$$p_{1n} \ = \ \mathbf{p}_1 \mathbf{n} = \frac{E_1^2 - E_2^2 + \omega^2}{2\omega} \ , \quad p_{2n} = \mathbf{p}_2 \mathbf{n} = \frac{E_1^2 - E_2^2 - \omega^2}{2\omega} \ , \tag{69}$$

$$\mathbf{n} \ = \ \mathbf{k}/k \ , \qquad \varepsilon_2 + \omega \ = \ \omega_0 \ .$$

Выражение (68) можно еще упростить[7)], если перейти к безразмерным величинам $x = \omega/\omega_0$ и $\gamma = m/\omega_0$:

[7)] Мы приводим формулу (68), потому что из нее, используя перекрестную инвариантность, легко получить формулу для квадрата амплитуды релятивистского двойного фотоэффекта.

$$W(\omega) \equiv W(x) = \gamma \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2 \left\{2(x-\gamma)+ \left[1- \left(\frac{\gamma x}{1-x}\right)^2\right] \left[4\frac{1-x}{x} - \gamma \left(\frac{2-x}{x}\right)^2\right]\right\}. \quad (70)$$

Подставив в (44) вместо $\overline{|M^{++}|^2}$ выражение (67), получим дифференциальное сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции в центральной части спектра:

$$d\sigma_c^{++} = \frac{\alpha r_0^2}{16\pi^2}\, \phi^2(\mathbf{q}) W(x)\, \frac{d\Gamma}{m^2 p_1}\,, \quad (71)$$

$$d\Gamma = \frac{1}{E_2\omega}\, d\mathbf{p}_2 d\mathbf{k}\; \delta(E_2+\omega-E_0)\,, \qquad E_0 = E_1 + 2m\,.$$

До выполнения интегрирования с энергетической δ-функцией удобно перейти от переменной $\mathbf{p}_2$ к переменной $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{k} - \mathbf{p}_1$, заменив $d\mathbf{p}_2$ на $d\mathbf{q}$. При фиксированных Ω_k (направлении вылета фотона) и $\mathbf{q}$ энергия электрона E_2 зависит от ω. Поэтому после интегрирования по ω надо сделать замену

$$d\omega\delta(E_2(\omega)+\omega-E_0) \longrightarrow \left|\frac{\partial E_2}{\partial\omega} + 1\right|^{-1}, \quad (72)$$

где производная $\partial E_2/\partial\omega$ берется при значении ω, являющемся корнем уравнения

$$E_2(\omega) + \omega - E_0 = 0\,. \quad (73)$$

Учитывая, что при интегрировании по $\mathbf{q}$ существенны только малые $q \sim \eta$ (центральная область), находим

$$\omega = \omega(t_k) = \frac{2m\omega_0}{E_0 - p_1 t_k}\,, \qquad t_k = \cos\theta_k\,, \quad (74)$$

$$d\Gamma = \frac{\omega^2}{2m\omega_0}\, d\mathbf{q} d\Omega_k\,. \quad (75)$$

Подставляя (75) в (71) и интегрируя по $\mathbf{q}$, получим угловое распределение фотонов:

$$\frac{d\sigma_c^{++}}{d\Omega_k} = \frac{\sigma_0 Z^3}{32\pi}\frac{\omega_0}{p_1}\, x^2 W(x)\,, \qquad x = x(\theta_k)\,. \quad (76)$$

Соотношение (74) позволяет связать dt_k с dx:

$$dt_k = \frac{2m}{p_1}\frac{dx}{x^2}, \quad (77)$$

и перейти от углового распределения (76) к энергетическому:

$$\frac{d\sigma_c^{++}}{dx} = \frac{\sigma_0 Z^3}{8}\frac{m}{\varepsilon_1}\, W(x)\,, \qquad \varepsilon_1 = E_1 - m\,. \quad (78)$$

На основании (74) заключаем, что $x_1 \le x \le x_2$, где

$$x_1 = \frac{2m}{E_0 + p_1}\,, \qquad x_2 = \frac{2m}{E_0 - p_1}\,. \quad (79)$$

Интегрируя (78) по x, находим вклад всей центральной области в полное сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции:

$$\sigma_c^{++} = \sigma_0 Z^3 f(E_1) , \qquad f(E_1) = \frac{1}{8}\,\frac{m}{\varepsilon_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} W(x)dx . \tag{80}$$

Поскольку в области $\mathbf{q} = 0$ углы θ_k, θ_2 и энергия фотона ω связаны между собой соотношением

$$t_k = \frac{p_1 - p_2 t_2}{\omega} \qquad \left(t_2 = \cos\theta_2 = \frac{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}{p_2 p_1}\right), \tag{81}$$

следующим из (57), можно в качестве независимой переменной взять угол вылета электрона θ_2 и получить электронное угловое распределение. Для этого выразим ω и $d\omega$ через t_2 и dt_2 :

$$\omega = \omega(t_2) = E_0 g \pm \sqrt{(E_0 g)^2 - h^2} , \quad d\omega = \frac{p_1 p_2^2 dt_2}{E_0 p_2 - p_1 E_2 t_2} , \tag{82}$$

$$g = \frac{\omega_0^2 - (p_1 t_2)^2}{E_0^2 - (p_1 t_2)^2} , \quad h^2 = \frac{\omega_0^4 - (p_0 p_1 t_2)^2}{E_0^2 - (p_1 t_2)^2} , \quad p_0^2 = E_0^2 - m^2 . \tag{83}$$

В (82) берется знак «+» для $\pi/2 \le \theta_2 \le \pi$ и знак «−» для $0 \le \theta_2 \le \pi/2$. Подставляя (82) в (78), получаем угловое распределение быстрых электронов:

$$\frac{d\sigma_c^{++}}{d\Omega_2} = \frac{\sigma_0 Z^3}{16\pi}\,\frac{m}{p_1}\,\frac{p_2^2 W(x)}{E_0 p_2 - p_1 E_2 t_2} . \tag{84}$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Угловые распределения фотонов и электронов, принадлежащих центральной части энергетического спектра, показаны на рис. 4. Фотонная угловая функция $Y(\theta_k) = A^{-1} d\sigma_c^{++}/d\Omega_k$, $A = \sigma_0 Z^3$, построена по (76) для двух значений кинетической энергии позитрона ε_1: $m, 2m$. Электронная угловая функция $Y(\theta_2) = A^{-1} d\sigma_c^{++}/d\Omega_2$ построена по (84) для трех значений ε_1: $m, 2m, 4m$. Значения ε_1 в единицах m указаны на кривых. Сравнивая фотонные и электронные угловые спектры, замечаем, что фотоны летят преимущественно «вперед», тогда как электроны распределены по углам вылета более равномерно. Напомним, что в краевой области вероятность излучения фотона «вперед» равняется нулю, а электроны испускаются изотропно.

Энергетические спектры фотонов (78) для трех значений ε_1 приведены на рис. 5. Каждая кривая заключена в интервале $x_1(\varepsilon_1) \le x \le x_2(\varepsilon_1)$. Чтобы судить о поведении величины $d\sigma_c^{++}/dx$ вне этого интервала, надо проинтегрировать (71) по углам вылета фотона и электрона. Можно показать, что при таком методе расчета мы придем к формуле

$$\frac{d\sigma_c^{++}}{dx} = A\,\frac{m}{8\varepsilon_1}\,W(x)v(x),$$

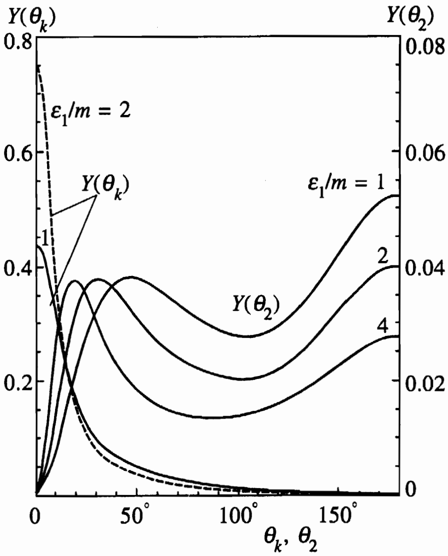

Рис. 4

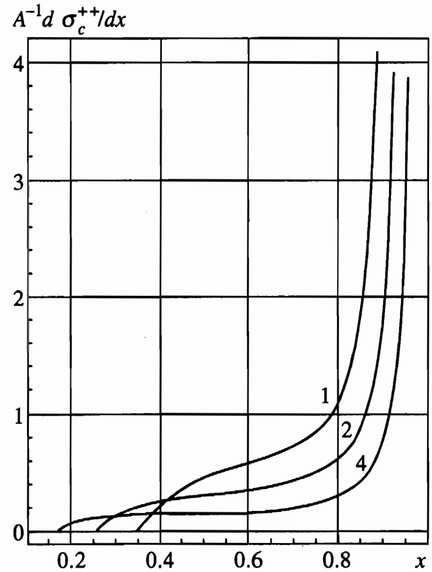

Рис. 5

Рис. 4. Угловые распределения фотонов $Y(\theta_k) = A^{-1}d\sigma_c^{++}/d\Omega_k$ и электронов $Y(\theta_2) = A^{-1}d\sigma_c^{++}/d\Omega_2$, принадлежащих центральной части энергетического спектра, $A = \sigma_0 Z^3$

Рис. 5. Распределение фотонов по энергии в центральной части спектра, $A = \sigma_0 Z^3$. Значения кинетической энергии позитрона в единицах массы электрона указаны на кривых

где множитель $v(x)$ равен единице при $x_1 < x < x_2$ и уменьшается на 2–3 порядка при удалении на $\Delta x \sim \alpha Z$ от этого интервала.

Полное сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции является суммой вкладов от краевой (55) и центральной (80) областей энергетического спектра:

$$\sigma^{++} = \sigma_e^{++} + \sigma_c^{++} = \sigma_0 Z^3 [B\varphi(E_1) + f(E_1)]. \tag{85}$$

Отношение сечений двукратной (85) и однократной (52) ионизаций есть

$$R = \frac{\sigma^{++}}{\sigma^{+}} = \frac{B + \beta(E_1)}{Z^2}, \tag{86}$$

$$\beta(E_1) = f(E_1)/\varphi(E_1). \tag{87}$$

Функции $f(E_1)$, $\varphi(E_1)$ и $\beta(E_1)$ представлены на рис. 6. Функции $f(E_1)$ и $\beta(E_1)$ монотонно убывают с увеличением E_1, тогда как $\varphi(E_1)$ имеет максимум при $E_1 \approx 2m$. Исследуем аналитически поведение этих функций при малых и больших энергиях ε_1.

При $I \ll \varepsilon_1 \ll m$ (условие $\eta \ll p_1 \ll m$ также должно быть выполнено) находим

$$f(E_1) \simeq \frac{8}{27}\frac{m}{p_1}, \quad \varphi(E_1) \simeq \frac{4}{3}\frac{p_1}{m}, \quad \beta(E_1) \simeq \frac{2}{9}\left(\frac{m}{p_1}\right)^2 = \frac{1}{9}\frac{m}{\varepsilon_1}. \tag{88}$$

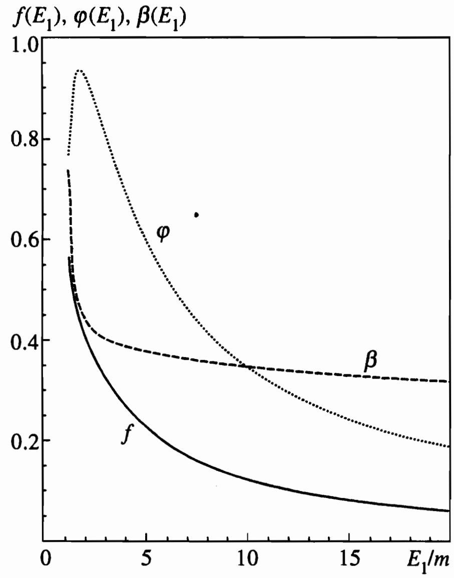

Рис. 6. Зависимость от энергии позитронов E_1 полных сечений двукратной и однократной ионизаций и их отношения: $f(E_1) = \sigma_c^{++}/\sigma_0 Z^3$, $\varphi(E_1) = \sigma^+/\sigma_0 Z^5$, $\beta(E_1) = Z^2\sigma_c^{++}/\sigma^+$

Интересно, что для малых Z и малых ε_1 величина R может стать больше единицы, т. е. двукратная ионизация становится более вероятной, чем однократная (для He потенциал ионизации $I \sim 10^{-4}m$ и при $\varepsilon_1 = 10^{-2}m$ отношение сечений $R \approx 2.5$). Такой результат целиком обусловлен особой ролью центральной части энергетического спектра. Излучение двух частиц (фотона и электрона) дает возможность процессу (4) протекать без передачи ядру большого импульса, что приводит к увеличению сечения. В процессе же (2) уменьшение импульса позитрона p_1 приводит к росту передаваемого ядру импульса q. В результате сечение однофотонной аннигиляции в нерелятивистской области убывает вместе с p_1 ($\sim p_1/m$), тогда как сечение двойной ионизации возрастает при уменьшении $p_1(\sim m/p_1)$.

При $E_1 \gg m$ можно получить асимптотические разложения по обратным степеням E_1 :

$$\begin{aligned}
f(E_1) &\simeq \frac{m}{E_1}\left[1 + \frac{m}{4E_1}\left(11\ln\frac{E_1}{m} + 6\ln 2 - 23 + \frac{1}{6}\right)\right],\\
\varphi(E_1) &\simeq \frac{4m}{E_1}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{m}{E_1}\right),\\
\beta(E_1) &\simeq \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{m}{E_1}\left(11\ln\frac{E_1}{m} + 6\ln 2 - \frac{35}{2}\right)\right],\\
R(E_1) &\xrightarrow[E_1\to\infty]{} \frac{1}{Z^2}\left(B + \frac{1}{4}\right) = \frac{0.340}{Z^2}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Как видно из (89), функция $\beta(E_1)$ очень медленно выходит на асимптотику: даже при $E_1/m = 100$ величина $\beta(E_1)$ отличается от своего асимптотического значения $1/4$ на 10%.

Хотя для высоких значений Z мы не можем рассчитывать на точные результаты, оценим полное сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции для $Z = 82$, $E_1 = 2m$ и сравним его с соответствующим сечением двойной ионизации K-оболочки в безрадиационной аннигиляции (3) [8, 9]. Так как для тяжелых атомов нормировочные множители N_{p_2} и N_{-p_1} электронной и позитронной волновых функций заметно отличаются от единицы, мы сохраним их в формулах для сечения (как и в работах [8, 9]). Тогда (85) модифицируется следующим образом:

$$\sigma^{++} = N^2_{p_2} N^2_{-p_1} \sigma_0 Z^3 \left[B\varphi(E_1) + f(E_1) \right], \tag{90}$$

$$N^2_{-p_1} = \frac{2\pi\xi_1}{\exp(2\pi\xi_1) - 1}, \quad \xi_1 = \alpha Z \frac{E_1}{p_1},$$

$N^2_{p_2}$ определено в (36).

Расчет по этой формуле дает

$$\sigma^{++}(Z = 82,\ E_1 = 2m) = 4.3 \cdot 10^{-29}\ \text{см}^2 .$$

Для процесса (3) при тех же условиях имеем [8, 9][8)]

$$\sigma \simeq 1.8 \cdot 10^{-29}\ \text{см}^2 .$$

Таким образом, несмотря на дополнительную малость α, связанную с излучением фотона, сечение двойной ионизации при однофотонной аннигиляции оказалось больше сечения безрадиационной аннигиляции даже для тяжелых элементов. С уменьшением Z это превосходство усиливается, достигая нескольких порядков при малых Z. Причиной такого поведения являются два фактора: а) фотон, которым обмениваются электроны, в процессе (4) значительно менее виртуален, чем в процессе (3); б) излучение фотона в процессе (4) существенно уменьшает импульс, передаваемый ядру.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить В. Г. Горшкова и Л. Н. Лабзовского за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. T. Nagatomo, Y. Nakayama, K. Morimoto, and S. Shimizu, Phys. Rev. Lett. **32**, 1158 (1974).
2. В. Г. Горшков, А. И. Михайлов, С. Г. Шерман, ЖЭТФ **72**, 32 (1977).
3. W. R. Johnson, D. J. Buss, and C. O. Carroll, Phys. Rev. **135**, A1232 (1964); W. R. Johnson, Phys. Rev. **159**, 61 (1967).
4. H. Mazaki, M. Nishi, and S. Shimizu, Phys. Rev. **171**, 408 (1968).
5. K. W. Broda and W. R. Johnson, Phys. Rev. A **6**, 1693 (1972).
6. H. S. W. Massey and E. H. S. Burhop, Proc. Roy. Soc. A **167**, 53 (1938).
7. S. Shimizu, T. Mukoyama, and Y. Nakayama, Phys. Rev. **173**, 405 (1968).
8. A. I. Mikhailov and S. G. Porsev, J. Phys. **B25**, 1097 (1992).
9. А. И. Михайлов, С. Г. Порсев, ЖЭТФ **105**, 828 (1994).
10. E. G. Drukarev and F. F. Karpeshin, J. Phys. B **9**, 399 (1976).
11. F. W. Byron and C. J. Joachain, Phys. Rev. **164**, 1 (1967).

[8)] Сечение, приведенное в [9], должно быть умножено на 2.

12. T. Aberg, Phys. Rev. A **2**, 1726 (1970).
13. M. Ya. Amusia, E. G. Drukarev, V. G. Gorshkov, and M. P. Kazachkov, J. Phys. B **8**, 1248 (1975).
14. V. G. Gorshkov, A. I. Mikhailov, and V. S. Polikanov, Nucl. Phys. **55**, 273 (1964).
15. В. Г. Горшков, ЖЭТФ **47**, 352 (1964).
16. В. Г. Горшков, В. С. Поликанов, Письма в ЖЭТФ **9**, 464 (1969).
17. М. Я. Амусья, А. И. Михайлов, ЖЭТФ **111**, 862 (1997).
18. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Физматгиз, Москва (1959).