ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 5, стр. 1558–1565

МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР АКСИОНА В СКРЕЩЕННОМ ПОЛЕ

В. В. Скобелев

Московский государственный индустриальный университет
109280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 октября 1997 г.

Рассчитан доминирующий однопетлевой электронный вклад в массовый оператор аксиона в скрещенном поле в асимптотиках по параметрам q^2/m_e^2 и $\chi = \sqrt{e^2(qF^2q)}/m_e^3$. Проведено сравнение соответствующей электромагнитной массы аксиона с массой квантовой хромодинамики, обусловленной смешиванием с π^0. Приведены выражения для вероятности рождения пар $a \to e^+e^-$ и сделан принципиальный вывод о наличии рефракционных эффектов при распространении аксиона во внешнем электромагнитном поле.

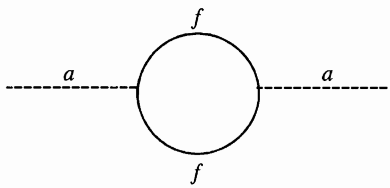
Аксион является гипотетической частицей, существование которой могло бы объяснить отсутствие нарушения CP-инвариантности в сильных взаимодействиях из естественных динамических соображений. Именно, в схеме Печчеи — Куинн [1] псевдоскалярное аксионное поле a вводится как первоначально безмассовое с лагранжианом взаимодействия с цветовым полем квантовой хромодинамики (КХД), имеющим вид (с кинетическим членом)

$$\mathscr{L}_a = \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x_\mu}\frac{\partial a}{\partial x^\mu} - \frac{\alpha_s}{8\pi f_a} a G_{b\mu\nu}\tilde{G}_b^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где α_s — эффективная безразмерная константа связи в сильных взаимодействиях, b — цветовой индекс, $\tilde{G}$ — дуальный тензор, f_a — константа с размерностью энергии (энергетический масштаб Печчеи — Куинн). Глобальная симметрия U_{PQ} (1) заключается в инвариантности суммы лагранжиана $\mathscr{L}_a$ и эффективного лагранжиана КХД $\mathscr{L}_s$ [2] относительно соответствующего преобразования, сводящегося для аксионного поля к сдвигу $a \to a + a_0$.

Основная идея Печчеи — Куинн состоит в том, что в квантовой теории аксион приобретает динамическую массу за счет смешивания с π^0, так как существует ненулевая амплитуда перехода аксион $\to$ 2 глюона $\to$ 2 кварка $\to$ π^0-мезон. Соответствующий член в лагранжиане $(1/2)m_a^2a^2$ нарушает симметрию U_{PQ} (1), однако это же означает, что в общем случае низкоэнергетический лагранжиан (1) содержит эффективный потенциал $V(a)$ ($V_{a\to 0} \simeq (1/2)m_a^2a^2$). Параметры $V(a)$ могут быть подобраны так, чтобы сумма $\mathscr{L}_s + \mathscr{L}_a$ не содержала CP-неинвариантных членов (более подробно см. обзор [3]). Иначе говоря, аксион — это псевдоскалярный голдстоуновский бозон, появляющийся при спонтанном нарушении симметрии U_{PQ} (1), а f_a — энергетический масштаб нарушения этой симметрии, причем $f_a \gtrsim 10^{10}$ ГэВ (хотя существуют аргументы как в пользу большего [4], так и в пользу меньшего значения [5][1)] нижней границы).

[1)] В [5] допущена опечатка: соотношение (26) следует читать как $f \geq 10^7$ ГэВ.



Эквивалентная схема реализации этого механизма состоит во введении прямой аксион-фермионной связи [6] вида

$$\mathscr{L} = \frac{c_f}{2f_a}\left(\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma^5\Psi\right)\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}, \tag{2}$$

которая является предпочтительной [3] (здесь c_f — модельно-зависимая безразмерная константа, имеющая порядок единицы). Это обусловливает существование собственно-энергетических диаграмм с фермионной петлей (см. рисунок). При распространении аксиона во внешнем электромагнитном поле за счет его воздействия на пропагатор заряженного фермиона у аксиона может появится электромагнитная масса δm_a, и представляет интерес сравнить ее с массой КХД m_a. Последняя, по астрофизическим данным, может изменяться в широких пределах 10^{-5} эВ$\lesssim m_a \lesssim 10$ эВ. При разумных значениях поля и энергии аксиона (в одной системе отсчета) можно ограничиться вкладом электронной петли ($f = e$), которой соответствует наименьшая масса заряженного фермиона.

В более общей постановке следует найти массовый оператор аксиона в электромагнитном поле, мнимая часть которого к тому же будет определять вероятность рождения пары e^+e^- в этом поле, что представляет самостоятельный интерес.

В дальнейших расчетах мы используем инвариантную технику скрещенного поля, развитую в работах Ритуса [7]. В таком поле оба инварианта

$$h = \frac{e^2(F^2)^\alpha_\alpha}{m^4}, \quad g = \frac{e^2}{m^4}\, e_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$$

равны нулю (e, m — заряд и масса электрона). Однако при выполнении условия $\chi^2 \gg h, g$, где

$$\chi = \frac{1}{m^3}\sqrt{e^2(qF^2q)}, \tag{3}$$

метод дает адекватные результаты и для произвольных слабоизменяющихся внешних электромагнитных полей.

В соответствии с видом лагранжиана взаимодействия (2) однопетлевой электронный вклад в массовый оператор аксиона имеет вид

$$M^2 = -\frac{ic_e^2}{4f_a^2}\int d^4z\, e^{i(qz)}\,\mathrm{Sp}\left[\hat{q}\gamma^5 G(z)\hat{q}\gamma^5 G(-z)\right], \tag{4}$$

где q — импульс внешней линии, $G(z)$ — зависящая от разности координат часть полной гриновской функции электрона в скрещенном поле,

$$S(x,y) = \exp\left[ie \int_x^y \left(dx' A(x')\right)\right] G(x-y), \tag{5}$$

которая в представлении собственного времени равна ($eF \to F$)

$$G(z) = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\exp\left[-\frac{iz^2}{4s} - ism^2 - is\frac{(zF^2z)}{12}\right] \times$$
$$\times\left[m + \frac{\hat z}{2s} - \frac{s}{3}(\gamma F^2 z) + \frac{ms}{2}(\gamma F\gamma) - \frac{i\gamma^5\left(\gamma\tilde F z\right)}{2}\right], \tag{5a}$$

$\tilde F_{\alpha\beta} = (1/2)e_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — дуальный тензор, $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ (фазовый множитель в (5) в петле с двумя вершинами сокращается). С учетом (5а) выражение (4) записывается в виде

$$M^2 = -\frac{ic_e^2}{4(4\pi)^4 f_a^2}\int_0^\infty \frac{ds_1}{s_1^2}\int_0^\infty \frac{ds_2}{s_2^2}\,\mathrm{Sp}\left\{\hat q\gamma^5\left[m + \frac{\hat z}{2s_1} - \frac{s_1}{3}(\gamma F^2 z) + \right.\right.$$
$$+\left.\frac{ms_1}{2}(\gamma F\gamma) - \frac{i\gamma^5\left(\gamma\tilde F z\right)}{2}\right]\hat q\gamma^5\left[m - \frac{\hat z}{2s_2} + \frac{s_2}{3}(\gamma F^2 z) + \frac{ms_2}{2}(\gamma F\gamma) + \right.$$
$$+\left.\left.\frac{i\gamma^5\left(\gamma\tilde F z\right)}{2}\right]\right\}\mathscr{F}\exp\left[-im^2(s_1+s_2)\right], \tag{6}$$

причем под z здесь понимается дифференциальный оператор $z^\alpha = -i\partial/\partial q_\alpha$, действующий на функцию $\mathscr{F}$, появляющуюся в результате интегрирования по координате z:

$$\mathscr{F} = 16i\pi^2\beta^2\exp\left[i\beta\left(q^2 - \frac{1}{3}s_1s_2(qF^2q)\right)\right], \qquad \beta = \frac{s_1s_2}{s_1+s_2}. \tag{7}$$

После взятия шпура и вычисления квадратичных комбинаций типа z^2, (zF^2z), $(qF^2z)^2$ и т. д. с помощью соотношения

$$z_\mu z_\nu \to -i(2\beta)\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}s_1s_2F^2_{\mu\nu}\right) + (2\beta)^2\left[q_\mu - \frac{1}{3}s_1s_2(qF^2)_\mu\right]\left[q_\nu - \frac{1}{3}s_1s_2(qF^2)_\nu\right]$$

получаем

$$M^2 = \frac{c_e^2}{16\pi^2 f_a^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{ds_1ds_2}{(s_1+s_2)^2}\exp\left\{-im^2(s_1+s_2) + i\beta\left[q^2 - \frac{1}{3}s_1s_2(qF^2q)\right]\right\}\times$$

$$\times \left\{ 2i\beta \left[-\frac{q^2}{2s_1s_2} - \frac{1}{3}\left(\frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} - 1\right)(qF^2q)\right] - m^2\left[q^2 - 2s_1s_2(qF^2q)\right] + \right.$$

$$\left. + (2\beta)^2\left[-\frac{q^4}{4s_1s_2} + \frac{1}{6}\left(\frac{s_1}{s_2}+\frac{s_2}{s_1}+\frac{5}{2}\right)q^2(qF^2q) - \frac{1}{9}s_1s_2\left(\frac{s_1}{s_2}+\frac{s_2}{s_1}+\frac{5}{2}\right)(qF^2q)^2\right]\right\}. \qquad (8)$$

Данное выражение расходится при малых s_1 и s_2, что является следствием неопределенности однопетлевых вкладов в M^2 в отсутствие поля из-за многовариантности взаимодействий аксиона. Сходящимся является «полевой» вклад

$$M_F^2 = M^2 - M^2\big|_{F=0}, \qquad (9)$$

который и будет нас интересовать.

Переходя далее к безразмерным переменным

$$v = (s_1 + s_2)m^2, \quad u = \frac{4s_1s_2}{(s_1+s_2)^2}, \qquad (10)$$

получаем после некоторых преобразований окончательный общий результат:

$$M_F^2 = \frac{c_e^2 m^4}{64\pi^2 f_a^2}\int_0^\infty \frac{dv}{v}\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^{1/2}}\exp\left(-iv + i\tilde{q}^2\frac{uv}{4}\right)\times$$

$$\times\left\{\left(1 - \exp\left(-\frac{i}{48}\chi^2u^2v^3\right)\right)\tilde{q}^2\left(1 + \frac{u}{4}\tilde{q}^2 + \frac{i}{v}\right) + \frac{1}{2}\chi^2 v\exp\left(-\frac{i}{48}\chi^2u^2v^3\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[-i\left(\frac{4}{3} - u\right) + uv + \frac{1}{3}\tilde{q}^2uv\left(1+\frac{u}{8}\right) - \frac{1}{18}\chi^2u^2v^3\left(1+\frac{u}{8}\right)\right]\right\}, \qquad (11)$$

где $\tilde{q}^2 = q^2/m^2$, значение χ определено формулой (3).

Вычисление интегралов в (11) не представляется возможным, поэтому следует ограничиться частными значениями параметров $\tilde{q}^2$ и χ.

1. $\chi \ll 1$, $\tilde{q}^2$ произвольно в пространственно-подобной области $\tilde{q}^2 < 0$. Лидирующий вклад здесь получается формальным разложением выражения (11) по χ^2. После простых вычислений находим

$$M_F^2 = \frac{c_e^2 m^4 \chi^2}{96\pi^2 f_a^2}\frac{\left(\Delta - \tilde{q}^2\right)^2}{\Delta^4}\left\{3\left[2 + (4-\Delta)\frac{\Delta + \tilde{q}^2}{\Delta - \tilde{q}^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\Delta}\frac{\Delta - \tilde{q}^2}{\Delta + \tilde{q}^2}\left[1 + \frac{4}{(\Delta - \tilde{q}^2)^4}\left(\Delta + \tilde{q}^2\right)\left(\Delta^2 + \tilde{q}^4\right)\left(2\Delta - \tilde{q}^2\right)\right]\ln\left(\frac{\Delta + \tilde{q}^2}{\Delta - \tilde{q}^2}\right)\right\}, \qquad (12)$$

где $\Delta = \left(\tilde{q}^4 - 4\tilde{q}^2\right)^{1/2}$. Аналитическое продолжение в область $\tilde{q}^2 > 0$ получается известными методами [8]. Этот вариант, однако, малоинтересен, так как фактически описывает виртуальные эффекты и в любом случае дает лишь малую полевую поправку к массовому оператору в отсутствие внешнего поля.

2. При описании поведения физического аксиона $q^2 = m_a^2$ во внешнем электромагнитном поле в силу его пренебрежимо малой массы в выражении (11) фактически можно положить $\tilde{q}^2 = 0$.

Вводя в рассмотрение комплексную функцию Харди–Стокса

$$f(x) = i\int_0^\infty dt\, \exp\left[-i\left(tx + \frac{t^3}{3}\right)\right], \tag{13}$$

мнимая часть которой совпадает с известной функцией Эйри $\Phi(x)$, после перехода от переменной v к новой переменной

$$t = v/x, \quad x = (4/\chi u)^{2/3}, \tag{14}$$

получаем

$$M_F^2 = \frac{c_e^2 m^4 \chi^2}{384\pi^2 f_a^2}\int_0^1 \frac{x\, du}{(1-u)^{1/2}}\left[-(4-3u)f + \right.$$

$$\left. + 3uxf' + \frac{1}{6}\chi^2 u^2\left(1 + \frac{u}{8}\right)x^3 f'''\right]. \tag{15}$$

Используя дифференциальное уравнение для функции $f(x)$

$$f'' - xf = -1, \tag{16}$$

удобней с учетом явного вида x (14) переписать формулу (15) в виде

$$M_F^2 = \frac{c_e^2 m^4 \chi^2}{288\pi^2 f_a^2}\int_0^1 \frac{x\, du}{(1-u)^{1/2}}\left[\left(-1 + \frac{5}{2}u\right)f + \left(2 + \frac{5}{2}u\right)xf'\right]. \tag{17}$$

Это выражение при любых конечных χ имеет и действительную, и мнимую части, причем последняя связана с вероятностью W_F рождения пары аксионом в скрещенном поле в соответствии с условием унитарности

$$\operatorname{Im} M_F^2 = -q_0 W_F. \tag{18}$$

а) $\chi \ll 1$. Для нахождения действительной части достаточно использовать разложение

$$f(x)\big|_{x\gg 1} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^4} + \ldots,$$

после чего легко получаем

$$\operatorname{Re} M_F^2 \simeq -\frac{c_e^2 m^4 \chi^2}{48\pi^2 f_a^2}. \tag{19}$$

Этот же результат следует из (12) при $\tilde{q}^2 = 0$ и справедлив в произвольном случае $F = \mathrm{const}$, так как возможное отличие состоит в добавлении к χ^2 в (19) слагаемого вида $h(m_a^2/m^2)$, которое пренебрежимо мало.

Заменяя далее в выражении (17) f на Φ и используя асимптотику функций Эйри при $x \to \infty$

$$\Phi(x) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \tag{20}$$

находим с учетом значений стандартных интегралов [9] приближенное выражение для мнимой части M_F^2:

$$\operatorname{Im} M_F^2 \simeq -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{c_e^2 m^4}{32\pi f_a^2} \chi \exp\left(-\frac{8}{3\chi}\right). \tag{21}$$

Подобная зависимость (с учетом (18)) W_F от χ носит общий характер и отмечена, например, в работе [7] для процесса образования пары фотоном в скрещенном поле.

б) $\chi \gg 1$. При рассмотрении этого предела нельзя положить в (17) $f(x) \to f(0)$, $f'(x) \to f'(0)$, так как интеграл будет расходиться, поэтому вычисления требуют осторожности. Для этих целей разобьем интеграл в (17) на три вклада

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \tag{22}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_2 \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 \frac{du\, x}{\sqrt{1-u}} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{5}{2} u x f' \\ 2 x f' \\ \left(-1 + \dfrac{5}{2} u\right) f \end{array} \right\}. \tag{22a}$$

Предварительно заметим, что при вычислении интеграла типа

$$J = \int\limits_0^1 du\, f(x) \varphi(u) \tag{23}$$

в асимптотике $\chi \to \infty$ с учетом аргумента (14) лидирующий вклад получается заменой $f(x) \to f(0)$, если остающийся интеграл сходится, а следующий член разложения δJ формируется в области $u \lesssim \chi^{-1}$, где x велико и $f \simeq 1/x$. Тогда нетрудно получить, что

$$\delta J \propto 1/\chi^{\alpha+1}, \tag{23a}$$

где α определяется условием $\varphi|_{u\to 0} \propto u^\alpha$. Это же получается и при замене $f \to f'$ в (23). Тогда асимптотика I_1 определяется традиционным способом и с учетом значения получающегося интеграла [9] равна

$$I_1 = 15\sqrt{\pi}\, f'(0) \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)} \left(\frac{4}{\chi}\right)^{4/3} + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right). \tag{24}$$

Выражение I_2 с учетом (23а) запишем в виде

$$I_2 = 2 \int\limits_0^1 du\, x^2 f'(x) + 2f'(0) \int\limits_0^1 du\, x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1\right) + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right).$$

Так как

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \left(\frac{\chi}{4}\right)^{2/3} u^{5/3} \frac{df}{du},$$

то первый интеграл может быть проинтегрирован по частям, а второй заменой $u = 1-y^2$ сводится к табличному [9], что дает

$$I_2 = -3\left(\frac{4}{\chi}\right)^{2/3}\left[f(0) + \left(\frac{4}{\chi}\right)^{2/3} f'(0)\right] + \int_0^1 du\, x f(x) +$$
$$+ 6f'(0)\left(\frac{4}{\chi}\right)^{4/3} F\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -1\right) + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right), \tag{25}$$

где F — гипергеометрическая функция.

Выражение I_3 с учетом (23а) записывается в виде

$$I_3 = f(0)\int_0^1 \frac{du\, x}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{5}{2}u - 1\right) + 3f(0)\left(\frac{4}{\chi}\right)^{2/3} - \int_0^1 du\, x f(x) + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right). \tag{26}$$

Первое слагаемое тождественно обращается в нуль [9], а последние два сокращаются при сложении с I_2 (25).

Окончательно, с учетом выражений (22), (24)–(26) и значения

$$f'(0) = \frac{\Gamma(2/3)}{2\cdot 3^{1/3}}\left(1 - i\sqrt{3}\right),$$

получаем асимптотику массового оператора (17)

$$M_F^2 = \frac{c_e^2 m^4}{f_a^2}\,\frac{6^{2/3}\Gamma(2/3)\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{144\pi^2}\left\{5\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)} + \right.$$
$$\left. + 2F\left(1, \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -1\right) - 1\right\}\left[\chi^{2/3} + O(1)\right], \tag{27}$$

причем число в фигурных скобках положительно.

Заметим, что в электродинамике сильного поля типичная зависимость при больших χ имеет вид $\chi^{2/3}$ (например, в асимптотике вероятности процесса $\gamma \to e^+e^-$ [7]) и является универсальной, подобно логарифмической зависимости при больших энергиях в отсутствие поля. Как отмечено в [7], замена логарифмической зависимости на степенную во внешнем поле приводит к увеличению роли радиационных поправок при больших энергиях. В аксионных взаимодействиях ситуация аналогична, так как M_F^2 также пропорционально $\chi^{2/3}$ (27).

Переходя к обсуждению результатов, проведем сначала формальное сравнение эффективной «массы» $m_{eff} = |M_F^2|^{1/2}$ с массой КХД m_a, а в оптимальном варианте следует использовать выражение (27). После некоторых преобразований находим по порядку величины

$$m_{eff} \sim 10^{-6} c_e \chi^{1/3} m_a, \tag{28}$$

причем здесь было использовано соотношение $m_a f_a \simeq 6\cdot 10^3$ МэВ^2. Принимая $c_e \sim 1$, приходим к выводу, что эффекты взаимодействия аксиона с замагниченным электронно-позитронным вакуумом могут доминировать при значениях $\chi \geq 10^{18}$, что нереализуемо даже в астрофизических ситуациях.

Конкретная физическая интерпретация электромагнитной добавки δm_a к массе аксиона упрощается при разумных значениях $\chi \ll 1$, когда $|\operatorname{Re} M_F^2| \gg |\operatorname{Im} M_F^2|$. Тогда из выражения (19) следует, что

$$\delta m_a = \sqrt{M_F^2} \simeq i\frac{c_e m^2 \chi}{4\sqrt{3}\,\pi f_a}, \tag{29}$$

т. е. δm_a является чисто мнимой величиной. Физически это означает наличие рефракционных эффектов при распространении аксиона в электромагнитном поле, однако практического значения они в любом случае не имеют из-за очевидной малости. Тем не менее данное обстоятельство является принципиальным, так как именно связь вида (2), т. е. псевдовектор $\otimes$ псевдовектор, приводит к отсутствию рефракции при конечной плотности электронного газа [3] (в отличие от связи псевдоскаляр $\otimes$ псевдоскаляр). Как видно, при распространении аксиона в электромагнитном поле с учетом поляризации электронно-позитронного вакуума ситуация существенно иная.

Формулы (18), (21), (27) определяют также вероятности рождения пары e^+e^- аксионом в электромагнитном поле в асимптотиках по параметру χ, что дополняет результаты работы [4], в которой, в частности, найдена вероятность в сверхсильном магнитном поле, и работы [5], где в числе прочих вопросов обсуждался аннигиляционный канал в скрещенном поле.

В целом, результаты работы свидетельствуют о неизменности существующих представлений о величине массы аксиона, в том числе и в присутствии внешних электромагнитных полей.

Литература

1. R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
2. C. G. Callan, R. F. Dashen, and D. J. Gross, Phys. Lett. B **63**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 177 (1976).
3. G. G. Raffelt, Phys. Rep. **198**, 1 (1990).
4. В. В. Скобелев, ЯФ **60**, 484 (1997).
5. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **112**, 25 (1997).
6. J. E. Kim, Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979); M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **166**, 493 (1980).
7. В. И. Ритус, Тр. ФИАН **111**, 5 (1979).
8. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 2, Наука, Москва (1971), с. 63.
9. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971), с. 329, 298, 299.