ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 3, стр. 918–929

К ТЕОРИИ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко**

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
310108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 14 августа 1997 г.

Исследована бозе-эйнштейновская конденсация идеального газа бозонов, обладающих спином, во внешнем магнитном поле. Дано обобщение теории слабонеидеального бозе-газа Боголюбова на тот случай, когда бозоны обладают спином и находятся во внешнем магнитном поле. Определен спектр квазичастиц в этом случае и сформулирован критерий сверхтекучести бозонного газа. Определена намагниченность слабонеидеального бозе-газа. Сформулирован метод исследования кинетических процессов в слабонеидеальном бозе-газе.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно были выполнены тонкие экспериментальные исследования [1], которые доказали существование замечательного явления — бозе-эйнштейновской конденсации для идеального газа, предсказанной Эйнштейном еще в 1925 г. Тщательность и точность проведенных экспериментов при температуре порядка $2 \cdot 10^{-8}$ К позволяют надеяться, что возможно проведение исследований влияния внешнего магнитного поля на бозе-эйнштейновскую конденсацию, которое должно характеризоваться специфическими особенностями. В этой связи представляет интерес исследовать явление бозе-эйнштейновской конденсации в том случае, когда бозоны обладают спином и находятся во внешнем магнитном поле.

В настоящей статье мы рассмотрим эту задачу как для идеального, так и для неидеального бозе-газа. Заметим, что если бозоны обладают электрическим зарядом, то, вообще говоря, необходимо учитывать не только парамагнетизм газа, но и диамагнетизм Ландау, обусловленный квантованием движения в магнитном поле. Однако наличие квантования в случае идеального бозе-газа приводит к невозможности бозе-эйнштейновской конденсации в присутствии магнитного поля (см. далее). Поэтому мы в дальнейшем будем считать частицы нейтральными и учитывать только парамагнетизм атомов.

Мы рассмотрим сначала бозе-эйнштейновскую конденсацию для идеального газа, находящегося в постоянном магнитном поле, а затем исследуем слабонеидеальный бозе-газ частиц, обладающих спином, в магнитном поле и обобщим известные результаты Боголюбова [2], относящиеся к слабонеидеальному бозе-газу бесспиновых частиц.

*E-mail: slusarenko@kipt.kharkov.ua

2. БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКАЯ КОНДЕНСАЦИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Переходя к исследованию бозе-эйнштейновской конденсации для идеального газа в магнитном поле, когда нейтральные атомы газа обладают спином S, будем исходить из следующего выражения для функции распределения бозонов:

$$N_{S_Z p}(\beta,\zeta) = \left\{\exp\left[\beta(\varepsilon_p - \mu H S_Z - \zeta)\right] - 1\right\}^{-1}, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_p = p^2/2m$ — кинетическая энергия частицы с импульсом $\mathbf{p}$, S_Z — проекция спина частицы на направление магнитного поля $\mathbf{H}$, $S\mu > 0$ — магнитный момент, β — обратная температура и ζ — химический потенциал. Так как функция распределения положительна, то всегда должно выполняться условие $\varepsilon_p - \mu H S_Z - \zeta > 0$, причем химический потенциал ζ должен определяться из соотношения (ср. с [3])

$$n = \frac{N}{\mathscr{V}} = \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{S_Z=-S}^{S} \sum_p \left\{\exp\left[\beta(\varepsilon_p - \mu H S_Z - \zeta)\right] - 1\right\}^{-1} \tag{2.2}$$

(n — плотность газа). С уменьшением температуры каждое слагаемое в (2.2) уменьшается. Так как величина n фиксирована, то с уменьшением температуры величина ζ, будучи всегда меньше $-\mu H S$ ($\zeta < -\mu H S$), должна увеличиваться. Температура бозе-конденсации T_0 определяется как температура, при которой химический потенциал ζ достигает значения $-\mu H S$ ($\zeta = -\mu H S$). Эта температура находится из уравнения

$$n = \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{S_Z=-S}^{S} \sum_p \left\{\exp\left[\beta_0\left(\varepsilon_p - \mu H(S_Z - S)\right)\right] - 1\right\}^{-1}. \tag{2.3}$$

При температуре $T < T_0$ функция распределения надконденсатных частиц определяется выражением

$$N_{S_Z p}(\beta, -\mu H S) = \left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon_p - \mu H(S_Z - S)\right)\right] - 1\right\}^{-1}, \quad T < T_0, \tag{2.4}$$

причем конденсат будут образовывать частицы с наибольшей проекцией спина S. Плотность конденсатных частиц n_0 будет определяться формулой

$$n_0 = n - \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{S_Z=-S}^{S} \sum_p \left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon_p - \mu H(S_Z - S)\right)\right] - 1\right\}^{-1}. \tag{2.5}$$

Приведем теперь формулы для намагниченности газа бозонов:

$$m = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathscr{V}}\mu \displaystyle\sum_{S_Z=-S}^{S} S_Z \sum_p \left\{\exp\left[\beta(\varepsilon_p - \mu H S_Z - \zeta)\right] - 1\right\}^{-1}, & T > T_0, \\ \mu n_0 S + \dfrac{1}{\mathscr{V}}\mu \displaystyle\sum_{S_Z=-S}^{S} S_Z \sum_p \left\{\exp\left[\beta(\varepsilon_p - \mu H(S_Z - S))\right] - 1\right\}^{-1}, & T < T_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Рассмотрим два предельных случая: $\mu H \ll T$, $\mu H \gg T$ ($T < T_0$). В первом предельном случае имеет место обычная бозе-конденсация (если не учитывать малых поправок) и намагниченность определяется формулой

$$m = \mu n_0 S. \tag{2.7}$$

Во втором предельном случае намагниченность определяется выражением

$$m = \mu n_0 S + \mu S \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_p \{\exp(\beta\varepsilon_p) - 1\}^{-1},$$

или, с учетом (2.3), формулой

$$m = \mu n S. \tag{2.8}$$

Таким образом, при слабых полях намагниченность определяется плотностью только конденсатных частиц, в то время как в сильных магнитных полях намагниченность определяется полной плотностью частиц.

Приведем теперь выражение для температуры перехода T_0 в случае слабых и сильных магнитных полей. В случае слабых магнитных полей температура перехода определяется обычной формулой

$$T_0 = \frac{1}{\mathscr{V}} \left\{ \frac{4\pi^2 n\hbar^3}{(2S+1)\Gamma(3/2)\tilde{\zeta}(3/2)} \right\}^{2/3}, \quad T_0 \gg \mu H, \tag{2.9}$$

где $\Gamma(x)$, $\tilde{\zeta}(x)$ — гамма-функция и дзета-функция Римана соответственно. В случае сильных магнитных полей справедлива формула

$$T_0 = \frac{1}{\mathscr{V}} \left\{ \frac{4\pi^2 n\hbar^3}{\Gamma(3/2)\tilde{\zeta}(3/2)} \right\}^{2/3}, \quad T_0 \ll \mu H. \tag{2.10}$$

Мы видим, что температура бозе-конденсации в случае сильных магнитных полей выше, чем температура бозе-конденсации в отсутствие поля.

Если бозоны обладают электрическим зарядом, то необходим учет квантования Ландау движения бозонов поперек магнитного поля. Плотность частиц в этом случае определяется формулой

$$n = \frac{eH}{c(2\pi\hbar)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{S_Z=-S}^{S} \int dp_z \left\{ \exp\left[\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} + \left(k+\frac{1}{2}\right)\omega_H + \mu H S_Z - \zeta\right)\right] - 1 \right\}^{-1},$$

где $\omega_H = eH/2mc$ — ларморовская частота. Так как член суммы, соответствующий $k = 0$, $\zeta = \mu H S + \omega_H/2$, расходится при малых p_z, то бозе-конденсация в этом случае не будет происходить. Иными словами, чтобы явление бозе-конденсации в идеальном газе при наличии магнитного поля имело место, необходимо, чтобы бозоны были нейтральными (см. [4]).

3. ВЫДЕЛЕНИЕ КОНДЕНСАТА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Перейдем теперь к исследованию неидеального бозе-газа в магнитном поле.

Кинетическая энергия бозонов и их взаимодействие с магнитным полем $\mathbf{H}$ определяются во вторичном квантовании формулой

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha}\int d^3r \nabla\psi^+_\alpha(\mathbf{r})\nabla\psi_\alpha(\mathbf{r}) - \mu\mathbf{H}\sum_{\alpha,\beta}\int d^3r\psi^+_\alpha(\mathbf{r})\mathbf{S}_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{r}), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$ — матрица спина бозонов и $\psi^+_\alpha(\mathbf{r})$, $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ — операторы рождения и уничтожения бозона в точке $\mathbf{r}$ с проекцией спина α, связанные с операторами рождения и уничтожения $a^+_{p\alpha}$, $a_{p\alpha}$ бозонов с импульсом $\mathbf{p}$ и проекцией спина α соотношениями

$$\psi^+_\alpha(\mathbf{r}) = \mathscr{V}^{-1/2}\sum_p a^+_{p\alpha}\exp(-i\mathbf{pr}), \qquad \psi_\alpha(\mathbf{r}) = \mathscr{V}^{-1/2}\sum_p a_{p\alpha}\exp(i\mathbf{pr}). \tag{3.2}$$

В терминах операторов $a^+_{p\alpha}$, $a_{p\alpha}$ оператор $\mathscr{H}_0$ имеет вид

$$\mathscr{H}_0 = \sum_\alpha\sum_p \varepsilon_\alpha(\mathbf{p})a^+_{p\alpha}a_{p\alpha}, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu H\alpha.$$

Теперь нужно учесть взаимодействие между бозонами. Будем исходить из следующего вида энергии взаимодействия двух бозонов:

$$V = V_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + V_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 + V_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{nS}_1)(\mathbf{nS}_2), \tag{3.4}$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы двух бозонов, $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ — их спины и $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Функции $V_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $V_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $V_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ зависят только от $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Первое слагаемое в (3.4) определяет обычное потенциальное взаимодействие между частицами. Второе слагаемое описывает спин-спиновое обменное взаимодействие, а третье слагаемое связано с возможностью наличия так называемых «тензорных сил». Магнито-дипольное взаимодействие также описывается гамильтонианом (3.4).

Гамильтониан взаимодействия бозе-газа во вторичном квантовании определяется формулой

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_4}\int d^3r_1\int d^3r_2\psi^+_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1)\psi^+_{\alpha_2}(\mathbf{r}_2)V_{\alpha_1\ldots\alpha_4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\psi_{\alpha_3}(\mathbf{r}_2)\psi_{\alpha_4}(\mathbf{r}_1), \tag{3.5}$$

где величина $V_{\alpha_1\ldots\alpha_4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ дается выражением (3.4). Этот гамильтониан в терминах операторов $a^+_{p\alpha}$, $a_{p\alpha}$ имеет вид

$$V = \frac{1}{2\mathscr{V}}\sum_{p_1\ldots p_4}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_4}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_4}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_4)\delta_{p_1+p_2;p_3+p_4}a^+_{p_1\alpha_1}a^+_{p_2\alpha_2}a_{p_3\alpha_3}a_{p_4\alpha_4}, \tag{3.6}$$

где

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_4}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_4) = U_1(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)\delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3} + U_2(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)S^i_{\alpha_1\alpha_4}S^i_{\alpha_2\alpha_3} + \\ + U_4(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)\frac{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)_i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)_j}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_4)^2}S^i_{\alpha_1\alpha_4}S^j_{\alpha_2\alpha_3} \tag{3.7}$$

и функции $U_l(\mathbf{p}), l = 1,2,3$, связаны с фурье-образами

$$V_l(\mathbf{p}) = \int d^3r V_l(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{pr}) \tag{3.8}$$

функций $V_l(\mathbf{r})$ соотношениями

$$U_1(\mathbf{p}) = V_1(\mathbf{p}),$$

$$U_2(\mathbf{p}) = V_2(\mathbf{p}) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 V_3(\mathbf{p})}{\partial p_l \partial p_l} - \frac{p_i p_j}{p^2}\frac{\partial^2 V_3(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}\right\}, \tag{3.9}$$

$$U_3(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_3(\mathbf{p})}{\partial p_l \partial p_l} - \frac{3}{2}\frac{p_i p_j}{p^2}\frac{\partial^2 V_3(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Полный гамильтониан бозе-газа $\mathscr{H}$ определяется формулой (см. (3.3), (3.6)–(3.9))

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + V. \tag{3.10}$$

Он содержит квадратичные члены и члены четвертого порядка относительно операторов рождения и уничтожения бозонов.

Равновесные свойства бозе-газа описываются распределением Гиббса

$$w = \exp\left[\Omega - \beta\left(\mathscr{H} - \zeta N\right)\right], \tag{3.11}$$

где Ω — термодинамический потенциал, N — оператор числа частиц, ζ — химический потенциал, β — обратная температура.

Согласно идее Боголюбова [2], мы должны в операторе $\mathscr{H} - \zeta N$ выделить слагаемые с операторами рождения и уничтожения бозонов с минимальной энергией, т. е. бозонов с импульсом равным нулю и с проекцией спина S. Эти операторы a^+_{0S}, a_{0S} соответствуют макроскопически большому числу заполнения n_{0S} (обстоятельство, отражающее явление бозе-конденсации) и поэтому могут быть заменены на C-числа:

$$a^+_{0S} \to \sqrt{n_{0S}}, \qquad a_{0S} \to \sqrt{n_{0S}}, \tag{3.12}$$

где n_{0S} — макроскопически большое число частиц конденсата. В результате оператор $\mathscr{H} - \zeta N$ примет вид

$$\mathscr{H} - \zeta N \equiv H = H_2 + H_3 + H_4, \tag{3.13}$$

где гамильтониан H_2 квадратичен по операторам рождения и уничтожения бозонов

$$H_2(n_{0S}) = f(n_{0S}, H) + \frac{\partial f(n_{0S}, H)}{\partial n_{0S}}\left\{\sum_{p\neq 0} a^+_{pS}a_{pS} + \sum_{\alpha\neq S}\sum_{p} a^+_{p\alpha}a_{p\alpha}\right\} +$$

$$+ \sum_{\alpha}\sum_{p} \varepsilon(p) a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} + \left\{ \frac{n_{0S}}{S\mathcal{V}} \left[U_S(0) - U_1(0)\right] - \mu H \right\} \sum_{\alpha} (\alpha - S) \sum_{p} a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} +$$

$$+ S\frac{n_{0S}}{\mathcal{V}} \sum_{p\neq 0} \left\{ U_2(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} U_3(\mathbf{p}) \sin^2\vartheta \right\} a^+_{pS-1} a_{pS-1} +$$

$$+ \sum_{p\neq 0} \kappa(\mathbf{p}) \left\{ a^+_{pS} a^+_{-pS} + a_{pS} a_{-pS} + 2a^+_{pS} a_{pS} \right\} +$$

$$+ \sum_{p\neq 0} \left\{ \left[t^{(+)}(\mathbf{p}) \left(a^+_{pS-1} a^+_{-pS} + a^+_{-pS} + a^+_{pS} a^+_{-pS-1} + 2a^+_{pS-1} a_{pS} \right) \right] + \text{H.c.} \right\} +$$

$$+ \sum_{p\neq 0} \left\{ q^{(+)}(\mathbf{p}) a^+_{pS-1} a^+_{-pS-1} + \text{H.c.} \right\}. \tag{3.14}$$

В этом выражении с целью упрощения дальнейших выкладок нами введены следующие обозначения (см. (3.8), (3.9)):

$$f(n_{0S}, H) \equiv \frac{1}{2} \frac{U_S(0)}{\mathcal{V}} n_{0S}^2 - \mu S H n_{0S},$$

$$U_S(0) \equiv U_1(0) + S^2 \left[U_2(0) + \frac{1}{3} U_3(0) \right],$$

$$\kappa(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{2} \frac{n_{0S}}{\mathcal{V}} \left\{ U_1(p) + S^2 \left[U_2(p) + U_3(p) \cos^2\vartheta \right] \right\}, \tag{3.15}$$

$$t^{(\pm)}(p) \equiv \frac{S\sqrt{2S}}{4} \frac{n_{0S}}{\mathcal{V}} \frac{p_z(p_x \pm i p_y)}{p^2} U_3(p),$$

$$q^{(\pm)}(p) \equiv \frac{S}{4} \frac{n_{0S}}{\mathcal{V}} \frac{(p_x \pm i p_y)^2}{p^2} U_3(p),$$

где ϑ — угол между направлениями импульса $\mathbf{p}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$ (при выводе формул (3.14), (3.15) использовался явный вид спиновых матриц $S^i_{\alpha\beta}$ и предполагалось, что магнитное поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль оси z).

Гамильтонианы H_3 и H_4 в (3.12) соответственно третьего и четвертого порядков относительно операторов рождения и уничтожения бозонов. Гамильтониан H_2 описывает газ свободных квазичастиц и будет называться эффективным гамильтонианом слабонеидеального бозе-газа. Гамильтонианы же H_3 и H_4 описывают взаимодействие между квазичастицами. Учет их является существенным при изучении различных кинетических процессов в бозе-газе. В данной работе мы этой проблемой заниматься не будем и поэтому не будем выписывать явный вид операторов H_3 и H_4.

Введенная нами величина n_{0S} (см. (3.12)) должна являться вполне определенной функцией температуры и химического потенциала. Однако в распределении Гиббса с выделенным конденсатом

$$w(\beta, \zeta, n_{0S}) = \exp\left\{ \Omega(\beta, \zeta, n_{0S}) - \beta H(n_{0S}) \right\}, \tag{3.16}$$

в котором термодинамический потенциал Ω определяется из условия нормировки

$$\Omega(\beta, \zeta, n_{0S}) = \ln \operatorname{Sp} \exp\left[-\beta H(n_{0S}) \right], \tag{3.17}$$

параметр n_{0S} является свободным параметром. В действительности эта величина должна находиться из условия минимума термодинамического потенциала Ω при заданных β и ζ [5]

$$\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial n_{0S}}\right\}_{\beta,\zeta} = 0. \tag{3.18}$$

В рассматриваемом нами приближении, когда почти все частицы находятся в конденсате (низкие температуры), это условие в соответствии с (3.14), (3.15) имеет вид

$$\zeta \approx \frac{\partial f(n_{0S}, H)}{\partial n_{0S}} = U_S(0)\frac{n_{0S}}{\mathscr{V}} - \mu SH. \tag{3.19}$$

Разъясним теперь введение понятия квазичастиц. С этой целью, согласно [2], необходимо провести диагонализацию H_2. Это достигается путем введения некоторого унитарного преобразования U, «перемешивающего» операторы a_{pS}, a^+_{-pS}, a_{pS-1}, a^+_{-pS-1}:

$$\begin{aligned} Ua_{pS}U^+ &= \phi_1(p)a_{pS} + \phi_2^*(p)a^+_{-pS} + \psi_1(p)a_{pS-1} + \psi_2^*(p)a^+_{-pS-1}, \\ Ua_{pS-1}U^+ &= \phi_3(p)a_{pS} + \phi_4^*(p)a^+_{-pS} + \psi_3(p)a_{pS-1} + \psi_4^*(p)a^+_{-pS-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Для того чтобы преобразование было унитарным, т.е. сохраняло перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения бозонов, необходимо, чтобы амплитуды ϕ_i, ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 + |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 &= 1, \\ |\phi_3|^2 - |\phi_4|^2 + |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

и соотношениям типа

$$\phi_1\phi_3^* - \phi_2\phi_4^* + \psi_1\psi_3^* - \psi_2\psi_4^* = 0. \tag{3.22}$$

Унитарное преобразование (3.20) представляет собой обобщение унитарного преобразования Боголюбова. Кроме соотношений (3.21), (3.22) амплитуды унитарного преобразования определяются из требования диагональности оператора H_2, т.е.

$$UH_2U^+ \equiv H_{2q} = \sum_\alpha \sum_{p\neq 0} \omega_{p\alpha} a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} + E_0, \tag{3.23}$$

где $\omega_{p\alpha}$ и представляют энергетический спектр квазичастиц (E_0 — «энергия» основного состояния оператора $H - \zeta N$). Формулы (3.21)–(3.23) в принципе полностью решают поставленную задачу об определении энергетического спектра квазичастиц и амплитуд ϕ_i и ψ_i, связывающих частичные состояния с квазичастичными.

4. СПЕКТРЫ КВАЗИЧАСТИЦ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Перейдем теперь непосредственно к задаче о диагонализации гамильтониана H_2 (см. (3.13)–(3.15)).

Согласно выражению (3.23), справедливы формулы

$$\left[H_{2q}, a^+_{pS}\right] = \omega_{pS} a^+_{pS}, \quad \left[H_{2q}, a^+_{pS-1}\right] = \omega_{pS-1} a^+_{pS-1}. \tag{4.1}$$

Учитывая, что $H_2 = U^+ H_{2q} U$, имеем

$$\left[H_{2q}, U a^+_{pS} U^+\right] = U\left[H_2, a^+_{pS}\right] U^+, \quad \left[H_{2q}, U a^+_{pS-1} U^+\right] = U\left[H_2, a^+_{pS-1}\right] U^+. \tag{4.2}$$

Используя далее (3.20) и вычисляя коммутаторы в левой части равенств (4.2), получим систему линейных однородных уравнений для определения амплитуд $\phi_i(p)$:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon + 2\kappa - \omega_{pS})\phi_1 + 2\kappa\phi_2 + 2t^{(-)}\phi_3 + 2t^{(+)}\phi_4 = 0,\\
&2\kappa\phi_1 + (\varepsilon + 2\kappa + \omega_{pS})\phi_2 + 2t^{(-)}\phi_3 + 2t^{(+)}\phi_4 = 0,\\
&2t^{(+)}\phi_1 + 2t^{(+)}\phi_2 + (\varepsilon + \beta - \omega_{pS})\phi_3 + 2q^{(+)}\phi_4 = 0,\\
&2t^{(-)}\phi_1 + 2t^{(-)}\phi_2 + 2q^{(-)}\phi_3 + (\varepsilon + \beta + \omega_{pS})\phi_4 = 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

а также систему однородных уравнений для определения амплитуд $\psi_i(p)$:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon + 2\kappa - \omega_{pS-1})\psi_1 + 2\kappa\psi_2 + 2t^{(-)}\psi_3 + 2t^{(+)}\psi_4 = 0,\\
&2\kappa\psi_1 + (\varepsilon + 2\kappa + \omega_{pS})\psi_2 + 2t^{(-)}\psi_3 + 2t^{(+)}\psi_4 = 0,\\
&2t^{(+)}\psi_1 + 2t^{(+)}\psi_2 + (\varepsilon + \beta - \omega_{pS})\psi_3 + 2q^{(+)}\psi_4 = 0,\\
&2t^{(-)}\psi_1 + 2t^{(-)}\psi_2 + 2q^{(-)}\psi_3 + (\varepsilon + \beta + \omega_{pS})\psi_4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Отметим, что коэффициенты второй системы уравнений получаются из коэффициентов первой путем замены $\omega_{pS} \to \omega_{pS-1}$. Величины $\kappa(p)$, $t^{(\pm)}(p)$, $q^{(\pm)}(p)$, входящие в уравнения (4.3), (4.4), определяются формулами (3.15), (3.9); кроме того, нами введено обозначение

$$\beta(p) = \mu H + S\frac{n_{0S}}{\mathscr{V}}\left[U_2(p) - U_2(0) + \frac{1}{2}U_3(p)\sin^2\vartheta - \frac{1}{3}U_3(0)\right]. \tag{4.5}$$

Так как детерминанты систем уравнений (4.3), (4.4) совпадают, то в действительности мы имеем одно дисперсионное биквадратное уравнение

$$\omega_p^4 - [\chi(p) + \alpha(p)]\,\omega_p^2 + \alpha(p)\chi(p) - 4\eta(p) = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha(p) &= \varepsilon_p\left[\varepsilon_p + 4\kappa(p)\right],\\
\chi(p) &= \left[\varepsilon_p + \beta(p)\right]^2 - 4q^2(p),\\
\eta(p) &= 16q(p)l(p)\varepsilon_p\left[\varepsilon_p + \beta(p) - 2q(p)\right],
\end{aligned} \tag{4.7}$$

а величины $q(p)$, $l(p)$ даются выражениями

$$q(p) = \frac{1}{4}S\frac{n_{0S}}{\mathscr{V}}U_3(p)\sin^2\vartheta, \quad l(p) = \frac{1}{2}S^2\frac{n_{0S}}{\mathscr{V}}U_3(p)\cos^2\vartheta. \tag{4.8}$$

Дисперсионное уравнение (4.6) имеет два корня для ω_p^2. Первый из этих корней мы отождествим с ω_{pS}^2:

$$\omega_{pS}^2 = \frac{1}{2}\left[\chi(p) + \alpha(p)\right] - \frac{1}{2}\left\{\left[\chi(p) - \alpha(p)\right]^2 + 4\eta(p)\right\}^{1/2}, \tag{4.9}$$

а второй корень этого дисперсионного уравнения отождествим с ω_{pS-1}^2:

$$\omega_{pS-1}^2 = \frac{1}{2}\left[\chi(p) + \alpha(p)\right] + \frac{1}{2}\left\{\left[\chi(p) - \alpha(p)\right]^2 + 4\eta(p)\right\}^{1/2}. \tag{4.10}$$

Обратим внимание на то, что частота ω_{pS} является безактивационной (голдстоуновской, $\omega_{0S} = 0$), а частота ω_{pS-1} имеет активацию. Величины ω_{pS}^2, ω_{pS-1}^2 должны быть положительными. Это накладывает ограничения на вид потенциалов взаимодействия в области малых импульсов и интенсивность поля, а именно: $\omega_{pS} > 0$, $\omega_{pS-1} > 0$, если

$$\begin{aligned} &\mu H \geq \frac{1}{3} S \frac{n_{0S}}{\mathscr{V}} U_3(0), \quad U_3(0) \geq 0, \\ &\mu H \geq S \frac{n_{0S}}{\mathscr{V}} \left[U_2(0) + \frac{1}{3} U_3(0)\right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

и амплитуды взаимодействия (см. (3.9)) удовлетворяют условию

$$U_1(0) + S^2 U_2(0) \geq S^2 U_3(0), \quad U_3(0) \geq 0. \tag{4.12}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой теории нельзя перейти к пределу $H \to 0$ и получить формулы, аналогичные формулам теории Боголюбова.

Решение систем уравнений (4.3), (4.4) с учетом условий нормировки (3.21) приводит к следующим выражениям для $\phi_i(p)$ и $\psi_i(p)$:

$$\begin{aligned} &\phi_1(p) = \frac{\varepsilon_p + \omega_{pS}}{2\sqrt{\varepsilon_p \omega_{pS}}} \Delta_{S-1}(p), \quad \phi_2 = \frac{\varepsilon_p - \omega_{pS}}{2\sqrt{\varepsilon_p \omega_{pS}}} \Delta_{S-1}(p), \\ &\phi_3(p) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\omega_{pS}}} \frac{t^{(+)}(p)\left\{2q(p) - \left[\varepsilon_p + \beta(p) + \omega_{pS}\right]\right\}}{\chi(p) - \omega_{pS}^2} \Delta_{S-1}(p), \\ &\phi_4(p) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\omega_{pS}}} \frac{t^{(-)}(p)\left\{2q(p) - \left[\varepsilon_p + \beta(p) - \omega_{pS}\right]\right\}}{\chi(p) - \omega_{pS}^2} \Delta_{S-1}(p), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} &\psi_1(p) = \frac{\varepsilon_p + \omega_{pS-1}}{2\sqrt{\varepsilon_p \omega_{pS-1}}} \Delta_S(p), \quad \psi_2 = \frac{\varepsilon_p - \omega_{pS-1}}{2\sqrt{\varepsilon_p \omega_{pS-1}}} \Delta_S(p), \\ &\psi_3(p) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\omega_{pS-1}}} \frac{t^{(+)}(p)\left\{2q(p) - \left[\varepsilon_p + \beta(p) + \omega_{pS-1}\right]\right\}}{\chi(p) - \omega_{pS-1}^2} \Delta_S(p), \\ &\psi_4(p) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\omega_{pS-1}}} \frac{t^{(-)}(p)\left\{2q(p) - \left[\varepsilon_p + \beta(p) - \omega_{pS-1}\right]\right\}}{\chi(p) - \omega_{pS-1}^2} \Delta_S(p), \end{aligned} \tag{4.14}$$

где

$$\Delta_S(p) \equiv \eta^{1/2}(p)\left\{\eta(p) + \left[\chi(p) - \omega_{pS}^2\right]^2\right\}^{-1/2}, \quad \Delta_{S-1} = \Delta_S\Big|_{S \to S-1}. \tag{4.15}$$

Используя формулы (4.13), (4.14), нетрудно убедиться, что соотношения типа (3.22) выполняются автоматически.

Вернемся теперь к распределению Гиббса (3.16). Согласно формулам (3.13), (3.20), (3.23),

$$Uw(\beta, \zeta, n_{0S})U^{+} \equiv w_q = \exp\left\{\Omega - \beta\left[H_{2q} + H_{3q} + H_{4q}\right]\right\}, \tag{4.16}$$

где H_{2q} определяется выражением

$$H_{2q} = E_0 + \omega_{pS} a^{+}_{pS} a_{pS} + \omega_{pS-1} a^{+}_{pS-1} a_{pS-1} + \sum_{\alpha=-S}^{S-2} \omega_{p\alpha} a^{+}_{p\alpha} a_{p\alpha}. \tag{4.17}$$

Здесь

$$\omega_{p\alpha}\Big|_{\substack{\alpha\neq S\\ \alpha\neq S-1}} \equiv \omega_{p\tilde{\alpha}} = \varepsilon_p + (\alpha - S)\left\{-\mu H + S\frac{n_{0S}}{\mathscr{V}} U_2(0)\right\} \tag{4.18}$$

(выражение для E_0 приводить не будем). Оператор H_{2q} представляет собой гамильтониан идеального газа квазичастиц, а операторы H_{3q} и H_{4q} описывают тройные и четверные взаимодействия между квазичастицами ($H_{3q} \equiv UH_3U^{+}$ содержит члены типа aaa, $a^{+}aa$, а $H_{4q} \equiv UH_4U^{+}$ — члены типа $aaaa$, $a^{+}aaa$, $a^{+}a^{+}aa$).

Из формулы (4.17) видно, что имеется $2S+1$ сортов квазичастиц, из которых ветвь ω_{pS} является голдстоуновской (т. е. ω_{pS} обращается в нуль при $p = 0$), остальные $2S$ ветвей являются активационными. Эти ветви колебаний являются модификацией энергетического спектра частиц идеального бозе-газа в магнитном поле:

$$\omega_{p\alpha} = \varepsilon_p + \alpha\mu H, \quad \alpha = -S, \ldots, S. \tag{4.19}$$

Среднее значение произвольной физической величины b может быть найдено по формуле

$$\mathrm{Sp}\, w\hat{b} = \mathrm{Sp}\, w_q U\hat{b}(n_{0S})U^{+}, \tag{4.20}$$

где $\hat{b}(n_{0S})$ — оператор $\hat{b}$, в котором операторы рождения и уничтожения бозонов с импульсом равным нулю и проекцией спина S заменены на $\sqrt{n_{0S}}$, см. (3.12).

В частности, диагональные элементы одночастичной матрицы плотности определяются оператором

$$\hat{b} \equiv \hat{f}_{\alpha\alpha}(p) = a^{+}_{p\alpha} a_{p\alpha} \equiv \hat{f}_{p\alpha},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} f_{p\alpha} = {} & n_{0S}\delta_{p0}\delta_{\alpha S} + N_{p\tilde{\alpha}}\delta_{\alpha\tilde{\alpha}} + \delta_{\alpha S}\left[|\phi_1|^2 N_{pS} + |\phi_2|^2\left(1 + N_{-pS}\right) + \right. \\ & + \left. |\psi_1|^2 N_{pS-1} + |\psi_2|^2\left(1 + N_{-pS}\right)\right] + \delta_{\alpha S-1}\left[|\phi_3|^2 N_{pS} + |\phi_4|^2\left(1 + N_{-pS}\right) + \right. \\ & + \left. |\psi_3|^2 N_{pS-1} + |\psi_4|^2\left(1 + N_{-pS}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $\tilde{\alpha} = \{-S, -S+1, \ldots, S-2\}$ и $N_{p\alpha}$ — функция распределения квазичастиц, определяемая формулой

$$N_{p\alpha} = \mathrm{Sp}\, w_q a^{+}_{p\alpha} a_{p\alpha}. \tag{4.22}$$

Рассмотрим теперь вопрос о сверхтекучести слабонеидеального газа в магнитном поле. С этой целью введем в распределение Гиббса слагаемое $-\beta\mathbf{uP}$, где $\mathbf{u}$ — скорость слабонеидеального бозе-газа (скорость нормальной компоненты),

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha \sum_p \mathbf{p} a^+_{p\alpha} a_{p\alpha}$$

— оператор импульса системы. Можно проверить, что $U\mathbf{P}U^+ = \mathbf{P}$. Поэтому формулы для функции распределения будут по-прежнему иметь вид типа выражений (4.21), в которых функции распределения квазичастиц $N_{p\alpha}$ ($\alpha = S, S-1, \tilde{\alpha}$) будут определяться формулами (см. (4.22)):

$$N_{p\alpha} = \left\{\exp\left[\beta\left(\omega_{p\alpha} - \mathbf{pu}\right)\right] - 1\right\}^{-1}, \quad \alpha = S, S-1, \tilde{\alpha}. \tag{4.23}$$

Эти функции распределения должны быть положительными. В области малых импульсов функции распределения N_{pS-1}, $N_{p\tilde{\alpha}}$ наверняка будут положительными в силу положительности энергии активации ω_{pS-1}, $\omega_{p\tilde{\alpha}}$ (см. (4.9), (4.10), (4.18)). Однако функция распределения голдстоуновских квазичастиц N_{pS} в области малых импульсов будет положительной, только если скорость u будет меньше некоторой критической величины u_c, определяемой из условия минимума отношения ω_{pS}/p в области малых p:

$$u < u_c = \min_p \frac{\omega_{pS}}{p}. \tag{4.24}$$

Это соотношение представляет собой условие Ландау существования сверхтекучести.

Приведем еще выражение для намагниченности слабонеидеального бозе-газа при $\mathbf{u} = 0$. Эта намагниченность определяется диагональной частью одночастичной матрицы плотности:

$$m = \mu \sum_\alpha \alpha \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p f_{p\alpha}. \tag{4.25}$$

Подставляя в эту формулу выражение (4.21), получим

$$\begin{aligned} m = {} & \mu S \frac{n_{0S}}{\mathcal{V}} + \mu \sum_{\alpha=-S}^{S-2} \alpha \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p N_{p\alpha} + \\ & + \mu \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p \left\{ N_{pS}\left[S|\phi_1|^2 + (S-1)|\phi_3|^2\right] + (1+N_{pS})\left[S|\phi_2|^2 + (S-1)|\phi_4|^2\right] + \right. \\ & \left. + N_{pS-1}\left[S|\psi_1|^2 + (S-1)|\psi_3|^2\right] + (1+N_{pS-1})\left[S|\psi_2|^2 + (S-1)|\psi_4|^2\right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

где функции распределения квазичастиц $N_{p\alpha}$ даются выражениями (4.23) при $\mathbf{u} = 0$.

Заметим в заключение, что энергия квазичастиц зависит от напряженности магнитного поля, а также от плотности конденсата. Если эти параметры будут медленно меняться со временем, то возникающую модуляцию энергетического спектра можно трактовать как внешнее поле, в котором находится бозе-газ. Благодаря модуляции будет изменяться энтропия системы S. Используя метод, развитый в [6], можно сформулировать H-теорему и вычислить диссипативную функцию $T\dot{S}$. Для этого надо исследовать кинетическое уравнение для функции распределения квазичастиц в магнитном поле.

Оно будет учитывать различные процессы взаимодействия квазичастиц, описываемые гамильтонианами H_3 и H_4. Очевидно, четверные процессы являются процессами рассеяния, а тройные процессы — процессами слияния двух квазичастиц в одну и расщепления одной квазичастицы на две.

Из H-теоремы следует, что диссипативная функция $T\dot{S}$ будет пропорциональна квадрату частоты ω модуляции внешних параметров. По этому же закону будет изменяться поглощение системой энергии переменного внешнего поля, а также звукового поля, способного распространяться в газе квазичастиц. Этот закон справедлив в том случае, если выполняется неравенство $\omega\tau \ll 1$, где τ — время релаксации, т.е. время установления статистического равновесия в газе квазичастиц. Мы не будем, однако, в этой работе вычислять $T\dot{S}$ и устанавливать зависимость этой величины от температуры T газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

Авторы благодарны также Международной Соросовской программе поддержки образования в области точных наук (ISSEP).

Литература

1. M. H. Anderson, I. R. Ensher, M. R. Mattews et al., Science **269**, 198 (1995).
2. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**, 77 (1947).
3. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Ч. 2,* Наука, Москва (1978).
4. J. Daicic, N. E. Frankel, R. M. Gailis, and V. Kovalenko, Phys. Rep. **237**, 65 (1994).
5. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
6. А. И. Ахиезер, ЖЭТФ **8**, 1318 (1938).