ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 4, стр. 1484–1490

СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД ВО ФРАКТАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

А. А. Снарский, К. В. Слипченко*

Национальный технический университет Украины «КПИ»
252056, Киев, Украина

И. В. Безсуднов

«Наука-Сервис»
103473, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 июля 1997 г.

Для двумерных случайно-неоднородных сред найдено точное соотношение для средних по реализациям эффективных проводимостей во фрактальной области $\{\sigma_e(\tau, L)\}\{1/\sigma_e(-\tau, L)\}^{-1} = \sigma_e^2(\tau = 0, L \gg \xi)$, где ξ — корреляционная длина (масштаб самоусреднения), L — размер системы, $\tau = (p - p_c)/p_c$, p_c — порог протекания. При $L \gg \xi$ система самоусредняется и соотношение переходит в соотношение взаимности Дыхне [1] $\sigma_e(\tau)\sigma_e(-\tau) = \sigma_e^2(\tau = 0) = \sigma_1\sigma_2$. Аналогичное соотношение получено для сред с экспоненциально широким спектром распределения локальных проводимостей, а также для отдельных реализаций некоторых детермированных структур.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, макроскопически неоднородная среда описывается своими эффективными характеристиками, например, эффективной электропроводностью σ_e, связывающей, по определению, средние по объему электрические поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ и токи $\langle \mathbf{j} \rangle$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{1}$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ — локальные напряженность электрического поля и плотность тока. Усреднение проводится по объему V с характерным размером $L \sim V^{1/3}$, много большим корреляционной длины ξ. На размерах $L > \xi$ (L в этом случае принято называть репрезентативным размером) происходит самоусреднение системы.

Хорошо изученным типом случайно-неоднородных сред являются двухфазные, для которых все элементы можно четко разделить на два типа: «черные» и «белые», «хорошо» проводящие и «плохо» проводящие, «металлические» и «диэлектрические» и т. п.

В двумерном случае ($d = 2$) для двухфазных сред удается получить ряд точных соотношений [1] для σ_e. На пороге протекания, при $p = p_c = 1/2$, где p — концентрация хорошо проводящей фазы с удельной проводимостью $\sigma_1 > \sigma_2$, получено точное, годное для любого значения отношения $h = \sigma_2/\sigma_1$, выражение Дыхне [1]

$$\sigma_e(p = p_c) = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \quad L \gg \xi. \tag{2}$$

*E-mail: asnar@phys.carrier.kiev.ua

В случае $p \neq p_c$ точное аналитическое выражение для σ_e неизвестно и вряд ли может быть получено, однако можно записать точное соотношение для так называемых взаимных сред.

Если ввести взаимную (тильдованную) среду, отличающуюся от изначальной заменой значений проводимости фаз $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, то, согласно [1], между σ_e и эффективной проводимостью тильдованной среды $\tilde{\sigma}_e$ существует точное соотношение $\sigma_e(p)\tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_1\sigma_2$ — так называемое соотношение взаимности. Локальные поля и токи в этих средах связаны преобразованиями симметрии [1]

$$\mathbf{j} = \Lambda[\mathbf{n}\tilde{\mathbf{E}}] \equiv \Lambda P_{\pi/2}\tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{E} = \Lambda^{-1}[\mathbf{n}\tilde{\mathbf{j}}] \equiv \Lambda^{-1}P_{\pi/2}\tilde{\mathbf{j}}, \quad \Lambda = \sqrt{\sigma_1\sigma_2},$$

где $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ — локальные токи и поля в изначальной среде, $\tilde{\mathbf{j}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ — во взаимной, $\mathbf{n}$ — единичный нормальный к плоскости среды вектор, $P_{\pi/2}$ — оператор поворота на $\pi/2$. В случайно-неоднородных средах $\tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_e(1-p)$, и соотношение взаимности принимает вид

$$\sigma_e(p)\sigma_e(1-p) = \sigma_1\sigma_2 \quad \left(= \sigma_e^2(p = p_c)\right),$$

откуда, в частности, при $p = p_c = 1/2$ следует (2).

Для сред размерами $L < \xi$ (меньше масштаба самоусреднения) система является мезоскопической и измеряемые характеристики флуктуируют от реализации к реализации. В этом случае хорошо определенными величинами являются средние по реализациям.

2. СООТНОШЕНИЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ДВУМЕРНОЙ СРЕДЫ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Для перколяционных систем средние по реализациям от удельных проводимости и сопротивления степенным образом зависят от размера системы [2]; о таких системах говорят как о самоподобных и фрактальных [2, 3]. Для крайнего случая сильной неоднородности ($h = 0$) средние по реализациям проводимость $\{\sigma_e\}$ и сопротивление $\{\rho_e\}$ имеют вид [2]

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1(L/a_0)^{-t/\nu}, \quad \tau > 0, \quad L < \xi, \quad \{\rho_e\} = \rho_2(L/a_0)^{q/\nu}, \quad \tau < 0, \quad L < \xi,$$

где a_0 — минимальный размер в среде, в случае сеточной задачи это размер связи. Хотя $\{\sigma_e\}$ и $\{\rho_e\}$ сильно (степенным образом) зависят от L, их комбинация, обобщающая на фрактальную область соотношение взаимности, в двумерном случае, как следует из приведенных выше выражений, от L практически не зависит:

$$\{\sigma_e(\tau, L)\}\{\rho_e(-\tau, L)\}^{-1} = \sigma_e^2(\tau = 0, L \gg \xi) \approx \sigma_1\sigma_2.$$

На рис. 1 приведены результаты численного моделирования проводимости двумерной сети.

Соотношение взаимности во фрактальной области можно строго доказать. Для этого рассмотрим вытянутый вдоль оси x образец размером $L_\parallel \times L_\perp$ ($L_{\parallel,\perp} < \xi$) и приложим к нему токовые контакты один раз вдоль вертикальных сторон (при этом $\langle\mathbf{j}\rangle \parallel x$) второй раз — вдоль горизонтальных. Закон Ома при этом можно записать в виде

$$I_{\parallel,\perp} = G_{\parallel,\perp}U_{\parallel,\perp}, \tag{3}$$

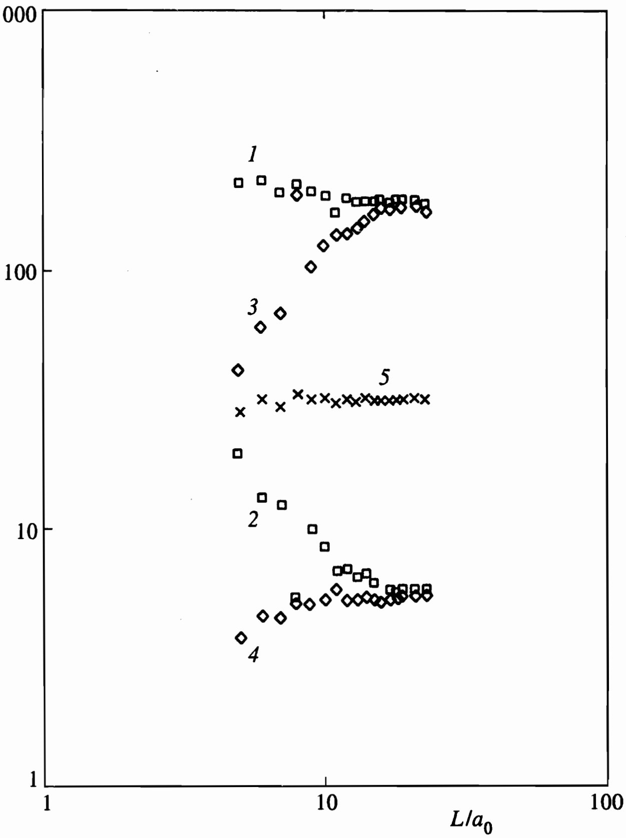

Рис. 1. Зависимости средних по реализациям проводимостей и сопротивлений от размера образца при $\sigma_2/\sigma_1 \approx 10^{-2}$. *1* — $\{G(\tau = 0.1, L)\}$, *2* — $\{G(\tau = -0.1, L)\}$, *3* — $1/\{R(\tau = 0.1, L)\}$, *4* — $1/\{R(\tau = -0.1), L\}$, *5*— $\sqrt{\{G(\tau = 0.1, L)\}/\{R(\tau = -0.1, L)\}}$

где $G_{\|,\perp}$ — кондактанс образца вдоль и поперек x.

Преобразования симметрии в терминах полного тока и падения напряжения ($I_{\|,\perp}$ и $U_{\|,\perp}$) имеют вид

$$I_{\|,\perp} = -\Lambda \tilde{U}_{\perp,\|}, \quad U_{\|,\perp} = -\Lambda^{-1} \tilde{I}_{\perp,\|}. \tag{4}$$

Заметим, что, вообще говоря, определение кондакса или сопротивления конечного образца подразумевает задание конкретных граничных условий (например, идеальные токовые контакты на одних гранях и изоляция на других). Легко видеть, что преобразования симметрии изменяют граничные условия так, что идеальные токовые контакты переходят в изолятор, и наоборот, граница с изолятором — в идеальный токовый контакт. Так что если рассматривается прямоугольный образец, к вертикальным граням которого приложены идеальные токовые контакты с напряжением между ними, а горизонтальные грани являются идеальным изолятором, то в дуальном образце токовые контакты с напряжением — горизонтальные грани, а изолятор — вертикальные. Интегрирование преобразований вдоль контуров, соединяющих противоположные грани, дает соотношения между соответствующими напряжениями и токами в дуальных образцах. Подставляя (4) в (3), получаем для закона Ома во взаимной среде:

$$\tilde{I}_{\parallel,\perp} = \tilde{G}_{\parallel,\perp}\tilde{U}_{\parallel,\perp}, \quad \tilde{G}_{\perp,\parallel} = \Lambda^2/G_{\parallel,\perp}. \tag{5}$$

На такое соотношение в конечной сетке $N \times N$ было указано в [4]. Усредняя по реализациям второе из этих выражений, получаем

$$\{\tilde{G}_{\perp,\parallel}\}\{1/G_{\parallel,\perp}\} = \sigma_1\sigma_2. \tag{6}$$

В случае $L_\parallel = L_\perp$ после перехода к удельным характеристикам получим

$$\{\sigma_e(p,L)\} \big/ \{\tilde{\rho}_e(p,L)\} = \sigma_1\sigma_2, \tag{7}$$

где $\rho_e = 1/\sigma_e$, и, так как для случайно-неоднородных сред $\{\tilde{\rho}_e(p,L)\} = \{\rho_e(1-p,L)\}$, соотношение взаимности (7) принимает вид

$$\{\sigma_e(p,L)\} \big/ \{\tilde{\rho}_e(1-p,L)\} = \sigma_1\sigma_2. \tag{8}$$

При $L > \xi$ необходимость в усреднении по реализациям отпадает и (8) переходит в известное соотношение взаимности [1], а при $p = p_c = 1/2$ — в формулу эффективной проводимости Дыхне (2).

Поскольку операции деления и усреднения по реализациям не коммутируют, из (8) даже при $p = p_c$ невозможно получить выражение, аналогичное выражению Дыхне (2). Возможно, однако, записать такое соотношение взаимности, которое на пороге протекания включает в себя только одну эффективную проводимость. Для получения этого соотношения, прежде чем усреднять второе выражение в (5), прологарифмируем его и учтем, что $\{\ln G_\parallel\} = \{\ln G_\perp\} = \{\ln G\}$ при $L_\parallel = L_\perp = L$. Тогда при $p = p_c$ после перехода к эффективной проводимости получим

$$\{\ln\sigma_e(p_c,L)\} = \ln\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \quad (= \ln\sigma_e(p_c, L > \xi)). \tag{9}$$

3. СООТНОШЕНИЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ПОЛОСКИ

Рассмотрим образец случайно-неоднородной двухфазной среды в форме полоски, такой что вдоль оси x ее размер $L_\parallel \gg \xi$, а вдоль оси y $L_\perp < \xi$. Несмотря на то, что один из размеров образца меньше корреляционного радиуса, кондактансы среды как вдоль оси x (когда токовые контакты, задающие граничные условия таковы, что $\langle \mathbf{j} \rangle$ параллелен оси x), $G_\parallel$, так и поперек нее, $G_\perp$, являются хорошо определенными величинами и не требуют дополнительного усреднения по реализациям случайной структуры. В самом деле, в одном крайнем случае $L_\perp = a_0$ и самоусреднение происходит при $L_\parallel \gg \xi_1 \propto |\tau|^{-\nu_1}$, $\nu_1 = 1$ [5]. В другом — двумерном — при $L_\perp = L_\parallel \gg \xi_2 \propto |\tau|^{-\nu_2}$, $\nu_2 = 4/3$ [2]. При увеличении $L_\perp$ от a_0 до $L_\parallel \gg \xi_2$ происходит переход от одномерного к двумерному поведению. Характерная длина самоусреднения переходит при этом от ξ_1 к ξ_2, и не видно причин, по которым этот переход не будет монотонным. Поэтому, как и для случайно-неоднородных сред (при $L_\parallel = L_\perp \gg \xi$), в нашем случае имеет место

$$\tilde{G}_{\parallel,\perp}(p) = G_{\parallel,\perp}(1-p),$$

и, таким образом, для полоски можно записать следующее соотношение взаимности:

$$G_{\|}(p)G_{\perp}(1-p) = \sigma_1\sigma_2. \tag{10}$$

На пороге протекания, точнее — в области размазки, соотношение взаимности (10) связывает между собой $G_{\|}$ и $G_{\perp}$ одного и того же образца, таким образом,

$$G_{\|}(p_c)G_{\perp}(p_c) = \sigma_1\sigma_2.$$

Заметим, что в частном случае, когда $L_{\perp}$ равно минимальному размеру в неоднородной системе и образец становится одномерным, сопротивление вдоль образца — просто сумма элементарных сопротивлений, а кондактанс поперек — сумма элементарных кондактансов, соотношение взаимности (10), как легко убедится непосредственным расчетом, выполняется тождественно.

4. СООТНОШЕНИЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ШИРОКИМ СПЕКТРОМ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Одна из основных задач теории протекания — определение σ_e случайной сетки с экспоненциально широким спектром сопротивлений. К ней сводится, в частном случае, задача о прыжковой проводимости [2, 6]. В сеточном варианте сопротивление i-ой связи задается в виде $r_i = r_0 e^{\lambda x}$, где x — случайная переменная в единичном интервале, имеющая гладкое распределение [6]. В континуальном варианте $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-\lambda x}$. Такие среды являются частным случаем рассмотренных в [1] двумерных сред с законом Ома

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \exp\left(\langle\ln\sigma\rangle + \chi\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{11}$$

где $\chi(x,y) = \ln\sigma - \langle\ln\sigma\rangle$, и, согласно [1], рассматривается такой ансамбль систем, что многоточечная функция распределения проводимости является четной функцией переменных χ. Выражение для σ_e при $L > \xi$ выводится аналогично двухфазному случаю, и, как показано в [1],

$$\sigma_e(L > \xi) = \exp\left(\langle\ln\sigma\rangle\right).$$

Применяя преобразования симметрии к образцу размером $L < \xi$, легко получить

$$\{\sigma_e\}/\{\rho_e\} = \exp\langle\ln\sigma\rangle. \tag{12}$$

Это — соотношение взаимности для системы с экспоненциально широким разбросом сопротивлений.

Как и в случае двухфазной среды, для среды с экспоненциально широким распределением локальных проводимостей можно получить соотношение для $\{\ln\sigma_e\}$. Повторяя рассуждения, приведенные в конце разд. 1, получаем выражение, аналогичное (9), которое может быть записано в двух формах:

$$\{\ln\sigma_e\} = \langle\ln\sigma\rangle, \quad \{\ln\sigma_e(L < \xi)\} = \ln\sigma_e(L > \xi), \tag{13}$$

т. е. в среде с экспоненциально широким спектром распределения локальных проводимостей среднее по реализациям эффективной проводимости равно среднему по объему локальной.

Аналогично предыдущему можно получить и соотношение взаимности в полоске. Не приводя вывода, запишем сразу

$$G_{\parallel}G_{\perp} = \exp\left(2\langle \ln \sigma \rangle\right). \tag{14}$$

Если локальная проводимость распределена по закону $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-\lambda x}$, где x — случайная величина с равномерной функцией распределения, принимающая значения от нуля до единицы, то

$$G_{\parallel}G_{\perp} = \sigma_0^2 e^{\lambda}.$$

5. СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СТРУКТУР

Выше были рассмотрены соотношения взаимности для средних по реализациям кондактансов. Для отдельной реализации таких соотношений, конечно, нет. Однако для некоторого класса неоднородных структур преобразования симметрии позволяют получить не только соотношения типа соотношений взаимности, но и точное значение сопротивлений и кондактансов для произвольного значения проводимости фаз.

В качестве примера рассмотрим спиральную структуру, изображенную на рис. 2. Структура из двух фаз с удельными проводимостями σ_1 (черный цвет) и σ_2 (белый) построена таким образом, что при замене $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ и повороте на $\pi/2$ вокруг оси, перпендикулярной к поверхности и проходящей через центр квадрата, она остается той же самой. Очевидно, для структур, удовлетворяющих такой симметрии, концентрации фаз равны. Тогда из (5) сразу же следует выражение для кондактанса (и сопротивления) образца $G = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ (напомним, что толщина образца считается единичной). Полученный результат означает, что $G_{\parallel}$ (контакты вертикальные) и $G_{\perp}$ (контакты горизонтальные) одинаковы. Заметим, что непосредственно из картинки структуры, изображенной на рис. 2, это не следует. Поворот на $\pi/2$ без замены $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ не является тождественным, так как геометрически структуры различны. Подобные структуры проводящих путей (если, например, считать, что «черная» фаза проводит намного лучше «белой») были рассмотрены при описании протекания тока в поликристаллических средах в случае сильной анизотропии электропроводности [7]. В этой работе было введено понятие ловушки для линий хорошей проводимости. При подходе к ловушке линия хорошей проводимости закручивается вокруг ее центра, плотность тока возрастает, ток перетекает по линиям плохой проводимости на соседний набор линий хорошей проводимости

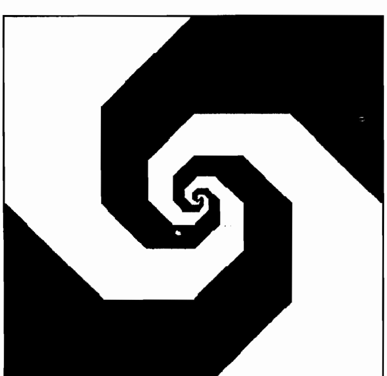

Рис. 2. Двухфазная структура — «ломаная спираль». При взаимной замене двух фаз и повороте на $\pi/2$ сопротивление образца остается неизменным

и по ним «развивается». Кондактанс такой ловушки был оценен при помощи вариационного принципа для случая сильной анизотропии и имел значение $G \sim \sqrt{\sigma_{\|}\sigma_{\perp}}$, где $\sigma_{\|,\perp}$ — главные значения тензора проводимости поликристаллической среды. Кондактанс аналогичной двухфазной ловушки, который выше подсчитан точно, также выражается через среднее геометрическое, конечно, теперь от значений изотропной проводимости фаз среды.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено несколько примеров двумерных сред, для которых методом преобразований симметрии Дыхне удается строго вывести соотношение взаимности для средних по реализациям кондактанса образца. Этими примерами, конечно, не исчерпывается класс сред, в которых возможны аналогичные соотношения. Преобразования симметрии использованы при $L > \xi$ в [1] при вычислении эффективной электропроводности в поликристаллических пленках и в [8] при вычислении эффективных гальваномагнитных характеристик. Соотношения взаимности при $L > \xi$ возможны и для более сложных, нежели проводимость, кинетических явлений, например для термоэлектрических [9–12]. Для всех этих случаев можно получить подобные соотношения и для $L < \xi$.

Отдельного изучения заслуживает вопрос о существовании соотношений взаимности в трехмерных случайно-неоднородных средах. Такие соотношения, очевидно, могут быть только приближенными и выполняться в области универсального поведения эффективных характеристик, например вблизи порога протекания.

Авторы выражают благодарность А. Н. Лагарькову, А. К. Сарычеву и П. М. Томчуку за обсуждение затронутых вопросов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-02-04432-а, 97-02-16923а).

Литература

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Teory*, Tailor & Francis, London, Washington, DC (1992).
3. Е. Федер, *Фракталы*, Мир, Москва (1991).
4. J. Helsing and G. Grimvall, Phys. Rev. B **41**, 11364 (1990).
5. T. Ohtsuki and T. Keyes, J. Phys. A **17**, L559 (1984).
6. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979).
7. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **84**, 1756 (1983).
8. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
9. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **81**, 665 (1981).
10. J. P. Straley, J. Phys. D **14**, 2101 (1981).
11. V. Halpern, J. Phys. C **16**, L217 (1983).
12. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **85**, 568 (1983).