ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 3, стр. 955–966

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БЕСКОНЕЧНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

Ж. Д. Генчев, В. И. Васькивськиий

Институт электроники Болгарской академии наук
1784, София, Болгария

Поступила в редакцию 29 марта 1997 г.

Выведены основные уравнения нелокальной джозефсоновской электродинамики, справедливые при любых соотношениях между характерным масштабом изменения разности фаз и величиной толщины контакта. Получен спектр обобщенных волн Свихарта. Изучено влияние конечного поверхностного сопротивления сверхпроводящих электродов на динамику характерных для нелокальной электродинамики вихревых структур.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дзожефсоновские контакты с большим значением критической плотности тока не могут быть описаны с помощью традиционного уравнения синус-Гордон, когда $\lambda_j(d) \leq \lambda$, где

$$\lambda_j(d) = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c(2\lambda + 2d)}} \tag{1}$$

— джозефсоновская длина, λ — лондоновская глубина проникновения, $2d$ — толщина промежуточного несверхпроводящего слоя, $\Phi_0 = h/2|e|$ — квант магнитного потока, а j_c — однородная критическая плотность тока. Джозефсоновские вихри ($\lambda \ll \lambda_j$), соответствующие низким значениям j_c,

$$j_c \ll j_l \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^3} \quad (d \ll \lambda) \tag{2}$$

(используется введенная в [1] терминология), исследуются уже много лет [2], тогда как для вихрей Абрикосова–Джозефсона [1] характерный пространственный масштаб изменения разности фаз φ значительно меньше лондоновской глубины проникновения λ и выполняется противоположное неравенство

$$j_c \gg j_l. \tag{3}$$

Как видно из ряда исследований [3–8], в этом случае магнитостатика и электродинамика джозефсоновского контакта становятся пространственно-нелокальными. В работах [3–8] пренебрегалось влиянием нормальной статической проводимости лондоновских сверхпроводников и не проводился детальный анализ роли конечной толщины нормального слоя контакта. С учетом обоих факторов в разд. 2 данной статьи выводится интегродифференциальное уравнение (24), содержащее как временную, так и пространственную нелокальности. На основе этого уравнения в разд. 3 анализируются спектральные свойства джозефсоновского перехода в линейном приближении. С целью вычисления максимальной толщины нормального слоя, ниже которой начинают проявляться эффекты нелокальности, в Приложении к работе приводится оценка критической плотности тока для идеализированной модели нормальной прослойки в соединении $YBa_2Cu_3O_7$. Наконец, в разд. 4 мы изучаем динамику 4π-кинка в тонком ($d \to +0$) переходе с током с учетом двух каналов диссипации — квазичастичного туннелирования и поверхностного сопротивления электродов.

2. УРАВНЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этом разделе мы получим основные уравнения джозефсоновской электродинамики, справедливые для туннельного перехода произвольной толщины. Будем рассматривать простейшую геометрию в виде двух сверхпроводящих полупространств ($|x| > d$), разделенных несверхпроводящим слоем ($-d \le x \le d$). Предполагается однородность системы по y, $\partial/\partial y = 0$. Введем следующее фурье-представление произвольной функции:

$$f(x,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-i\omega t + ikz} f(\omega, k|x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, f(\omega, x, z) e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

Будем считать, что магнитное поле, направленное по оси y, удовлетворяет граничному условию $H(x = d, z, t) = H(x = -d, z, t)$. Система уравнений Максвелла в сверхпроводниках,

$$-\frac{\partial H(\omega,x,z)}{\partial z} = \sigma_s(\omega) E_x(\omega,x,z), \tag{5а}$$

$$\frac{\partial H(\omega,x,z)}{\partial x} = \sigma_s(\omega) E_z(\omega,x,z), \tag{5б}$$

$$\frac{\partial E_x(\omega,x,z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\omega,x,z)}{\partial x} = i\mu_0\omega H(\omega,x,z), \tag{5в}$$

где

$$\sigma_s(\omega) = \sigma_{dc} + \frac{i}{\omega\mu_0\lambda^2}, \qquad \sigma_{dc} = \operatorname*{Re}_{\omega\to 0}\left[\sigma_s(\omega)\right], \tag{5г}$$

$\sigma_s(\omega)$— комплексная проводимость и μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, имеет решения, представимые в следующем виде:

$$H(\omega,x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, H(\omega,k) e^{ikz} \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left[-V_s(\omega,k)(x-d)\right], & x > d, \\ \exp\left[V_s(\omega,k)(x+d)\right], & x < -d, \end{array} \right. \tag{6}$$

$$E_x(\omega,x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{-ik}{\sigma_s(\omega)} H(\omega,k) e^{ikz} \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left[-V_s(\omega,k)(x-d)\right], & x > d, \\ \exp\left[V_s(\omega,k)(x+d)\right], & x < -d, \end{array} \right. \tag{7}$$

$$E_z(\omega, x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{\eta}(\omega, k)\, H(\omega, k)e^{ikz} \begin{cases} \exp\left[-V_s(\omega, k)(x-d)\right], & x > d, \\ \exp\left[V_s(\omega, k)(x+d)\right], & x < -d, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$V_s(\omega, k) = \sqrt{k^2 - i\omega\mu_0\sigma_s(\omega)}, \tag{9}$$

$\operatorname{Re} V_s > 0$, а $\tilde{\eta}(\omega, k) = R_s - iX_s$ — поверхностный импеданс:

$$\tilde{\eta}(\omega, k) = \frac{V_s(\omega, k)}{\sigma_s(\omega)}, \tag{10}$$

имеющий, как следует из (5г), (9), (10), следующую низкочастотную аппроксимацию:

$$\begin{gathered} \tilde{\eta}(\omega, k) = -i\omega\mu_0\lambda\eta(\omega, k), \\ \eta(\omega, k) = \sqrt{1 + (k\lambda)^2} \left[1 + i\frac{\omega}{2}\mu_0\lambda^2\sigma_{dc}\frac{1 + 2(k\lambda)^2}{1 + (k\lambda)^2}\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Функция $H(\omega, k)$ может быть найдена, если решить соответствующую систему уравнений Максвелла для туннельного слоя ($|x| < d$):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i}\left[j_c\sin\varphi(z, t) + j_{QP}(V)\right] + \sigma_n\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{13}$$

где $\mathbf{i}$ — орт по оси x, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\varepsilon_r > 0$ — относительная диэлектрическая проницаемость. Первый член в квадратных скобках в (13) есть джозефсоновская плотность тока, зависящая от разности фаз $\varphi(z, t)$ макроскопической волновой функции спаренных частиц в двух сверхпроводящих областях, $j_{QP}(V)$ — плотность тока туннелированных квазичастиц, зависящая только от приложенной разности потенциалов [2],

$$V \equiv V(z, t) = -\int\limits_{-d}^{d} E_x(x, z, t)dx = -\frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{14}$$

Здесь последнее равенство выражает соотношение Джозефсона. Покажем, что все компоненты электрического и магнитного полей выражаются через функцию разности фаз $\varphi(z, t)$. Для этого прежде всего введем операцию усреднения по x для произвольной функции $f(x, z, t)$:

$$\begin{gathered} f(x, z, t) = \langle f(z, t)\rangle + \tilde{f}(x, z, t), \\ \langle f(z, t)\rangle = \frac{1}{2d}\int\limits_{-d}^{d} f(x, z, t)dx. \end{gathered} \tag{15}$$

Тогда уравнения (12), (13) сведутся к следующей системе уравнений:

$$-\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial z} = j_c \sin\varphi + j_{QP}(V) + \frac{\Phi_0\varepsilon_0\varepsilon_r}{4\pi d}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\Phi_0\sigma_n}{4\pi d}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{16а}$$

$$-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial z} = \sigma_n\tilde{E}_x + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial t}, \tag{16б}$$

$$-\mu_0\frac{\partial\tilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial z} + \frac{\tilde{E}_z(x=d)}{d} - \frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial x}, \tag{16в}$$

$$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x} = \sigma_n\tilde{E}_z + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\tilde{E}_z}{\partial t}, \tag{16г}$$

$$-d\mu_0\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial t} = \frac{\Phi_0}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t} - \tilde{E}_z(x=d,z,t). \tag{16д}$$

При выводе уравнений (16) мы использовали равенство $\langle E_z\rangle = 0$ и граничные условия $\tilde{H}(x=d) = \tilde{H}(x=-d)$ и $\tilde{E}_z(x=d) = -\tilde{E}_z(x=-d)$, которые соответствуют предполагавшемуся в (6)–(8) описанию электромагнитного поля вне туннельного барьера. Заметим, что эти предположения не справедливы в случае различного материала сверхпроводников.

Решение уравнений (16б–г) для $\tilde{H}$, $\tilde{E}_x$, $\tilde{E}_z$ может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{H}(x,z,t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,dk\,e^{-i\omega t+ikz}k\frac{\sigma_n - i\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}{V_n}\left[\operatorname{ch}(V_nx) - \frac{\operatorname{sh}(V_nd)}{V_nd}\right]A(\omega,k),$$

$$\tilde{E}_x(x,z,t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,dk\,e^{-i\omega t+ikz}\frac{-ik^2}{V_n}\left[\operatorname{ch}(V_nx) - \frac{\operatorname{sh}(V_nd)}{V_nd}\right]A(\omega,k), \tag{17}$$

$$\tilde{E}_z(x,z,t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,dk\,e^{-i\omega t+ikz}k\operatorname{sh}(V_nx)A(\omega,k),$$

где

$$V_n \equiv V_n(\omega,k) = \sqrt{k^2 - i\omega\mu_0\sigma_n - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2}, \quad \operatorname{Re}V_n > 0, \tag{18}$$

σ_n — проводимость нормальной прослойки. Требуя непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах $x = \pm d$, получаем

$$A(\omega,k) = \frac{-i\omega\mu_0\lambda\eta}{k\operatorname{sh}(V_nd)}H(\omega,k) \tag{19}$$

и

$$H(\omega,k) = \frac{-ik\Phi_0\varphi(\omega,k)}{4\pi\mu_0}\left\{d + \lambda\eta\left[1 + \frac{k_0^2\varepsilon_n(\omega)}{V_n^2}\left[1 - V_nd\operatorname{cth}(V_nd)\right]\right]\right\}^{-1}, \tag{21}$$

где $k_0 = \omega/c$, $\varepsilon_n(\omega) = \varepsilon_r + i\sigma_n/\omega\varepsilon_0$,

$$\varphi(\omega, k) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt\,dz}{(2\pi)^2} e^{i\omega t - ikz}\varphi(z,t), \tag{21}$$

а также находим

$$\langle H(z,t)\rangle = -\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dt'dz' Q(z-z', t-t')\frac{\partial\varphi(z',t')}{\partial z'}, \tag{22}$$

$$Q(z,t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\,dk}{8\pi^2 d} e^{-i\omega t + ikz} \times$$

$$\times \frac{d + \lambda\eta(\omega,k)\dfrac{k_0^2\varepsilon_n(\omega)}{V_n^2(\omega,k)}\left[1 - dV_n(\omega,k)\,\mathrm{cth}\,(dV_n(\omega,k))\right]}{d + \lambda\eta(\omega,k)\left\{1 + \dfrac{k_0^2\varepsilon_n(\omega)}{V_n^2(\omega,k)}\left[1 - dV_n(\omega,k)\,\mathrm{cth}\,(dV_n(\omega,k))\right]\right\}}. \tag{23}$$

Связь между магнитным полем и разностью фаз в общем случае оказывается нелокальной как в пространстве, так и во времени. Из (16а) получаем обобщение уравнения синус-Гордон для разности фаз в виде следующего интегродифференциального уравнения:

$$\sin\varphi + \frac{\alpha}{\omega_j}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\omega_j^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 2\lambda_j^2\lambda\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dt'dz' Q(z-z', t-t')\frac{\partial\varphi(z',t')}{\partial z'}, \tag{24}$$

где $\lambda_j^2 = \Phi_0/4\pi\mu_0 j_c\lambda$ — квадрат джозефсоновской длины (1), соответствующей пределу $d \to +0$; $\omega_j^2 = 4\pi d j_c/\Phi_0\varepsilon_0\varepsilon_r$, $\alpha = (\sigma_{QP} + \sigma_n)/\omega_j\varepsilon_0\varepsilon_r$ и в (16а) введена линеаризация квазичастичной туннельной плотности тока $j_{QP}(V) \approx \sigma_{QP}\langle E_x\rangle$.

Формально полученное уравнение отличается от использованных ранее [1, 3, 8] только включением интегрирования по времени и более сложным выражением для ядра.

3. О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА

Рассмотрим предел линейной теории волн Свихарта [2, 9], соответствующий случаю малых возмущений разности фаз, позволяющих воспользоваться приближением $\sin\varphi \approx \varphi$. В этом пределе будем искать решение линеаризованного уравнения (24) в виде $\varphi \propto \exp(-i\omega t + ikz)$. Введя обозначения

$$\delta = d/\lambda, \quad q = k\lambda_j, \quad \Omega = \omega/\omega_j, \quad \varepsilon = \lambda_j/\lambda \tag{25}$$

и пренебрегая эффектами затухания, получим дисперсионное уравнение волн Свихарта в следующем виде:

$$(\Omega^2 - 1)\left\{\delta + \sqrt{1 + \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2}\left[1 + \frac{\delta^3\Omega^2}{\varepsilon^2}G(V_d)\right]\right\} = q^2\left\{1 + \frac{\delta^2\Omega^2}{\varepsilon^2}\sqrt{1 + \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2}G(V_d)\right\}, \tag{26}$$

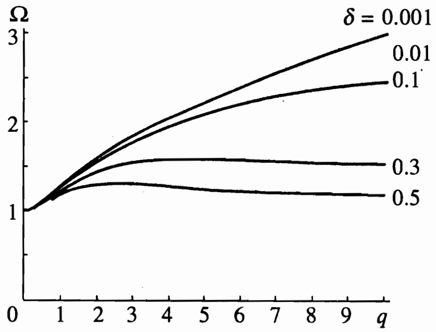

Рис. 1

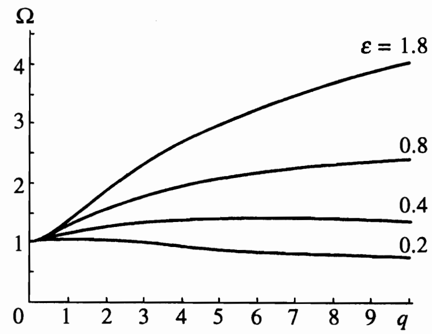

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость $\Omega(q)$ для $\varepsilon = 0.8$ и различных значений δ

Рис. 2. Зависимость $\Omega(q)$ для $\delta = 0.1$ и различных значений ε

$$G(V_d) = \begin{cases} \dfrac{1}{V_d^2}(1 - V_d \operatorname{cth} V_d), & V_d^2 = \dfrac{\delta^2}{\varepsilon^2}(q^2 - \Omega^2\delta) \quad \text{при} \quad q^2 > \Omega^2\delta, \\ -1/3 & \text{при} \quad q^2 = \Omega^2\delta, \\ -\dfrac{1}{V_d^2}(1 - V_d \operatorname{ctg} V_d), & V_d^2 = \dfrac{\delta^2}{\varepsilon^2}(\Omega^2\delta - q^2) \quad \text{при} \quad q^2 < \Omega^2\delta. \end{cases} \tag{27}$$

Значение волнового вектора в точке перегиба дисперсионной кривой может быть найдено из уравнения

$$C_1^2 x^3 + (C_1^2 - 2C_1C_2)x^2 + (C_2^2 - 2C_1C_2)x + C_2^2(1 - \delta^2) = 0, \tag{28}$$

где

$$x = (q/\varepsilon)^2 = (k\lambda)^2, \quad C_1 = 1 + \delta^3/3\varepsilon^2, \quad C_2 = \delta/\varepsilon^2.$$

Частота Ω для $k = 0$ совпадает с полученной ранее [9]. Но асимптотическое поведение в пределе коротких волн ($q^2 \gg \Omega^2\delta$, $q \gg \varepsilon$) дает $\Omega^2 \to \varepsilon^2/\delta$ при $q \to +\infty$, что приводит к асимптотическому значению частоты равному

$$\overline{\omega} = \frac{c}{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{29}$$

Результаты численных расчетов зависимости $\Omega(q)$ при некоторых значениях параметров ε и δ приведены на рис. 1 и 2. Возможность реализации большой критической плотности тока ($\varepsilon \le 1$) при варьировании толщины нормального слоя в интервале $0 \le \delta \le \delta_m$ продемонстрирована в Приложении.

Учитывая рассмотренные выше особенности спектральных свойств джозефсоновского перехода, можно получить условие применимости низкочастотной аппроксимации в виде

$$\max(\omega_j, \overline{\omega})\mu_0\lambda^2\sigma_{dc} \ll 1. \tag{30}$$

Существенное упрощение выражения (23) для ядра возможно только для контактов достаточно малой толщины, для которых $|V_n|d \ll 1$, что выполняется при двух условиях

$$\begin{aligned} &kd \ll 1, \\ &\frac{\omega}{\overline{\omega}}\frac{d}{\lambda} \ll 1, \end{aligned} \tag{31}$$

откуда видно, что для справедливости данного упрощения для всего спектра необходимо, чтобы $d \ll \lambda$. Тогда при выполнении условий (30) и (31) с учетом, что $\lim_{x\to 0}[(1 - x\,\mathrm{cth}\,x)/x^2] = -1/3$, для ядра получаем

$$Q(\omega, k) = \frac{1}{2}\frac{1 - i\omega\tau(k)}{d + \lambda\sqrt{1 + (k\lambda)^2}}, \tag{32}$$

где

$$\tau(k) = \mu_0\lambda^3\left\{\frac{\sigma_{dc}}{2}\frac{1 + 2(k\lambda)^2}{1 + (k\lambda)^2} + \frac{\sigma_n d}{3\lambda}\sqrt{1 + (k\lambda)^2}\right\}\frac{\sqrt{1 + (k\lambda)^2}}{d + \lambda\sqrt{1 + (k\lambda)^2}}.$$

Действительная часть уравнения (32) совпадает с выражением, использовавшимся ранее для исследования эффектов нелокальной джозефсоновской электродинамики [1, 8].

4. БЕГУЩИЙ 4π-КИНК В ТУННЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ С ТОКОМ

В этом разделе рассмотрим некоторые следствия общей теории для тонкого ($d \to +0$) туннельного перехода с током, введя в правую часть уравнения (24) безразмерную однородную плотность транспортного тока j_{dc}/j_c (геометрия с перекрытием [2]). В случае тонкого перехода из (23), (24), (32) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sin\varphi - \gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' \times \\ \times\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi V(k)}e^{ik(z-z')}\left(1 + \beta\frac{\varepsilon^2 + 2k^2}{\varepsilon^2 + k^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\varphi(z', t)}{\partial z'^2}\right\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь и в дальнейшем используются безразмерные переменные с заменой

$$\omega_j t \to t, \quad z/\lambda_j \to z, \quad \omega/\omega_j \to \omega, \quad \lambda_j k \to k$$

и введены следующие обозначения:

$$V(k) = \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\omega_j\mu_0\lambda^2\sigma_{dc}, \quad \gamma = \frac{j_{dc}}{j_c}.$$

Параметр β учитывает эффект конечного поверхностного сопротивления сверхпроводящих электродов, а определение ε дано в (25). Используя интегральное представление функции Макдональда:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk\,e^{ikz}}{\sqrt{1+(k/\varepsilon)^2}}=\frac{\varepsilon}{\pi}K_0(\varepsilon|z|),\quad \varepsilon>0, \tag{34}$$

вычисляем интегралы в (33) и окончательно получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sin\varphi-\gamma=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,\times$$

$$\times\left\{\left(K_0\left(\varepsilon|z-z'|\right)+\beta\left[2K_0\left(\varepsilon|z-z'|\right)+\varepsilon|z-z'|K_0'\left(\varepsilon|z-z'|\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\varphi(z',t)}{\partial z'^2}\right\}. \tag{35}$$

Здесь штрих означает дифференцирование функции по ее аргументу, так что справедливо следующее равенство:

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\varepsilon K_0\left(\varepsilon|z|\right)=\varepsilon\left[2K_0\left(\varepsilon|z|\right)+\varepsilon|z|K_0'\left(\varepsilon|z|\right)\right]. \tag{36}$$

Для анализа динамики бегущих (с пока еще не найденной скоростью $v=\bar{c}\nu=$ $=\lambda_j\omega_j\nu$) вихрей в джозефсоновском контакте ограничим наше рассмотрение только решениями вида

$$\varphi(z,t)=\phi(\zeta=z-\nu t). \tag{37}$$

Ввиду соотношения Джозефсона (14) бегущая волна (37) содержит информацию о характеристике напряжение–плотность тока γ,

$$V(\zeta)=\frac{\Phi_0\omega_j}{2\pi}\,\nu\Phi'(\zeta). \tag{38}$$

Для 4π-кинка имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}&\phi(+\infty)-\phi(-\infty)=4\pi,\\&\phi^{(1,2)}(\pm\infty)=0,\end{aligned} \tag{39}$$

а безразмерная скорость вихря ν должна быть определена как собственное значение уравнения

$$\nu^2\phi''(\zeta)-\alpha\nu\phi'(\zeta)+\sin\phi(\zeta)-\gamma=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\,\times$$

$$\times\left\{\left(K_0\left(\varepsilon|\zeta-u|\right)-\beta\nu\left[2K_0\left(\varepsilon|\zeta-u|\right)+\varepsilon|\zeta-u|K_0'\left(\varepsilon|\zeta-u|\right)\right]\frac{d}{du}\right)\phi''(u)\right\} \tag{40}$$

при выполнении граничных условий (39). Отметим, что если $\beta=0$, то (40) совпадает с соотношением (11) из [1]. Случай $\varepsilon\to\infty$ соответствует обычному джозефсоновскому вихрю. Рассматривая только контакты с большой плотностью j_c ($\varepsilon\ll1$), мы имеем дело с так называемыми мелкомасштабными вихрями Абрикосова–Джозефсона [1, 10].

Тогда для функции $K_0(u)$ правомерно использовать ее асимптотическое выражение для малого аргумента $K_0(u) = \ln(2/u)$.

Учитывая второе условие (39), а также равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\left(|\zeta - u|\right) \phi^{(2,3)}(u)du = -\fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du\, \phi^{(1,2)}(u)}{u-\zeta} \tag{41}$$

($\fint$ обозначает главное значение интеграла по Коши), трансформируем (40) в следующее уравнение:

$$\nu^2\phi''(\zeta) - \alpha\nu\phi'(\zeta) + \sin\phi(\zeta) - \gamma = \frac{\varepsilon}{\pi}\fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u-\zeta}\left(\frac{d\phi}{du} - 2\beta\nu\frac{d^2\phi}{du^2}\right). \tag{42}$$

Исследование бегущего 2π-кинка на основе данного уравнения в условиях сильной диссипации ($\alpha \gg 1$) выполнено в [1] при $\beta = 0$ и в [11] при $\beta \neq 0$. Здесь, имея в виду граничные условия (39), введем в рассмотрение следующий анзатц:

$$\phi(\zeta) = \theta + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\zeta}{s}, \tag{43}$$

где s — размер сердцевины движущегося вихря, а

$$\gamma = \sin\theta \leq 1. \tag{44}$$

Заметим также, что при $s = \varepsilon$, $\nu^2 = \varepsilon^2$ формула (43) дает точное решение задачи для бестокового бездиссипативного 4π-кинка ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) [12]. Для оценки безразмерной скорости ν вихря для контакта с током ($\gamma \neq 0$) при учете диссипации ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) достаточно из (42) вывести два уравнения для неизвестных варьируемых параметров s и ν. Умножая (42) на $\phi'(\zeta)$ и интегрируя по ζ, получаем соотношение, выражающее баланс силы трения и силы Лоренца:

$$\alpha\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi'^2(\zeta)d\zeta + 64\varepsilon s\beta\nu\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2du}{(u^2+s^2)^3} = -4\pi\gamma. \tag{45}$$

Для получения второго интегрального соотношения умножим (42) на $\phi''(\zeta)$ и снова проинтегрируем по ζ. Это дает

$$\nu^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi''^2d\zeta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi''\sin\phi d\zeta = 16\varepsilon s\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2-u^2}{(s^2+u^2)^3}\,du. \tag{46}$$

В результате использования тождества

$$\sin\left[\theta + 4\,\mathrm{arctg}\,a\right] = \frac{a^4 - 6a^2 + 1}{(1+a^2)^2}\sin\theta + \frac{4a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}\cos\theta \tag{47}$$

и вычисления интегралов в (45) и (46) получаем требуемые два уравнения для ν и s:

$$\begin{aligned} &2\nu\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{s}\,\beta\right) = -s\gamma, \\ &\nu^2 = \varepsilon s. \end{aligned} \tag{48}$$

Исключая s, находим безразмерную скорость вихря

$$\nu = A + B - \frac{2\alpha\varepsilon}{3\gamma}, \tag{49}$$

где

$$A = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}\right)^{1/3}, \quad B = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}\right)^{1/3},$$

$$\frac{q}{2} = \left[\left(\frac{2\alpha}{3\gamma}\right)^3 + \frac{\beta}{\gamma}\right]\varepsilon^3, \quad Q = \left(1 + \frac{16\alpha^3}{27\gamma^2\beta}\right)\frac{\beta^2}{\gamma^2}\varepsilon^6.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы сформулировали основные уравнения нелокальной электродинамики для одиночного джозефсоновского туннельного перехода произвольной толщины, расположенного между двумя одинаковыми полубесконечными сверхпроводниками с конечной нормальной статической проводимостью. В линейном приближении численно исследовано дисперсионное уравнение для рассматриваемого джозефсоновского контакта. Проанализированы условия применимости существующих в настоящее время теорий нелокальной джозефсоновской электродинамики. Развита теория тонкого перехода с учетом конечного поверхностного сопротивления сверхпроводящих электродов. Получены оценки для скорости и размера сердцевины 4π-кинка в такой структуре.

Мы хотели бы выразить благодарность Ю. М. Алиеву за обсуждение результатов, а также Национальному научному фонду Болгарии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые оценки зависимости джозефсоновской критической плотности тока от толщины нормального слоя

Приведем оценку максимальной толщины нормального слоя (или безразмерного параметра $\delta_m = d_m/\lambda$), ниже которой начинают проявляться эффекты нелокальности, а именно, для конкретности введем определение (см. (1), (25))

$$\varepsilon(\delta_m) = 1. \tag{П.1}$$

считая, что обычная локальная джозефсоновская электродинамика соответствует условию $\varepsilon \gg 1$, а для переходов с большой критической плотностью тока имеем $\varepsilon < 1$. Простейшую оценку для плотности тока в туннельном слое $|x| < d$,

$$j = -\frac{ie\hbar}{m_s}\left[\Psi^*(x)\Psi'(x) - \Psi(x)\Psi'^*(x)\right], \tag{П.2}$$

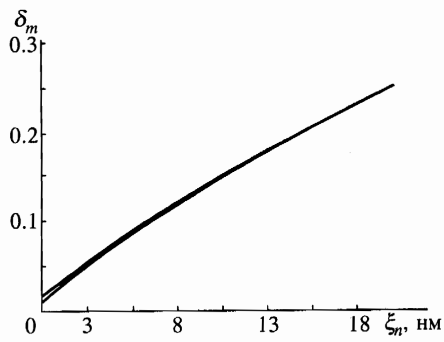

Рис. 3. Зависимости параметра δ_m от длины когерентности нормального слоя ξ_n

найдем интегрированием уравнения Шредингера (см. ниже (П.7) при $b_n = 0$)

$$\xi_n^2 \Psi''(x) = \Psi(x) \tag{П.3а}$$

с граничными условиями

$$\Psi(\pm d) = \sqrt{n_s}\,\exp(i\theta_{1,2}). \tag{П.3б}$$

Результат этих простых вычислений хорошо известен (формула (8.19) из [13]) и имеет следующий вид ($\lambda = \sqrt{m_s/4e^2\mu_0 n_s}$):

$$j = j_c \sin(\theta_2 - \theta_1), \tag{П.4а}$$

$$j_c(d) = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2\xi_n\,\mathrm{sh}(2d/\xi_n)}. \tag{П.4б}$$

По различным экспериментальным оценкам [14, 15] для межзеренной границы в пленке $YBa_2Cu_3O_7$ при $T = 4.2$ К длина когерентности нормальной прослойки $\xi_n = 1$–10 нм, а для лондоновской глубины проникновения имеем $\lambda = 140$ нм. На основе этих данных формула (П.1) сводится к следующему уравнению:

$$\xi_n\,\mathrm{sh}(2d_m/\xi_n) = 2(\lambda + d_m), \tag{П.5}$$

и на рис. 3 параметр $\delta_m = d_m/\lambda$ показан в виде функции длины когерентности ξ_n в нормальном слое. Данный численный пример и рис. 3 показывают, что при $\varepsilon \sim 1$ необходим учет конечной толщины нормального слоя контакта, при этом $0 \neq \delta \leq \delta_m$, а $\delta_m \sim 0.1$.

Для контактов с весьма большой плотностью критического тока ($\varepsilon \ll 1$), на наш взгляд, целесообразно провести оценки для соотношения ток–фаза на основе модифицированных уравнений Гинзбурга–Ландау ($a_n > 0$, $b_n \geq 0$)

$$\frac{\hbar^2}{2m_s}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + |a_s|\Psi - b_s|\Psi|^2\Psi = 0, \quad |x| > d, \tag{П.6}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_n}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - a_n\Psi - b_n|\Psi|^2\Psi = 0, \quad |x| < d, \tag{П.7}$$

учитывая следующие оценки для кристалла YBCO [16]:

$$m_s = 8m_e, \quad |a_s(T)| = 1.2 \cdot 10^{-21} \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right) \text{Дж}, \quad b_s = 4 \cdot 10^{-49} \text{Дж} \cdot \text{м}^3. \qquad (\text{П.8})$$

Действительно, как показано в [17] для частного случая $m_s = m_n$, $b_s = b_n$, расходимость плотности критического тока (П.4б) при $d \to +0$ устраняется, и в пределе весьма тонких переходов джозефсоновская плотность тока переходит в плотность тока распаривания:

$$\lim_{d \to 0} j_c(d) = \frac{\Phi_0}{3\sqrt{3}\,\pi\mu_0\lambda^2\xi_s}, \qquad (\text{П.9})$$

где $\xi_s = \hbar/\sqrt{2m_s|a_s|}$.

Литература

1. A. Gurevich, Phys. Rev. B **48**, 12857 (1993).
2. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона. Физика и применения*, Мир, Москва (1984).
3. Ю. М. Алиев и др., ЖЭТФ **107**, 972 (1995).
4. A. F. Volkov, Physica C **192**, 306 (1991).
5. R. G. Mints and I. B. Shapiro, Phys. Rev. B **49**, 6188 (1994).
6. G. L. Alfimov and A. F. Popkov, Phys. Rev. B **52**, 4503 (1995).
7. A. Gurevich and L. D. Cooley, Phys. Rev. B **50**, 13563 (1994).
8. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ **104**, 2526 (1993).
9. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ **58**, 726 (1993).
10. В. П. Силин, ЖЭТФ **110**, 741 (1996).
11. Z. D. Genchev, Superconductor Science and Technology **10**, 543 (1997).
12. Yu. M. Aliev and V. P. Silin, Phys. Lett. A **177**, 259 (1993).
13. T. P. Orlando and K. A. Delin, *Foundations of Applied Superconductivity*, Addison-Wisley Ltd, New York (1991).
14. E. Polturak, G. Koren, D. Cohen et al., Phys. Rev. Lett. **67**, 3038 (1991).
15. R. Gross, *Interfaces in Superconducting Systems*, ed. by S. L. Shinde and D. Rudman, Springer, New York (1996), Ch. 6 .
16. Л. Н. Булаевский, В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин, ЖЭТФ **94**, 355 (1988).
17. F. Sols and J. Ferrer, Phys. Rev. B **49**, 15913 (1994).