ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 5, стр. 1566–1578

БЕЗАНОМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ СТРУНЫ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

*С. Н. Вергелес**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 11 декабря 1997 г.

В двумерном пространстве-времени построена безаномальная квантовая теория релятивистской струны. Состояния струны оказываются подобными состояниям квантовой безмассовой киральной частицы. Результат получен за счет обобщения понятия «оператор» в квантовой теории поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в ряде работ (см., например, [1, 2] и ссылки там) были сделаны утверждения о возможности безаномального квантования некоторых моделей двумерной гравитации. В частности, в [1] рассматривалась такая модель двумерной гравитации [3], которая в некоторых переменных описывалась такими же связями первого рода, какие описывают релятивистскую бозонную струну в двумерном пространстве-времени:

$$\mathscr{E} = -\mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 \approx 0\,,$$

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}\left((\pi_0)^2 + (r^{0\prime})^2\right), \qquad \mathscr{E}_1 = \frac{1}{2}\left((\pi_1)^2 + (r^{1\prime})^2\right), \tag{1.1а}$$

$$\mathscr{P} = r^{a\prime}\,\pi_a = r^{0\prime}\,\pi_0 + r^{1\prime}\,\pi_1 \approx 0. \tag{1.1б}$$

Мы пользуемся безразмерными величинами. Здесь $r^a(x)$ и $\pi_a(x)$, $a = 0, 1$ — канонически-сопряженные поля на одномерном многообразии, так что ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$[r^a(x),\, \pi_b(y)\,] = i\,\delta^a_b\,\delta(x-y). \tag{1.2}$$

Штрих или точка сверху означают производную $\partial/\partial x$ или $\partial/\partial t$ соответственно.

На этом этапе квантования определяется основное состояние теории, что позволяет провести нормальное упорядочение операторов в связях (1.1). Определенное нормальное упорядочение в связях в свою очередь может привести к аномалиям в коммутаторах связей. Эти аномалии частично разрушают слабые равенства (1.1). Для определения

---

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

основного состояния поля r^a и π_a разлагаются по модам, возникающим при решении уравнений Гейзенберга

$$i\dot{r}^a = [r^a, \mathscr{H}], \qquad i\dot{\pi}_a = [\pi_a, \mathscr{H}],$$
$$\mathscr{H} = \int dx\, \mathscr{E}. \tag{1.3}$$

Решения уравнений (1.2), (1.3) записываются в виде

$$r^a(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} \left\{ c_k^a \exp\left(-i(|k|t - kx)\right) + c_k^{a+} \exp\left(i(|k|t - kx)\right)\right\},$$

$$\pi^a(t, x) = -i \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{|k|}{2}} \left\{ c_k^a \exp\left(-i(|k|t - kx)\right) - c_k^{a+} \exp\left(i(|k|t - kx)\right)\right\},$$

$$[c_k^a, c_p^{b+}] = 2\pi\eta^{ab}\delta(k-p), \qquad [c_k^a, c_p^b] = 0. \tag{1.4}$$

Здесь η^{ab} (ниже — $\eta^{\mu\nu}$) = diag$(-1, 1)$. Имеем также коммутационные соотношения

$$[\mathscr{H}, c_k^a] = -|k|\,c_k^a, \qquad [\mathscr{H}, c_k^{a+}] = |k|\,c_k^{a+}. \tag{1.5}$$

При традиционном квантовании операторы c_k^a считаются операторами уничтожения, а их эрмитово-сопряженные операторы c_k^{a+} — операторами рождения. Основное состояние $|0\rangle$ удовлетворяет условиям

$$c_k^a |0\rangle = 0. \tag{1.6}$$

Нормальное упорядочение операторов (c_k^{a+}, c_k^a) в величинах (1.1) означает расположение операторов рождения левее всех операторов уничтожения.

Рассмотрим состояние

$$|k, a\rangle = c_k^{a+}|0\rangle. \tag{1.7}$$

Из коммутационных соотношений (1.5) немедленно следует, что

$$\mathscr{H}|k, a\rangle = (|k| + E_0)|k, a\rangle, \tag{1.8}$$

где E_0 — значение оператора $\mathscr{H}$ для основного состояния. Равенство (1.8) означает, что оператор $\mathscr{H}$ положительно определен.

Вследствие (1.4) и (1.6) для скалярного произведения векторов (1.7) имеем

$$\langle k, a | p, b\rangle = 2\pi\eta^{ab}\delta(k-p). \tag{1.9}$$

Отсюда видно, что метрика в полном пространстве состояний является индефинитной.

Далее вычислим коммутатор $[\mathscr{E}, \mathscr{P}]$, который, согласно (1.1), представляется в виде суммы двух членов:

$$\left[\mathscr{E}(x), \mathscr{P}(y)\right] = -\left[\mathscr{E}_0(x), r^{0'}\pi_0(y)\right] + \left[\mathscr{E}_1(x), r^{1'}\pi_1(x)\right]. \tag{1.10}$$

Вследствие (1.2) оба коммутатора в правой части равенства (1.10) совпадают с точностью до замены индекса «a». Эти коммутаторы пропорциональны (с точностью до упорядочения) величинам $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}_1$ соответственно. Нормальное упорядочение операторов в рассматриваемых коммутаторах, как известно, приводит к аномалиям.

Действительно, из коммутационных соотношений (1.4) вытекает, что соответствия $c_k^0 \leftrightarrow c_k^{1+}$, $c_k^{0+} \leftrightarrow c_k^1$ устанавливают изоморфизм алгебр Гейзенберга H_0 и H_1, имеющих наборы образующих $(c_k^0,\, c_k^{0+})$ и $(c_k^{1+},\, c_k^1)$ соответственно. В таком случае нормальное упорядочение операторов в алгебре H_1 переводится указанным изоморфизмом в антинормальное упорядочение в алгебре H_0. Известно, что в задачах рассматриваемого типа нормальное и антинормальное упорядочения приводят к аномалиям, различающимся только знаком. Следовательно, вклад первого коммутатора в правой части равенства (1.10) в аномалию будет $(-A)$, а второго — (A). Но так как перед первым коммутатором в (1.10) имеется знак «минус», то аномалия в (1.10) равна $-(-A)+A=2A$.

Теперь попробуем рассмотреть проблему с другой точки зрения.

В работе [1] Джекив утверждает, что условие положительности (1.8) оператора $\mathscr{H}$ в рассматриваемой теории не является необходимым. Исходным требованием теории является удовлетворение слабых равенств (1.1). Поэтому мы вправе отказаться от условий квантования (1.6) и заменить их следующими условиями:

$$c_k^{0+}\,|\,0\,\rangle = 0\,, \qquad c_k^1\,|\,0\,\rangle = 0. \tag{1.11}$$

При условиях квантования (1.11) базис полного фоковского пространства теории состоит из векторов вида

$$c_{k_1}^0 \,\ldots\, c_{k_m}^0\, c_{p_1}^{1+} \,\ldots\, c_{p_n}^{1+}\,|\,0\,\rangle. \tag{1.12}$$

Из коммутационных соотношений (1.4) вытекает, что скалярное произведение состояний (1.12) положительно определено. Более того, в алгебре операторов (1.1) отсутствует аномалия.

Действительно, при условиях (1.11) нормальное упорядочение состоит в расположении операторов $(c_k^0,\, c_k^{1+})$ левее всех операторов $(c_k^{0+},\, c_k^1)$. Это означает, что в обеих алгебрах Гейзенберга H_0 и H_1 происходит нормальное упорядочение. Теперь при нормальном упорядочении оба коммутатора в (1.10) дают одинаковый вклад в аномалию, равный A. С учетом знака «минус» перед первым коммутатором в правой части равенства (1.10) полная аномалия оказывается равной $-A+A=0$.

Отсутствие аномалии в алгебре операторов $(\mathscr{E},\, \mathscr{P})$ дает возможность удовлетворить все слабые равенства $\mathscr{E}\approx 0$, $\mathscr{P}\approx 0$. В [1] приводятся два физических состояния, которые аннулируют операторы $\mathscr{E}$ и $\mathscr{P}$:

$$\Psi_{gravity}(r^a) = \exp \pm \frac{i}{2} \int dx\, \varepsilon_{ab}\, r^a\, r^{b'}.$$

В этой работе мы также проводим пересмотр условий квантования для релятивистской струны в двумерном пространстве-времени. При этом мы определяем пространство физических состояний с положительно определенным скалярным произведением. Нефизические состояния в теории вообще не вводятся в рассмотрение. Физические состояния аннулируют все связи первого рода, т. е. все операторы Вирасоро. Физические состояния характеризуются непрерывным параметром, который имеет смысл импульса. Однако в нашей теории не все динамические переменные являются линейными операторами в пространстве физических состояний. В предлагаемой теории состояния релятивистской струны в двумерном пространстве-времени оказываются идентичными состояниям безмассовой киральной частицы.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ БОЗОННАЯ СТРУНА В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Пусть X^μ, $\mu = 0, 1$, обозначают координаты в двумерном пространстве Минковского. Рассмотрим действие Намбу для бозонной струны

$$S = -\frac{1}{l^2}\int \sqrt{-g}\, d^2\xi = \int d\tau\, \mathscr{L}. \tag{2.1}$$

Здесь $\xi^a = (\tau, \phi)$ — параметры мировой поверхности струны и

$$g = det\, g_{ab}\,, \qquad g_{ab} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}.$$

Параметр τ считается временным, а ϕ — пространственным. Далее частные производные $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial\phi$ обозначаются соответственно точкой и штрихом сверху. Легко установить, что обобщенные импульсы $\pi_\mu = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{X}^\mu$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \frac{l^2}{2}\,\pi_\mu\,\pi^\mu + \frac{1}{2\,l^2}\,X^{\mu\prime}\,X'_\mu \approx 0\,, \\ \mathscr{P} &= X^{\mu\prime}\,\pi_\mu \approx 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Величины $\mathscr{E}(\phi)$ и $\mathscr{P}(\phi)$ исчерпывают все связи первого рода. Гамильтониан системы

$$\mathscr{H} = \int d\phi\, \pi_\mu\, \dot{\phi}^\mu - \mathscr{L} \approx 0.$$

Поэтому, следуя Дираку, мы должны пользоваться обобщенным гамильтонианом, который является произвольной линейной комбинацией связей первого рода (2.2):

$$\mathscr{H}_T = \int d\phi\,(v\,\mathscr{P} + w\,\mathscr{E}). \tag{2.3}$$

Уравнения движения можно получить из вариационного принципа

$$\delta\, S = \delta\left\{\int d\tau \left(\int d\phi\, \pi_\mu\, \dot{X}^\mu - \mathscr{H}_T\right)\right\} = 0. \tag{2.4}$$

В случае открытой струны, когда параметр ϕ изменяется в пределах от нуля до числа π, вариационный принцип (2.4) дает кроме уравнений движения граничные условия

$$\left(v\,\pi_\mu + w\,\frac{1}{l^2}\,X'_\mu\right)\bigg|_{\phi=0,\,\pi} = 0, \tag{2.5}$$

которые обычно заменяют условиями

$$v|_{\phi=0,\,\pi} = 0\,, \qquad X'_\mu|_{\phi=0,\,\pi} = 0. \tag{2.6}$$

Для замкнутой струны вместо граничного условия имеется условие периодичности.

Далее мы рассматриваем открытую струну.

При квантовании первый шаг заключается в постулировании перестановочных соотношений обобщенных координат и импульсов:

$$\left[X^{\mu}(\phi),\, \pi^{\nu}(\phi')\right] = i\,\eta^{\mu\nu}\,\delta(\phi-\phi'). \tag{2.7}$$

Коммутационные соотношения (2.7) и граничные условия (2.6) удовлетворяются, если

$$X^{\mu}(\phi) = \frac{l}{\sqrt{\pi}}\left(x^{\mu} + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\,\alpha^{\mu}_{n}\,\cos n\phi\right),$$

$$\pi^{\mu}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,l}\sum_{n}\alpha^{\mu}_{n}\,\cos n\phi\,, \tag{2.8}$$

причем элементы $(x^{\mu},\,\alpha^{\mu}_{n})$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}&[\,x^{\mu},\,\alpha^{\nu}_{n}\,] = i\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{n}\,, \qquad [\,x^{\mu},\,x^{\nu}\,]=0\,,\\ &[\,\alpha^{\mu}_{m},\,\alpha^{\nu}_{n}\,] = m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m+n}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Так как величины (2.8) вещественны,

$$x^{\mu +} = x^{\mu}\,, \qquad \alpha^{\mu +}_{n} = \alpha^{\mu}_{-n}. \tag{2.10}$$

Связи (2.2) можно представить следующим образом:

$$(\mathscr{E} \pm \mathscr{P})(\phi) = \frac{1}{2}\left(\xi^{\mu}_{\pm}(\phi)\right)^{2}\,, \tag{2.11}$$

где

$$\xi^{\mu}_{\pm}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n}\alpha^{\mu}_{n}\,\exp(\mp i\,n\,\phi). \tag{2.12}$$

Отсюда видно, что $\mathscr{E}-\mathscr{P}$ отличается от $\mathscr{E}+\mathscr{P}$ заменой ϕ на $-\phi$. Это обстоятельство упрощает дальнейший анализ, поскольку величина $\mathscr{E}+\mathscr{P}$ на интервале $-\pi\le\phi\le\pi$ содержит всю информацию о величинах $\mathscr{E}\pm\mathscr{P}$ на интервале $0\le\phi\le\pi$. Поэтому компоненты Фурье

$$L_{n} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi\,(\mathscr{E}+\mathscr{P})\,\exp(i\,n\,\phi) \tag{2.13}$$

эквивалентны множеству величин (2.2) при $0\le\phi\le\pi$. Согласно (2.11)–(2.13) имеем

$$L_{n} = \frac{1}{2}\,:\sum_{m}\alpha^{\mu}_{n-m}\,\alpha_{\mu\,m}\,:\,. \tag{2.14}$$

Смысл операции упорядочения в (2.14) определяется методом квантования.

Выпишем также выражения для импульса и момента струны:

$$P^{\mu} = \int_{0}^{\pi} d\phi\, \pi^{\mu}\,, \qquad J^{\mu\nu} = \int_{0}^{\pi} d\phi\, (X^{\mu}\, \pi^{\nu} - X^{\nu}\, \pi^{\mu}). \tag{2.15}$$

При помощи (2.6) и (2.7) непосредственно проверяется, что

$$[\, P^{\mu},\, \mathscr{H}_T\,] = 0\,, \qquad [\, J^{\mu\nu},\, \mathscr{H}_T\,] = 0.$$

Это означает, что импульс и момент струны сохраняются.

При общепринятом в настоящее время квантовании основное состояние $|\,0\,\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\alpha^{\mu}_{m}\, |\,0\,\rangle = 0\,, \qquad m \geq 0. \tag{2.16}$$

Полное пространство состояний является линейной оболочкой векторов вида

$$\alpha^{\mu_1}_{m_1} \ldots \alpha^{\mu_s}_{m_s}\, |\,0\,\rangle\,, \qquad m_i < 0. \tag{2.17}$$

Таким образом, все α^{μ}_{m} являются линейными операторами в полном пространстве состояний. Из (2.9) и (2.16) следует, что в пространстве состояний (2.17) метрика является индефинитной. Упорядочение в (2.14) означает, что операторы α^{μ}_{m} с $m < 0$ располагаются левее всех операторов α^{μ}_{n} с $n \geq 0$. При таком упорядочении коммутаторы операторов Вирасоро содержат аномалии:

$$[\, L_n,\, L_m\,] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{1}{12}\, D(n^3 - n). \tag{2.18}$$

Здесь D — размерность x-пространства, в нашем случае равная двум. Поэтому максимум, чего можно достичь, — это аннулирование операторов L_n с $n \geq 0$. В результате теория оказывается непротиворечивой лишь при $D = 26$. Подробное изучение проблем, возникающих при квантовании (2.16), можно найти в [4].

Теперь изложим предлагаемый нами путь квантования двумерной струны, который приводит к самосогласованной теории струны в двумерном пространстве. Наш метод квантования струны аналогичен методу квантования электромагнитного поля, применявшемуся Дираком (см. [5], а также Приложение).

Введем обозначения

$$x_{\pm} = x^0 \pm x^1\,, \qquad \alpha^{(\pm)}_{m} = \alpha^{0}_{m} \pm \alpha^{1}_{m}. \tag{2.19}$$

Из (2.9) получаем

$$\begin{aligned} &[\alpha^{(+)}_{m},\, \alpha^{(+)}_{n}] = [\alpha^{(-)}_{m},\, \alpha^{(-)}_{n}] = 0\,, \qquad [\alpha^{(+)}_{m},\, \alpha^{(-)}_{n}] = -2m\, \delta_{m+n}, \\ &[x_{+},\, x_{-}\,] = 0\,, \qquad [x_{+},\, \alpha^{(+)}_{n}] = [x_{-},\, \alpha^{(-)}_{n}\,] = 0\,, \\ &[x_{+},\, \alpha^{(-)}_{n}\,] = -2i\, \delta_{n}\,, \qquad [x_{-},\, \alpha^{(+)}_{n}\,] = -2i\, \delta_{n}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Запишем операторы Вирасоро в переменных $\alpha^{(\pm)}$:

$$L_n = -\frac{1}{2}\, :\sum_{m} \alpha^{(+)}_{n-m}\, \alpha^{(-)}_{m}\, :\,. \tag{2.21}$$

По определению, операция упорядочения в (2.21) означает, что либо элементы $\alpha^{(+)}$ расположены левее всех элементов $\alpha^{(-)}$, либо элементы $\alpha^{(-)}$ расположены левее всех элементов $\alpha^{(+)}$. Оба эти порядка эквивалентны. Действительно,

$$\sum_m \alpha_m^{(-)} \alpha_m^{(+)} = \sum_m \alpha_m^{(+)} \alpha_m^{(-)} + 2 \sum_m m.$$

Последнюю сумму можно считать равной нулю, так как она представляется в виде $\zeta(-1) - \zeta(-1)$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. Известно, что дзета-функция

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

имеет единственное аналитическое продолжение в точку $s = -1$ и $\zeta(-1) = -1/12$.

Для определенности выберем такое упорядочение, какое имеется в (2.21).

Согласно (2.20) имеем

$$[\, L_m,\, \alpha_n^{(-)}\,] = -n\, \alpha_{m+n}^{(-)}. \tag{2.22}$$

Из (2.20) и (2.22) видно, что слабые равенства $\alpha_n^{(-)} \approx 0$ и $L_n \approx 0$ алгебраически совместны. Поэтому определим физические состояния как состояния, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_n^{(-)} |\ \rangle = 0\,, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.23}$$

Из (2.23) и (2.21) немедленно следует, что

$$L_n |\ \rangle = 0\,, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.24}$$

для любых физических состояний. Равенства (2.24) означают, что при квантовании (2.23) алгебра Вирасоро не имеет аномалии:

$$[L_n,\, L_m\,] = (n - m)\, L_{n+m}. \tag{2.25}$$

Последнюю формулу легко получить также и путем непосредственного вычисления коммутаторов, если упорядочение считать заданным согласно (2.21). Условия квантования (2.23) в точности аналогичны условиям квантования (П.8), примененным Дираком для квантования электромагнитного поля [5].

Обратим внимание на тот факт, что состояния вида

$$\alpha_n^{(+)} |\ \rangle\,, \qquad n \neq 0, \tag{2.26}$$

в теории не рассматриваются, поскольку эти состояния не удовлетворяют условиям (2.23). Поэтому матричные элементы величин $\alpha_n^{(+)}$ с $n \neq 0$ относительно физических состояний (2.26) не могут быть вычислены. Следовательно, величины $\alpha_n^{(+)}$ с $n \neq 0$ не могут являться операторами в пространстве физических состояний. Отсюда вытекает, что наблюдаемые величины не могут зависеть от элементов $\alpha_n^{(+)}$ с $n \neq 0$. Иными словами, наблюдаемые величины должны коммутировать со всеми операторами $\alpha_n^{(-)}$. Согласно (2.20) таких величин имеется две: x_- и p_+ ($p_\pm \equiv \alpha_0^{(\pm)}$). Обе эти величины вещественны.

Таким образом, мы видим, что величины α_n^μ, $n \neq 0$, не являются, вообще говоря, линейными операторами в пространстве состояний в обычном смысле. Здесь мы придерживаемся концепции, сформулированной и примененной Дираком в [5]. Согласно этой концепции, в квантовой теории поля линейные операторы, действующие в неких линейных пространствах, заменяются так называемыми q-числами, которые образуют ассоциативную некоммутативную алгебру с инволюцией над комплексными числами. Мы формулируем здесь концепцию Дирака, используя общепринятую математическую терминологию.

Обозначим через $\mathscr{A}$ ассоциативную некоммутативную инволютивную алгебру с единицей над комплексными числами. Ассоциативность означает, что для любых элементов u, v, w алгебры $\mathscr{A}$ и любого числа c имеют место равенства

$$(u\,v)\,w = u\,(v\,w)\,, \qquad (cu)\,v = u\,(cv) = c(u\,v).$$

Инволютивность алгебры означает, что существует отображение $u \mapsto u^+$ из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$ такое, что

$$(u^+)^+ = u, \quad (c_1 u + c_2 v)^+ = \bar{c}_1 u^+ + \bar{c}_2 v^+\,, \quad (u\,v)^+ = v^+\,u^+$$

для любых u, $v \in \mathscr{A}$ и любых чисел c_1 и c_2. Черта сверху означает комплексное сопряжение. Если $u^+ = u$, то говорят, что элемент u — эрмитов.

Предполагается также, что алгебра $\mathscr{A}$ имеет такую систему образующих $\{\alpha_p\}$, для которой все соотношения ограничиваются видом коммутаторов

$$[\alpha_p,\, \alpha_{p'}\,] = c_{p\,p'}\,.$$

Здесь $c_{p\,p'}$ — некие комплексные c-числовые (в смысле Дирака) величины.

Определение инволютивных алгебр (или алгебр с инволюцией) и другие приводимые здесь математические определения можно найти в [6, 7].

Обозначим через V — векторное пространство над комплексными числами, элементы которого обозначаются $|\,\Lambda\,\rangle$, $|\,\Sigma\,\rangle$, ... , и пусть V^+ — сопряженное пространство, элементы которого обозначаются $\langle \ldots |$. Имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами пространств V и V^+ такое, что $c\,|\,\Lambda\,\rangle \leftrightarrow \langle\,\Lambda\,|\,\bar{c}$.

Для любых двух векторов $|\,\Lambda\,\rangle$ и $|\,\Sigma\,\rangle$ определены две комплексных взаимно-сопряженных c-числовых величины $\langle\,\Lambda\,|\,\Sigma\,\rangle$ и $\langle\,\Sigma\,|\,\Lambda\,\rangle$. Предполагается, что в пространстве V можно выбрать базис $\{|\,\Lambda\,\rangle\}$ так, что

$$\langle\,\Lambda\,|\,\Sigma\,\rangle = \delta_{\Lambda\Sigma}. \tag{2.27}$$

Если индексы Λ, Σ пробегают непрерывное множество, то под $\delta_{\Lambda\Sigma}$ в (2.27) следует понимать δ-функцию. Пространство V является пространством физических состояний теории.

Пусть $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — некоммутативная инволютивная подалгебра с единицей. Элементы подалгебры $\mathscr{B}$ являются линейными операторами в пространствах V и V^+ и, как обычно,

$$(\,u\,|\,\Lambda\,\rangle\,)^+ = \langle\,\Lambda\,|\,u^+\,, \qquad u \in \mathscr{B}.$$

Наблюдаемым величинам соответствуют некоторые эрмитовы элементы из $\mathscr{B}$. Если $u \in \mathscr{A}$, $u \notin \mathscr{B}$, то действие элемента u на векторы пространств V и V^+, вообще говоря, не определено. В этом состоит отличие теории Дирака от обычной квантовой теории поля.

В рассматриваемых теориях обычно все векторы пространства V аннулируются рядом операторов подалгебры $\mathscr{B}$. Таким образом, имеют место условия

$$u_N \,|\,\rangle = 0\,, \qquad u_{N'}\,|\,\rangle = 0\,, \ldots, \qquad |\,\rangle \in V. \tag{2.28}$$

Индексы N, N', ... в (2.28) пробегают некое множество индексов J. Условия (2.28) должны быть алгебраически совместны, т. е. должны выполняться равенства

$$[\,u_N,\, u_{N'}\,] = \sum_{N''} \kappa_{NN',N''}\, u_{N''}\,,$$

где N, N', $N'' \in J$ и величины $k_{NN',N''}$ могут быть любыми элементами алгебры $\mathscr{A}$. Очевидно, среди операторов u_N в (2.28) нет единичного оператора или просто числа. Обозначим через $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}$ подалгебру без единицы с образующими $\{u_N\}$, где $N \in J$. Таким образом, $\mathscr{N}$ аннулирует пространство физических состояний V.

Рассмотрим множество элементов вида $u\,v$, где $u \in \mathscr{A}$ и $v \in \mathscr{N}$, которое обозначим $\mathscr{N}'$. Из определения видно, что $\mathscr{N}'$ является левым $\mathscr{A}$-модулем и подалгеброй в $\mathscr{A}$, но $\mathscr{N}'$ не является подалгеброй в $\mathscr{B}$. Тем не менее определено действие подалгебры $\mathscr{N}'$ на пространстве V, поскольку это действие тривиально: $\mathscr{N}'$ аннулирует пространство V. Заметим, что коммутант $[\,\mathscr{N}',\, \mathscr{N}'\,]$ содержится в $\mathscr{N}'$. Действительно, если r, $s \in \mathscr{A}$ и u, $v \in \mathscr{N}$, то

$$[\,ru,\, sv\,] = \{[\,ru,\, s\,]\,v + s\,[\,r,\, v\,]\,u + sr\,[\,u,\, v\,]\} \in \mathscr{N}',$$

так как $[\,u,\, v\,] \in \mathscr{N}$. Поэтому условия $\mathscr{N}'V = 0$ алгебраически совместны.

В конкретных теориях могут существовать и другие элементы алгебры $\mathscr{A}$, не содержащиеся ни в $\mathscr{B}$, ни в $\mathscr{N}'$ и являющиеся линейными операторами на пространстве V.

Отличительной особенностью теории Дирака является тот факт, что в этой теории не рассматриваются нефизические векторы состояний, которые не удовлетворяют условиям (2.28). Кроме того, в теории Дирака не возникает индефинитная метрика в пространстве состояний. Эти обстоятельства могут радикально изменить теорию.

Вернемся к обсуждению теории струны. В предлагаемой нами теории двумерной струны алгебра $\mathscr{A}$ имеет образующие $\{x_\pm,\, \alpha_m^{(\pm)}\}$, а подалгебры $\mathscr{B}$ и $\mathscr{N}$ имеют образующие $\{x_-,\, p_+,\, \alpha_m^{(-)}\}$ и $\{\alpha_m^{(-)}\}$, соответственно. Операторы Вирасоро L_n содержатся в подалгебре $\mathscr{N}'$. Заметим, что алгебра операторов L_n образует инволютивную подалгебру в $\mathscr{N}'$, и, так как $L_n^+ = L_{-n}$, действие операторов L_n определено в обоих пространствах V и V^+.

Из определений (2.15) получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\left(\exp\left(i\omega\, J^{01}\right)\right)\alpha_m^{(\pm)}\,\left(\exp\left(-i\omega\, J^{01}\right)\right) &= \left(\exp\left(\pm\omega\right)\right)\,\alpha_m^{(\pm)}\,,\\
\left(\exp\left(i\omega\, J^{01}\right)\right)x_\pm\left(\exp\left(-i\omega\, J^{01}\right)\right) &= \left(\exp\left(\pm\omega\right)\right)\,x_\pm
\end{aligned} \tag{2.29}$$

и

$$\begin{aligned}
\left(\exp\left(ia_\mu P^\mu\right)\right)x_\pm\left(\exp\left(-ia_\mu P^\mu\right)\right) &= x_\pm + \frac{\sqrt{\pi}}{l}\,a_\pm\,,\\
\left(\exp\left(ia_\mu P^\mu\right)\right)\alpha_m^{(\pm)}\left(\exp\left(-ia_\mu P^\mu\right)\right) &= \alpha_m^{(\pm)}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь ω и a^{μ} — произвольные вещественные числа. Из (2.29) и (2.30) видно, что преобразования Лоренца и трансляции сохраняют условия (2.23).

Обе наблюдаемые величины x_- и $p_+ = \alpha_0^{(+)}$ вещественны, и $[x_-, p_+] = -2i$. Поэтому предположим, что физические состояния являются собственными состояниями оператора p_+:

$$p_+ | k \rangle = 2k | k \rangle. \tag{2.31}$$

Здесь k — некий непрерывный вещественный параметр. Согласно (2.29)

$$p_+ \left(\exp\left(-i\omega J^{01}\right)\right) = (\exp \omega) \left(\exp\left(-i\omega J^{01}\right)\right) p_+. \tag{2.32}$$

Подействуем формально равенством (2.32) на состояние $| k \rangle$. Вследствие (2.31) получим

$$p_+ \left(\exp\left(-i\omega J^{01}\right)\right) | k \rangle = 2k\, e^{\omega} \left(\exp\left(-i\omega J^{01}\right)\right) | k \rangle. \tag{2.33}$$

Последнее равенство позволяет определить действие операторов $(\exp -i\omega J^{01})$ на физические состояния следующим образом:

$$\left(\exp\left(-i\omega J^{01}\right)\right) | k \rangle = f_{\omega} | (\exp \omega) k \rangle. \tag{2.34}$$

Здесь f_{ω} — комплексное число, не равное нулю. Если определить скалярное произведение на физических векторах состояний лоренц-инвариантным образом как

$$\langle k | k' \rangle = k\, \delta(k - k'),$$

то $| f_{\omega} | = 1$. Из (2.34) видно, что можно считать

$$k > 0. \tag{2.35}$$

Эрмитов оператор момента импульса представляется в виде

$$J^{01} = \frac{1}{2}(x_- p_+ - x_+ p_-) + \frac{i}{4} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^{(-)} \alpha_{-n}^{(+)} - \alpha_n^{(+)} \alpha_{-n}^{(-)}). \tag{2.36}$$

Мы видим, что хотя выражение (2.36) не принадлежит ни подалгебре $\mathscr{B}$, ни подалгебре $\mathscr{N}'$, тем не менее действие величины $(\exp i\omega J^{01})$ на пространстве физических состояний корректно определено.

Согласно (2.8) и (2.15)

$$P^{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{l} \alpha_0^{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \left\{ (\delta_0^{\mu} + \delta_1^{\mu}) p_+ + (\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) p_- \right\}.$$

Поэтому из (2.23) и (2.31) получаем

$$P^{\mu} | k \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{l} k^{\mu} | k \rangle, \qquad k^{\mu} = (k, k). \tag{2.37}$$

Таким образом, в результате описанной нами процедуры квантования двумерной струны возникает система, аналогичная квантовой киральной безмассовой частице в двумерном пространстве-времени.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратим внимание на отличие основных свойств теории струны, проквантованной традиционным образом, и теории струны, предложенной в настоящей работе. При традиционном квантовании существует состояние, которое инвариантно относительно преобразований Лоренца. Таким состоянием является основное состояние. В этом отношении традиционная теория струны аналогична обычной квантовой теории поля, описывающей точечные объекты. В таких полевых теориях обычно основное состояние лоренц-инвариантно. Напротив, при нашем подходе отсутствует состояние, инвариантное относительно преобразований Лоренца. Поэтому предлагаемая нами теория квантовой струны аналогична квантовой теории одной релятивистской частицы. Среди квантовых состояний одной релятивистской частицы также отсутствует лоренц-инвариантное состояние. Для того чтобы в нашей теории имелось лоренц-инвариантное состояние, нам потребовалось бы ввести струнное поле и провести вторичное квантование струнного поля. В такой теории основное состояние было бы лоренц-инвариантным, поскольку в основном состоянии отсутствовали бы реальные струны.

В заключение отметим, что предложенный здесь метод квантования может быть применен к D-мерной струне. Основанием для такого утверждения является существование в теории струны бесконечного набора так называемых DDF-операторов [4], которые коммутируют со всеми операторами Вирасоро. DDF-операторы описывают почти все (за исключением общего импульса струны) физические степени свободы струны. Независимость операторов Вирасоро от DDF-операторов означает, что операторы Вирасоро могут быть приведены к виду (2.21), после чего может быть применена предложенная нами схема квантования. Однако в D-мерном случае теория существенно сложнее вследствие наличия бесконечного набора физических степеней свободы, заключенных в DDF-операторах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №96-02-17331-а) и Высшей научной школы (грант №96-1596821).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Опишем квантование свободного электромагнитного поля, проведенное Дираком в [5] в соответствии с разработанной им идеологией, которая формулируется в разд. 2. Предложенное нами квантование двумерной струны проводится в соответствии с идеологией Дирака.

Квантованное электромагнитное поле представляется в виде

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} \left\{ a_\mu(\mathbf{k})\, e^{ikx} + a_\mu^+(\mathbf{k})\, e^{-ikx} \right\}. \qquad (\text{П}.1)$$

Здесь $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$, $kx \equiv k_\mu x^\mu = -k^0x^0 + \mathbf{kx}$, $k^0 = |\mathbf{k}|$ и $\{a_\mu(\mathbf{k}),\, a_\mu^+(\mathbf{k})\}$ являются образующими ассоциативной инволютивной алгебры $\mathscr{A}$ с единицей (см. разд. 2). Ненулевые перестановочные соотношения между этими образующими имеют вид

$$\left[a_\mu(\mathbf{k}),\, a_\mu^+(\mathbf{p})\right] = (2\pi)^3\, \eta_{\mu\nu}\, \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \qquad (\text{П}.2)$$

Из разложения (П.1) видно, что множество элементов $\partial_\mu A^\mu(x)$ линейно эквивалентно множеству элементов $k^\mu a_\mu(\mathbf{k})$, $k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})$ из алгебры $\mathscr{A}$. Обозначим через $a^T_i(\mathbf{k})$ два независимых элемента (для заданного $\mathbf{k}$), которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{3} k_i\, a^T_i(\mathbf{k}) = 0\,, \qquad \left[a^T_i(\mathbf{k}),\, a^{T+}_j(\mathbf{p})\right] = (2\pi)^3 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{П.3}$$

Из (П.1) и (П.2) вытекают следующие коммутационные соотношения ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - -\partial_\nu A_\mu$):

$$\left[F_{\mu\nu}(x),\, k^\lambda a_\lambda(\mathbf{k})\right] = \left[F_{\mu\nu}(x),\, k^\lambda a^+_\lambda(\mathbf{k})\right] = 0. \tag{П.4}$$

$$\left[k^\mu a_\mu(\mathbf{k}),\, p^\nu a^+_\nu(\mathbf{p})\right] = 0. \tag{П.5}$$

Очевидно, что

$$\left[a^T_i,\, k^\mu a_\mu(\mathbf{k})\right] = \left[a^T_i,\, k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\right] = 0. \tag{П.6}$$

Квантование согласно Дираку предполагает наложение на основное состояние условий

$$a^T_i(\mathbf{k})\,|\,0\,\rangle = 0 \tag{П.7}$$

и на все состояния условий

$$k^\mu a_\mu(\mathbf{k})\,|\;\rangle = 0\,, \qquad k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\,|\;\rangle = 0. \tag{П.8}$$

Вследствие (П.5) и (П.6) условия (П.7) и (П.8) алгебраически совместны. Состояния, удовлетворяющие условиям (П.8), называются физическими. Фоковское пространство всех физических состояний строится при помощи операторов рождения $a^{T+}_i(\mathbf{k})$ из основного состояния, удовлетворяющего условиям (П.7) и (П.8). Вследствие (П.6) любое состояние построенного фоковского пространства удовлетворяет условиям (П.8). В соответствии с терминологией, введенной в разд. 2, это фоковское пространство обозначается символом V, множество элементов $\{\, a^T_i,\, a^{T+}_i,\, k^\mu a_\mu(\mathbf{k}),\, k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\,\}$ является системой образующих подалгебры $\mathscr{B}$ и множество элементов $\{\, k^\mu a_\mu(\mathbf{k}),\, k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\,\}$ есть система образующих подалгебры $\mathscr{N}$.

Пусть $k^\mu_- = (-k^0,\, \mathbf{k}\,)$. Из (П.2) находим

$$\left[k^\mu_- a_\mu(\mathbf{k}),\, p^\nu a^+_\nu(\mathbf{p})\right] = 2\,\mathbf{k}^2\,(2\pi)^2\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{П.9}$$

Соотношения (П.4) и (П.9) означают, что наблюдаемые величины $F_{\mu\nu}$ не зависят от образующих $\{\, k^\mu_- a_\mu(\mathbf{k}),\, k^\mu_- a^+_\mu(\mathbf{k})\,\}$, а являются линейными комбинациями образующих подалгебры $\mathscr{B}$. Поэтому определены все матричные элементы вида $\langle\,\Lambda\,|\,F_{\mu\nu}\,|\,\Sigma\,\rangle$, где $|\,\Lambda\,\rangle,\ |\,\Sigma\,\rangle \in V$.

Заметим, что вследствие (П.3) и (П.7) скалярное произведение в пространстве V положительно определено при условии $\langle\,0\,|\,0\,\rangle = 1$. Обратим внимание на тот факт, что действие образующих $k^\mu_- a_\mu(\mathbf{k})$ и $k^\mu_- a^+_\mu(\mathbf{k})$ на физические состояния при квантовании Дирака не определено; таким образом, эти образующие алгебры $\mathscr{A}$ не являются линейными операторами в пространстве физических состояний V.

В заключение отметим аналогию между образующими $\{\, k^\mu_- a_\mu(\mathbf{k}),\, k^\mu_- a^+_\mu(\mathbf{k})\,\}$ и $\{\, k^\mu a_\mu(\mathbf{k}),\, k^\mu a^+_\mu(\mathbf{k})\,\}$ в квантовой электродинамике и образующими $\{\, \alpha^{(+)}_n\,\}$ и $\{\, \alpha^{(-)}_n\,\}$ в теории струны соответственно.

Литература

1. R. Jackiw, E-print archive, gr-qc/9612052.
2. D. Gangemi and R. Jackiw, Phys. Lett. B **337**, 271 (1994); Phys. Rev. D **50**, 3913 (1994); D. Amati, S. Elitzur, and E. Rabinovici, Nucl. Phys. B **418**, 45 (1994); D. Louis-Martinez, J. Gegenberg, and G. Kunstatter, Phys. Lett. B **321**, 193 (1994); E. Benedict, Phys. Lett. B **340**, 43 (1994); T. Strobl, Phys. Rev. D **50**, 7346 (1994).
3. C. Callan, S. Giddings, J. Harvey, and A. Strominger, Phys. Rev. D **45**, 1005 (1992).
4. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, Мир, Москва (1990).
5. П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой теории поля*, Мир, Москва (1971).
6. С. Ленг, *Алгебра*, Мир, Москва (1968).
7. Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Мир, Москва (1972).