

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ И КВАЗИСОЛИТОНЫ

В. Е. Захаров*, Е. А. Кузнецов†

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 ноября 1997 г.

Оптические солитоны и квазисолитоны исследуются относительно черенковского излучения. Показано, что как солитоны, так и квазисолитоны могут существовать, если линейный оператор, определяющий их асимптотики на бесконечности, знакоопределен. В частности, применение этого критерия к стационарным оптическим солитонам задает несущую частоту солитона, при которой первая производная от диэлектрической проницаемости по частоте обращается в нуль. В этой точке фазовая и групповая скорости совпадают. Солитоны и квазисолитоны отсутствуют, если учесть дисперсию третьего порядка. С помощью знакоопределенности оператора и с использованием интегральных оценок соболевского типа доказана устойчивость солитона для дисперсии четвертого порядка. Это доказательство основано на ограниченности гамильтониана при фиксированном значении энергии импульса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоны в нелинейных оптических волокнах являются весьма популярными объектами исследования с начала семидесятых — с того времени, когда была продемонстрирована структурная устойчивость солитонов для уравнения КДВ [1] и нелинейного уравнения Шредингера [2] и когда немного позднее Хасегава и Таппет [3] предложили использовать оптические солитоны в качестве бита информации в волоконных коммуникациях. Интерес к оптическим солитонам значительно возрос в последнее десятилетие, что было стимулировано практическими достижениями использования солитонов в современных оптических коммуникационных системах [4, 5]. Но несмотря на большую практическую значимость оптических солитонов, их теория далека от завершения.

Когда говорят об оптических солитонах, предполагают, что их спектр сосредоточен внутри некоторого окна прозрачности, где линейное затухание мало, а дисперсионные эффекты доминируют. Обычно ширина спектра солитона $\delta\omega$ предполагается достаточно малой по сравнению с частотной полосой $\Delta\omega$ этого окна, $\delta\omega \ll \Delta\omega$. В реальных системах, однако, полоса $\Delta\omega$ всегда уже средней частоты окна $\bar{\omega}$, $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$. Таким образом, мы имеем следующую иерархию обратных характерных времен:

$$\delta\omega \ll \Delta\omega \ll \bar{\omega}. \quad (1.1)$$

Каждый из этих критериев позволяют рассматривать медленную ($\tau^{-1} \sim \delta\omega$) динамику солитонного распространения в терминах амплитудных огибающих. В частности, чтобы вывести нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) — основную модель для описания

*E-mail: zakharov@itp.ac.ru

†E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

оптических солитонов огибающих, — волновое число аппроксимируется квадратичным полиномом

$$\delta k = \frac{1}{v_{gr}} \delta \omega - \frac{1}{2} \frac{\omega''}{v_{gr}^3} (\delta \omega)^2. \quad (1.2)$$

Здесь $\delta k = k - k_0$ и $\delta \omega = \omega - \omega_0$, $v_{gr} = \partial \omega / \partial k$ — групповая скорость, k_0 и ω_0 — волновое число и частота несущей волны солитона. Однако на частотном интервале $\Delta \omega$ дисперсия волны может существенно отличаться от квадратичного приближения (1.2), оставаясь еще малым в смысле критерия (1.1). Следует отметить, что существующие экспериментальные возможности (см., например, [6]) позволяют получать очень короткие импульсы, для которых $\delta \omega / \omega_0 < 1$. С другой стороны, эффективность оптических волокон как среды для передачи информации обратно пропорциональна длительности солитонов. Таким образом, требования практики диктуют уменьшение, насколько это возможно, длительности солитонов.

В этой статье мы покажем, что свойства «коротких» и «длинных» солитонов могут быть сильно различны. Для коротких солитонов разложение (1.2) больше несправедливо и должно быть заменено более общей формулой

$$\delta k - \frac{1}{v_{gr}} \delta \omega = -F(\delta \omega). \quad (1.3)$$

Здесь $F(\zeta)$ — некоторая функция, которая должна быть взята из микроскопического рассмотрения, либо извлечена из экспериментальных данных. Несмотря на то что функция $F(\zeta)$ может быть далека от параболической зависимости (1.2), усреднение по быстрому времени $1/\omega_0$, может быть тем не менее выполнено, что дает описание медленной солитонной динамики посредством обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (ОНУШ). Это усреднение также приводит к появлению дополнительного интеграла движения — адиабатического инварианта, имеющего смысл энергии импульса. Соответственно, благодаря этому инварианту, ОНУШ допускает солитонное решение для огибающей электромагнитного поля $E(x, t)$ в форме распространяющегося импульса с дополнительным фазовым множителем $e^{i\lambda x}$:

$$E(x, t - x/v_{gr}) = e^{i\lambda x} \psi(t - x/v_{gr} + \beta x), \quad v_{gr}^{-1} \gg \beta.$$

Основной результат этой статьи следующий. Солитоны могут существовать, если функция $L(\zeta) = \lambda - \beta \zeta + F(\zeta)$ положительно (либо отрицательно) определена для всех ζ . Этот критерий есть основное правило отбора для солитонов. Если этот критерий не удовлетворяется, то солитон теряет свою энергию благодаря черенковскому излучению и через некоторое время перестает существовать. Это имеет место, например, если $F(\zeta)$ — полином третьей степени.

Даже если $L(\zeta)$ положительно определена и солитон существует, вопрос о его устойчивости далеко не тривиален. В данной статье мы установим, что солитон устойчив, если $L(\zeta)$ — положительно определенный полином четвертого порядка. Доказательство устойчивости основано на ограниченности гамильтониана при фиксированном адиабатическом инварианте. Мы полагаем, что это же заключение об устойчивости будет правильным для любого положительно определенного полинома $L(\zeta) > 0$ четной степени. Но если

$$|F(\zeta)| < C|\zeta|^\alpha \text{ при } |\zeta| \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

и $\alpha \leq 1/2$, устойчивость солитона сомнительна; более вероятно, что он неустойчив.

Есть еще один важный момент, на который нам хотелось бы обратить внимание в этой статье. Объекты, традиционно называемые солитонами в нелинейной оптике, в строгом смысле этого слова не являются таковыми. Это — квазисолитоны — приближенные решения уравнений Максвелла, зависящие от четырех параметров. Реальные стационарные солитоны, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения своей формы, являются точными решениями уравнений Максвелла, зависящими от двух параметров. Последние существуют, если диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ имеет максимум в рассматриваемом частотном диапазоне для фокусирующей нелинейности или минимум, если среда дефокусирующая. В чисто консервативной среде квазисолитоны существуют конечное время благодаря излучению за счет многофотонных процессов. В действительности, однако, это время оказывается много больше времени жизни за счет линейного затухания и различие между солитонами и квазисолитонами несущественно.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОНЫ

В этом разделе мы продемонстрируем, как можно найти солитонное решение прямо из уравнений Максвелла. Мы рассмотрим простейшую модель одномерного распространения импульсов, предполагая поляризацию линейной, а электрическое поле $E(x, t)$ перпендикулярным направлению распространения. В этом случае уравнения Максвелла могут быть сведены к волновому уравнению для поля $E(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

где электрическая индукция D предполагается связанной с электрическим полем соотношением

$$D(x, t) = \hat{\varepsilon}(t)E(x, t) + \chi E^3(x, t). \quad (2.2)$$

В этом выражении $\hat{\varepsilon}$ — интегральный оператор; фурье-образ его ядра есть $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость. Второе слагаемое в (2.2) соответствует эффекту Керра, χ — константа Керра.

Функция $\varepsilon(\omega)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость ω (см., например, [7]). Для действительных значений ω величина $\varepsilon(\omega)$ подчиняется соотношениям Крамерса–Кронига. В частности, из этих соотношений следует, что на действительной оси мнимая часть диэлектрической проницаемости ε'' , ответственная за диссипацию электромагнитных волн, не может быть равна нулю при всех частотах. В дальнейшем мы будем предполагать существование некоторой частотной полосы $\Delta\omega$, внутри которой мнимая часть проницаемости достаточно мала, так что ею можно пренебречь.

Рассмотрим распространение волнового пакета со спектром, лежащим внутри этого окна прозрачности, предполагая частотную ширину спектра импульса малым по сравнению с $\Delta\omega$. Только при таких условиях можно ожидать решения в виде уединенного импульса — солитона.

Как отмечалось во Введении, возможны два типа солитонов. Первый тип солитонов — стационарные солитоны. Они распространяются с постоянной скоростью без

изменения своей формы. Классический пример солитонов такого типа — солитоны уравнения КДВ, которые, в частности, описывают уединенные волны на мелкой воде. Другой тип солитонов — квазисолитоны. Они обладают некоторой внутренней динамикой и только в среднем распространяются с постоянной скоростью. Классические квазисолитоны — бризеры, описываемые уравнением синус-Гордон (для справок см., например, [8–10]).

Стационарные солитоны являются точными решениями уравнения (2.1). Будем искать эти решения в виде

$$E = E(x - vt), \quad (2.3)$$

где v — постоянная скорость и E стремится к нулю на бесконечности. Подстановка (2.3) в (2.1) дает возможность дважды проинтегрировать уравнение:

$$\hat{L}E(x) = \alpha E^3(x), \quad \alpha = \chi v^2/c^2, \quad (2.4)$$

где оператор \hat{L} равен

$$\hat{L} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \hat{\epsilon}. \quad (2.5)$$

В фурье-представлении \hat{L} записывается в виде

$$L(\omega) = 1 - \frac{v^2 \epsilon(\omega)}{c^2}, \quad (2.6)$$

где частота ω и волновое число k связаны соотношением $\omega = kv$. Второй член в (2.6) есть квадрат отношения v и фазовой скорости электромагнитной волны малой амплитуды:

$$v_{ph} = c/\sqrt{\epsilon(\omega)}. \quad (2.7)$$

Отсюда легко видно, что оператор \hat{L} становится положительно определенным тогда и только тогда, когда для всех ω

$$v_{ph}^2(\omega) > v^2, \quad (2.8)$$

и, соответственно, отрицательно определенным в противоположном случае:

$$v_{ph}^2(\omega) < v^2. \quad (2.9)$$

Покажем теперь, что солитонное решение возможно только при выполнении условий (2.8) и (2.9). Предположим противное — пусть условия (2.8) и (2.9) не выполнены, т. е. уравнение

$$\frac{v^2 \epsilon(\omega)}{c^2} = 1 \quad (2.10)$$

имеет решение (для простоты предположим, что оно единственно: $\omega = \omega_0$). Тогда уравнение (2.3) может быть переписано следующим образом:

$$E(x - vt) = E_0(x - vt) + \hat{L}^{-1}(1 - \hat{P})\alpha E^3(x - vt). \quad (2.11)$$

Здесь

$$E_0(x - vt) = \text{Re} (A \exp [-i\omega_0(t - x/v)])$$

— решение однородного линейного уравнения

$$\hat{L}E_0 = 0, \quad (2.12)$$

а \hat{P} — проектор на состояние $E_0(x - vt)$, так что $(1 - \hat{P})\chi E^3(x - vt)$ ортогонально E_0 , и поэтому на этом классе функций оператор \hat{L} обратим. Чтобы найти явное решение уравнения (2.11), можно применить, например, итерационную схему, взяв E_0 в качестве нулевого приближения. Принципиально важно, что, действуя таким образом, мы с необходимостью приходим к нелокализованным решениям, зависящим от двух параметров — мнимой и действительной частей комплексной амплитуды A . Отсюда можно сделать следующее заключение: стационарное уравнение (2.3) может иметь солитонное решение, если оператор \hat{L} знакоопределен. Если уравнение (2.12) имеет нетривиальное решение, что эквивалентно равенству фазовой скорости v_{ph} и скорости v ,

$$v_{ph} = v, \quad (2.13)$$

то стационарное солитонное решение отсутствует. Отметим, что этот вывод существенным образом опирается на то, что особенность в правой части уравнения (2.11) $(E^3)_\omega/L(\omega)$ неустранима. Как будет показано ниже, особенности такого типа могут быть устранены, если матричный элемент четырехволнового взаимодействия (в данном случае χ) имеет зависимость от частот.

Уравнение (2.13) также может быть рассмотрено как условие черенковского излучения движущимся объектом. При этом не важна природа самого объекта. Это может быть заряженная частица, морской корабль или, например, солитон. В любом случае благодаря черенковскому излучению движущийся объект будет терять свою энергию. В данном случае это означает, что если скорость электромагнитного солитона удовлетворяет условиям (2.9), то он будет с необходимостью излучать волны, и, следовательно, такой импульс не может существовать как стационарный объект. Итак, мы приходим к следующему условию существования солитонов: солитонное решение может существовать, когда уравнение

$$\omega(k) = kv \quad (2.14)$$

не имеет (действительного) решения. Здесь $\omega = \omega(k)$ — закон дисперсии. Для электромагнитных волн $\omega(k)$ определяется из уравнения

$$\omega^2 = k^2 c^2 / \varepsilon(\omega). \quad (2.15)$$

Соотношение (2.14) на плоскости $\omega - k$ имеет простую интерпретацию. Правая часть (2.14) соответствует прямой линии, выходящей из начала координат, соответственно скорость v на этой плоскости равна тангенсу угла наклона ϕ :

$$v = \text{tg}\phi.$$

Существование решения уравнения (2.14) означает пересечение кривой $\omega = \omega(k)$ прямыми линиями, что задает целый конус углов Ω , где стационарные солитонные решения

невозможны. Возможным солитонным решениям соответствует конус $\tilde{\Omega}$ дополнительный к Ω . На границе конусов $\partial\Omega$ прямые линии касательны к дисперсионной кривой $\omega = \omega(k)$, при этом в точках касания k_i групповая и фазовая скорости совпадают:

$$\left. \frac{\omega(k)}{k} \right|_{k_i} = \left. \frac{\partial\omega(k)}{\partial k} \right|_{k_i}. \quad (2.16)$$

Для закона дисперсии (2.15) это соотношение читается как

$$\left. \frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_i} = 0. \quad (2.17)$$

Естественно предположить, что амплитуда солитонов в этих критических точках обращается в нуль (поскольку вне конуса $\tilde{\Omega}$ стационарные солитонные решения должны отсутствовать). Как будет показано ниже, поведение солитонного решения вблизи этих критических точек универсально. Мы продемонстрируем этот факт на примере стационарного уравнения (2.3). Принципиально важно, однако, что ответ оказывается общим и может быть использован для других моделей. Впервые этот факт был исследован для капиллярно-гравитационных солитонов на глубокой воде [11–13]. Спектр капиллярно-гравитационных волн, как известно, имеет минимальную фазовую скорость для волновых чисел, лежащих в промежуточной области между гравитационным и капиллярным участками спектра.

Предположим для простоты, что уравнение (2.17) имеет только одно положительное решение $\omega = \omega_0$ (в силу четности $\varepsilon(\omega)$ есть еще один корень $\omega = -\omega_0$), а конус углов $\tilde{\Omega}$ пусть лежит ниже критической скорости:

$$v < v_{cr} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega_0)}}.$$

Таким образом, функция $\varepsilon(\omega)$ имеет два одинаковых максимума в симметричных точках; при этом

$$\frac{d^2\varepsilon(\pm\omega_0)}{d\omega^2} < 0.$$

В этом случае оператор \hat{L} обратим и уравнение (2.4) может быть записано в виде

$$E_\omega = \frac{1}{L(\omega)} \alpha(E^3)_\omega. \quad (2.18)$$

Около критической скорости, $v_{cr} - v \ll v_{cr}$, $L(\omega)$ как функция ω в силу своей симметрии относительно ω близка к нулю в малых окрестностях двух точек $\omega = \pm\omega_0$. Поэтому согласно (2.18) распределение $E(\omega)$ в значительной степени определяется функцией $1/L(\omega)$. Соответственно, в t -представлении решение будет близко к монохроматической волне. Важно, что монохроматичность волны улучшается по мере приближения v к v_{cr} . Поэтому $E(t')$ ($t' = t - x/v$) будем искать в виде разложения по гармоникам $n\omega_0$:

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[E_{2n+1}(\tau) e^{-i(2n+1)\omega_0 t'} + \text{с.с.} \right]. \quad (2.19)$$

Здесь мы формально ввели малый параметр

$$\epsilon = \sqrt{1 - v/v_{cr}} \tag{2.20}$$

и медленное время $\tau = \epsilon t'$, так что $E_{2n+1}(\tau)$ есть амплитуды огибающих каждой гармоники. Представление (2.19) означает, что ширина по частотам каждой гармоники, $\delta\omega \sim \epsilon$, мала по сравнению с частотой ω_0 , т. е. фурье-спектр (2.19) представляет собой ряд узких пиков. Два главных пика соответствуют первой гармонике. Поэтому действие оператора \hat{L} на (2.19) может быть разложено в ряд по степеням ϵ . Предполагая $E_{2n+1} \sim \epsilon^{2n+1}$ и подставляя (2.19) в стационарное уравнение (2.4), с учетом (2.17) в главном порядке приходим к стационарному нелинейному уравнению Шредингера:

$$\epsilon^2 E_1 - S \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \frac{3}{2} \alpha |E_1|^2 E_1 = 0, \tag{2.21}$$

где

$$S = -\frac{v^2}{4c^2} \frac{d^2 \epsilon(\omega_0)}{d\omega^2} > 0. \tag{2.22}$$

Уравнение (2.21) имеет солитонное решение, только если $\alpha > 0$:

$$E_1(t') = \frac{2\epsilon}{\sqrt{3\alpha}} \operatorname{sech} \left[\frac{\epsilon(t - x/v - t_0)}{\sqrt{S}} \right]. \tag{2.23}$$

Это решение с точностью до постоянного фазового множителя — единственное. Оно представляет собой универсальную асимптотику солитонного решения: его амплитуда при приближении v к v_{cr} обращается в нуль корневым образом $\sim \sqrt{v_{cr} - v}$, а длительность солитонного импульса Δt растет обратно пропорционально этому фактору:

$$\Delta t = \sqrt{S}/\epsilon.$$

Для времен больших Δt необходимо учитывать следующие члены разложения, в частности дисперсию третьего порядка и поправки к кубической нелинейности. В этой временной области уже солитонное поведение становится неуниверсальным.

Важно отметить, что при $\epsilon^2 = 1 - v/v_{cr} < 0$ уравнение (2.21) не имеет решений солитонного типа.

В том случае, когда касание дисперсионной кривой происходит сверху, параметр S становится отрицательным. По этой причине солитоны существуют лишь для дефокусирующих сред ($\alpha < 0$).

Специального рассмотрения требует случай, когда точка касания $\omega_0 = 0$. Вблизи критической скорости стационарное уравнение (2.3) не требует разложения (2.19). Достаточно разложить $\epsilon(\omega)$ вблизи $\omega = 0$:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \epsilon(0)}{d\omega^2} \omega^2.$$

В соответствии с этим разложением стационарное уравнение приобретает форму

$$\epsilon^2 E - S \partial_t^2 E - \frac{1}{2} \alpha E^3 = 0, \tag{2.24}$$

где, как и раньше, ϵ , S и α даются соответственно формулами (2.20), (2.22) и (2.4), взятыми при $\omega = 0$. Локализованное решение уравнения (2.24) имеет вид солитона для уравнения МКДВ:

$$E(t - x/v) = \frac{2\epsilon}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sech} \left[\frac{\epsilon(t - x/v - t_0)}{\sqrt{S}} \right].$$

3. КВАЗИСОЛИТОНЫ. ДИСПЕРСИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В этом разделе на примере обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (ОНУШ) мы обсудим, какова разница между солитонами и квазисолитонами. ОНУШ имеет более широкий класс солитонных решений, чем первоначальные уравнения Максвелла. В отличие от стационарных солитонов (2.23) эти решения приближенные, зависящие от четырех параметров. Однако механизм отбора солитонных решений остается прежним, что и для стационарных солитонов, рассмотренных в предыдущем разделе.

Пусть окно прозрачности $\Delta\omega$ мало по сравнению со средним значением частоты ω_0 : $\omega_0 \gg \Delta\omega$. В этом случае можно ввести огибающую для всей этой области. Для того чтобы получить уравнение для огибающих, наиболее удобным и последовательным является подход, основанный на гамильтоновском формализме [14].

Рассмотрим уравнение (2.1), которое представим в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \left(\hat{\epsilon} \rho + \frac{4\pi\chi}{c^2} \rho^3 \right) = 0. \quad (3.1)$$

Введенные здесь потенциал ϕ и «плотность» ρ связаны с электрическим E и магнитным H полями соотношениями

$$E = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \rho, \quad H = \sqrt{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) могут быть записаны в гамильтоновской форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho}, \quad (3.3)$$

где x играет роль времени, а гамильтониан представляет собой интеграл по времени:

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2c^2} \rho \hat{\epsilon} \rho + \frac{\pi\chi}{c^4} \rho^4 \right] dt \equiv \frac{1}{8\pi} \int \left[H^2 + E \hat{\epsilon} E + \frac{1}{2} \chi E^4 \right] dt. \quad (3.4)$$

Квадратичная часть \mathcal{H} определяет линейный закон дисперсии $k = k(\omega)$, совпадающий с (2.15). Переход к нормальным переменным $a_\omega(x)$ осуществляется с помощью замены

$$\rho_\omega = \sqrt{\frac{\omega^2}{2k(\omega)}} (a_\omega^* + a_{-\omega}), \quad \phi_\omega = -i \sqrt{\frac{k(\omega)}{2\omega^2}} (a_\omega^* - a_{-\omega}), \quad (3.5)$$

где ρ_ω и ϕ_ω — фурье-образы «плотности» ρ и потенциала ϕ , $k(\omega)$ в этих формулах понимается как положительный корень дисперсионного соотношения (2.15). Подстановка этих соотношений в уравнения (3.3) дает уравнения движения в переменных a_ω :

$$\frac{\partial a_\omega}{\partial x} = i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_\omega^*}, \tag{3.6}$$

где гамильтониан \mathcal{H} принимает стандартный вид (ср. с [14]):

$$\mathcal{H} = \int k(\omega) |a_\omega|^2 d\omega + \frac{1}{2} \int T_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} a_{\omega_1}^* a_{\omega_2}^* a_{\omega_3} a_{\omega_4} \delta_{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4} \prod_i d\omega_i. \tag{3.7}$$

Входящий сюда матричный элемент T задается формулой

$$T_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} = \frac{3\chi}{4\pi c^4} \left[\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2}{k(\omega_1)k(\omega_2)k(\omega_3)k(\omega_4)} \right]^{1/2}. \tag{3.8}$$

Если восприимчивость четвертого порядка χ зависит от частот, то в матричном элементе (3.8) константа χ заменяется на $\chi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ с необходимыми свойствами симметрии (см. [7, 15]), обеспечивающими для T следующие соотношения симметрии:

$$T_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} = T_{\omega_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4} = T_{\omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_3} = T_{\omega_3 \omega_4 \omega_1 \omega_2}^*. \tag{3.9}$$

В гамильтониане (3.7) мы удержали только члены, ответственные за рассеяние волн, пренебрегая всеми другими процессами, которые для узких волновых пакетов дают вклад в следующем (шестом) порядке по амплитуде волн.

Гамильтоновская формулировка уравнений движения (3.6) гарантирует «сохранение» (независимость от x) гамильтониана \mathcal{H} , а также «импульса»

$$P = \int \omega |a_\omega|^2 d\omega, \tag{3.10}$$

который в точности совпадает с проинтегрированным по времени вектором Пойнтинга:

$$P = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E H dt.$$

Перейдем теперь к выводу уравнения для огибающих, вводя амплитуду огибающей пакета:

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a_\omega e^{-i(\omega - \omega_0)t - ik_0(\omega_0)x} d\omega.$$

Здесь мы предполагаем, что спектр a_ω сосредоточен в узком интервале $\delta\omega$ вблизи частоты ω_0 , $\omega_0 \gg \delta\omega$. Соответственно, $\psi(t, x)$ — медленная функция координат и времени.

Разлагая далее $k(\omega)$ и $T_{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}$ в ряд по $\Omega = \omega - \omega_0$ в точке ω_0 , имеем

$$\kappa(\Omega) = k(\omega) - k(\omega_0) = \frac{1}{v_{gr}} \Omega - k_0 S \Omega^2 - \gamma \Omega^3 + \delta \Omega^4 + \dots, \tag{3.11}$$

$$T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} = T_0 + \frac{\partial T}{\partial \omega_1}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1^2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) + \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}(\Omega_1 \Omega_2 + \Omega_3 \Omega_4) + \frac{\partial T}{\partial \omega_1 \partial \omega_3}(\Omega_1 \Omega_3 + \Omega_1 \Omega_4 + \Omega_2 \Omega_3 + \Omega_2 \Omega_4) + \dots \quad (3.12)$$

В выражении для $k(\omega)$ мы удержали члены вплоть до четвертого порядка по Ω , а в матричном элементе T — члены квадратичные по Ω . При разложении матричного элемента мы считали его для простоты действительным, а также воспользовались его свойствами симметрии (3.9). В соответствии с этим коэффициенты в (3.12) равны:

$$T_0 = T_{\omega_0\omega_0\omega_0\omega_0}, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \left. \frac{\partial T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_k=\omega_0},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \left. \frac{\partial^2 T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right|_{\omega_k=\omega_0}.$$

Совершая далее обратное фурье-преобразование по Ω , для ψ получаем обобщенное нелинейное уравнение Шредингера

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + K_0 S \psi_{tt} + \beta_1 |\psi|^2 \psi = -i\gamma \psi_{ttt} - 4i\beta_2 |\psi|^2 \psi_t - \delta \psi_{tttt} + (\beta_3 - \beta_4) [(\psi^2 \psi_t^*)_t - (\psi_t)^2 \psi^*] + (\beta_3 + \beta_5) \psi^* (\psi^2)_{tt} - \beta_6 |\psi|^4 \psi. \quad (3.13)$$

Классическому нелинейному уравнению Шредингера соответствует левая часть этого уравнения: второе слагаемое в ней описывает распространение волнового пакета как целого и поэтому может быть исключено переходом в сопутствующую систему координат. Следующий член ($\sim S$) ответствен за квадратичную дисперсию. При этом для $d\varepsilon(\omega_0)/d\omega_0 = 0$ коэффициент S совпадает с выражением (2.22). Последнее слагаемое в левой части определяет нелинейную поправку к частоте монохроматической волны. Первые два слагаемых в правой части $\sim (\delta\omega/\omega_0)^3$. Важно, что таких членов только два. При этом коэффициент $\beta_2 = 2\pi\partial T/\partial\omega$ отличен от нуля даже для постоянной восприимчивости четвертого порядка χ . При $\chi = \text{const}$ коэффициент β_2 может обратиться в нуль, только если $k \sim \omega^2$. Остальные члены $\sim (\delta\omega/\omega)^4$. Среди них мы учли слагаемое $\sim |\psi|^4 \psi$, имеющее тот же порядок величины.

Входящие в уравнение (3.13) коэффициенты β_i приобретают наиболее простой вид для матричного элемента (3.8):

$$\beta_1 = \frac{3}{2} k_0^2 \chi \left(\frac{v_{ph}}{c} \right)^4, \quad \beta_2 = \frac{\beta_1}{\omega_0} \left(1 - \frac{v_{ph}}{2v_{gr}} \right),$$

$$\beta_3 = \beta_1 \frac{k^{1/2}}{\omega_0} \frac{\partial^2}{\partial \omega_0^2} \left(\frac{\omega_0}{k^{1/2}} \right), \quad \beta_4 = \beta_5 = \frac{\beta_1}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{v_{ph}}{2v_{gr}} \right)^2. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.13) по своему выводу принадлежит к гамильтоновским:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi^*}. \quad (3.15)$$

Здесь гамильтониан \mathcal{H} представим в виде суммы гамильтонианов:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots,$$

где

$$\mathcal{H}_1 = \frac{i}{v_{gr}} \int \psi^* \psi_t dt, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{H}_2 = - \int \left(k_0 S |\psi_t|^2 - \frac{\beta_1}{2} |\psi|^4 \right) dt, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{H}_3 = \int \left\{ i \gamma \psi^* \psi_{ttt} + i \beta_2 (\psi^* \psi_t - \psi \psi_t^*) |\psi|^2 \right\} dt, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{H}_4 = \int \left\{ \delta |\psi_{tt}|^2 - \frac{\beta_3}{2} |\psi|^2 (\psi \psi_{tt}^* + c.c.) - \frac{\beta_4}{2} (\psi_t^2 \psi^{*2} + c.c.) - \frac{\beta_5}{2} \psi^{*2} \partial_t^2 \psi^2 + \frac{\beta_6}{3} |\psi|^6 \right\} dt. \tag{3.19}$$

Классическому НУШ соответствует \mathcal{H}_2 , следующий — комплексному уравнению МКДВ. Важно, что каждый из последующих гамильтонианов мал по отношению к предыдущему. Однако это положение может измениться, если какие-либо коэффициенты разложения имеют дополнительную малость. Как видно из (2.23), ширина солитона уменьшается с уменьшением коэффициента квадратичной дисперсии S . Поэтому при малых S (а такая ситуация имеет место вблизи так называемой точки нулевой дисперсии) необходимо учитывать кубическую дисперсию ($\sim \gamma$), пренебрегая всеми старшими членами, а также членом, пропорциональным β_2 . Если же коэффициент β_1 мал, то необходимо учитывать нелинейную дисперсию, пропорциональную β_2 , пренебрегая при этом кубической линейной дисперсией.

Обратимся теперь к анализу решений солитонного типа для обобщенного уравнения Шредингера.

Для того чтобы проиллюстрировать, как работает механизм (2.23), вначале рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера с квадратичной дисперсией (соответствующее гамильтониану (3.17)):

$$i \frac{\partial E}{\partial x} + E_{tt} + 2|E|^2 E = 0. \tag{3.20}$$

Здесь использованы безразмерные переменные, а нелинейность предполагается фокусирующей: $S\alpha > 0$.

Следует отметить, что в отличие от волнового уравнения (2.1), обобщенное НУШ, а в частности НУШ с квадратичной дисперсией, имеет дополнительную симметрию: $E \rightarrow E e^{i\phi}$, которая возникает как результат усреднения уравнений по быстрым осцилляциям. Поэтому солитонные решения огибающих образуют более широкий класс решений, нежели волновое уравнение (2.1). В соответствии с нашим определением их следует отнести к квазисолитонам. Чтобы найти соответствующие решения, следует положить $E(x, t) = e^{i\lambda x} \psi(t + \beta x)$, где ψ подчиняется уравнению¹⁾

¹⁾ Введенный здесь параметр β , имеющий смысл величины, обратной скорости, в размерных переменных равен разности скорости солитона и групповой скорости, деленной на v_{gr}^2 . При этом β предполагается малым по сравнению с $1/v_{gr}$.

$$L(i\partial_t)\psi \equiv -i\beta\psi_t + \lambda\psi - \psi_{tt} = 2|\psi|^2\psi. \quad (3.21)$$

Для данного случая условия черенковского излучения (2.14) записываются следующим образом:

$$\beta\Omega = k(\Omega) \text{ или } L(\Omega) = 0, \quad (3.22)$$

где дисперсионное соотношение для уравнения (3.21) приобретает вид

$$k(\Omega) = \lambda + \Omega^2. \quad (3.23)$$

Отсюда видно, что для $\lambda < 0$ резонансное условие (3.22) удовлетворяется для любого значения скорости (рис. 1) и поэтому солитоны в этом случае отсутствуют. Это проверяется и непосредственно решением уравнения (3.21): при $\lambda < 0$ все решения оказываются периодическими или квазипериодическими. Солитонные решения возможны только для положительных λ . Их скорости лежат в интервале $-2\sqrt{\lambda} \leq \beta \leq 2\sqrt{\lambda}$ (рис. 2). В точках $\Omega = \pm\sqrt{\lambda}$ дисперсионная кривая $k = k(\Omega)$ касается прямой $k = \beta_{cr}\Omega$. В этих точках в соответствии с результатами разд. 2 солитонное решение должно исчезать, что прямо следует из решения уравнения (3.21):

$$E = e^{i\lambda x} \frac{e^{i\beta t' \Delta\Omega}}{\text{ch}(\Delta\Omega t')}, \quad \Delta\Omega = \sqrt{\lambda - \frac{\beta^2}{4}}. \quad (3.24)$$

Отсюда область существования солитонов дается неравенством $\lambda > \beta^2/4$. Верхняя граница в этом неравенстве определяет критическую скорость

$$\beta_{cr} = \pm 2\sqrt{\lambda}.$$

Важно отметить, что при $\lambda > \beta^2/4$ оператор L в уравнении (3.21) положительно определен.

Теперь обратимся к дисперсии третьего порядка. Предположим как и ранее, что солитонное решение содержит экспоненциальный множитель

$$E(x, t) = e^{i\lambda x} \psi(t'), \quad t' = t + \beta x. \quad (3.25)$$

Соответствующий оператор $L(i\partial_t)$ имеет вид

$$L(\Omega) = -\beta\Omega + \lambda + S\Omega^2 + \gamma\Omega^3. \quad (3.26)$$

Этот оператор для любых значений λ , β , S и $\gamma \neq 0$ закононеопределен. Это означает, что уравнение $L(\Omega) = 0$ или, что то же самое,

$$\beta\Omega = \lambda + S\Omega^2 + \gamma\Omega^3,$$

имеет по крайней мере одно действительное решение: дисперсионная кривая $k(\Omega) = \lambda + S\Omega^2 + \gamma\Omega^3$ всегда пересекается с любой прямой, исходящей из начала координат. Например, для $\lambda = 0$ и $\beta \geq \beta_0 = -S^2/(4\gamma)$ все прямые $k = \beta\Omega$ дважды пересекают дисперсионную кривую $k = k(\Omega)$. Для $\beta < \beta_0$ прямые имеют одно пересечение, а при $\beta = \beta_0$ имеет место касание (рис. 3). Однако одного пересечения кажется достаточно, для того чтобы солитоны отсутствовали. С другой стороны, пример уравнения КДВ,

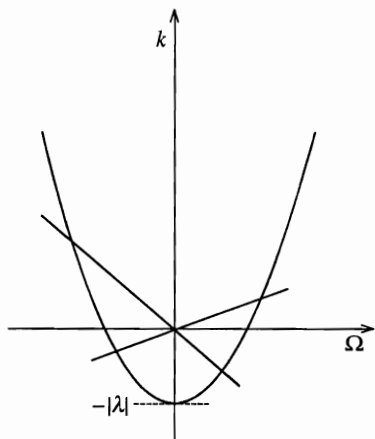


Рис. 1

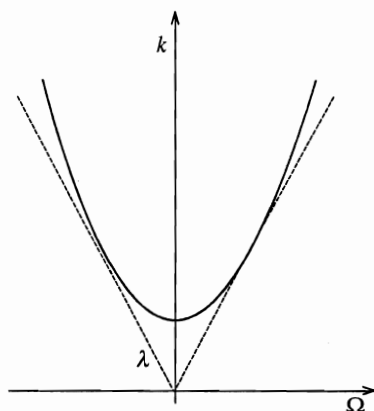


Рис. 2

Рис. 1. Дисперсионная кривая (3.23) для отрицательных λ . Любая прямая, исходящая из начала координат, пересекает дисперсионную кривую

Рис. 2. Дисперсионная кривая (3.23) для положительных λ . Штриховые прямые, касательные к дисперсионной кривой, соответствуют критическим скоростям $\beta = \pm 2\sqrt{\lambda}$. Эти прямые определяют границу солитонного конуса углов

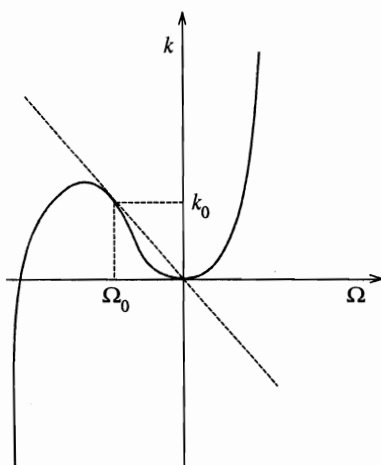


Рис. 3. Дисперсия третьего порядка $k = S\Omega^2 + \gamma\Omega^3$. Прямая штриховая линия касается дисперсионной кривой в точке $\Omega = \Omega_0$, но пересекает ее в точке $\Omega = 0$

которое имеет кубическую дисперсию и одновременно солитоны, казалось бы, противоречит сказанному выше. В действительности же здесь нет никакого противоречия. Объяснение всему — зависимость матричного элемента от волнового вектора, которая обеспечивает сокращение особенности в уравнении типа (2.18).

Покажем на примере уравнения КДВ

$$U_t + U_{xxx} + 6UU_x = 0, \quad (3.27)$$

как происходит сокращение особенности. Для солитона, двигающегося со скоростью v ,

$$L(k) = ik(v + k^2).$$

Если $v > 0$, то уравнение $L(k) = 0$ имеет один действительный корень $k = 0$. При этом аналогом (2.18) служит уравнение

$$U_k = \frac{3ik(U^2)_k}{L(k)},$$

которое очевидно не содержит особенности при $k = 0$. Аналогичным образом обстоит дело для других уравнений КДВ типа (см., например, [16]).

Недавно [17] были получены решения солитонного типа для обобщенного уравнения Шредингера, учитывающего одновременно дисперсию третьего порядка и соответствующую ей нелинейность (в данной статье это отвечает учету гамильтонианов (3.17) и (3.18)). Если соотношения между коэффициентами γ и β_2 произвольны, то солитонное решение, найденное в [17], имеет спектр, сосредоточенный в области частот $\Omega \sim 1/\gamma, 1/\beta_2$, т. е. сравнимых с частотой ω_0 . В единственном случае, когда соотношение между коэффициентами имеет вид

$$\frac{K_0 S}{\beta_1} = \frac{3\gamma}{4\beta_2},$$

спектр солитона смещается на малую величину. Этот случай является особым — уравнение (3.13) (записанное в безразмерных переменных),

$$iE_x + E_{tt} + 2|E|^2 E = i\epsilon(E_{ttt} + 6|E|^2 E_t), \quad (3.28)$$

допускает применение метода обратной задачи рассеяния (см., например, [8]). В этом случае независимо сохраняются гамильтонианы (3.17) и (3.18). Оба они порождаются одним и тем же ассоциированным оператором — оператором Захарова–Шабата [2]. Параметр ϵ в этом уравнении порядка $\delta\omega/\omega$, а E принимает значения порядка единицы. Солитонные решения для этого уравнения были впервые указаны в работах [18]. Простейшее из них — решение

$$E = e^{i\mu^2 x} \frac{\mu}{\text{Ch}\mu(t - \epsilon\mu^2 x)},$$

которое переходит при $\epsilon = 0$ в покоящийся солитон НУШ (3.24).

Вывод, который можно сделать из сказанного, состоит в том, что существование солитонных решений для операторов L третьего порядка обязан наличию производных в нелинейном члене или, иными словами, зависимости матричных элементов от частоты. Если же такой зависимости нет, либо она несущественна, как это, например, имеет место вблизи точки нулевой дисперсии, то нет никаких причин для сокращения особенностей в уравнении типа (2.18). Поэтому результаты работ [19] по численному наблюдению солитонов для НУШ с кубической дисперсией требуют определенного пересмотра (см. также работу [20], посвященную этому вопросу).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда дисперсия нелинейности отсутствует, либо несущественна. В такой ситуации дисперсия третьего порядка

не может обеспечить существование солитонов — необходим учет следующих членов разложения.

Для дисперсии четвертого порядка соответствующий оператор L имеет вид

$$L(\Omega) = -\beta\Omega + \lambda + S\Omega^2 + \gamma\Omega^3 + \delta\Omega^4. \quad (3.29)$$

Знакоопределенность L будет определяться теперь знаком параметра δ : при $\delta > 0$ оператор положительно определен и, соответственно, отрицательно определен в обратном случае.

Путем подходящего сдвига по частоте $\Omega \rightarrow \Omega + \nu$ из оператора L можно всегда исключить кубический член. Во-вторых, с помощью простого масштабирования и замены знаков $L(\Omega)$ приводится к следующим двум каноническим формам:

$$L(\Omega) = -\beta\Omega + k(\Omega) = -\beta\Omega + \lambda + (\Omega^2 - \gamma_0^2)^2, \quad (3.30)$$

$$L(\Omega) = -\beta\Omega + k(\Omega) = -\beta\Omega + \lambda + (\Omega^2 + \nu_0^2)^2. \quad (3.31)$$

Применяя далее критерии (3.22) к закону дисперсии (3.30) с $\lambda < 0$, легко видеть, что резонансное условие (3.22) удовлетворяется для всех значений β и поэтому в этой области параметров существование солитонов невозможно.

Для положительных $\lambda = \mu^4$ солитоны возможны в области $-\beta_{cr} \leq \beta \leq \beta_{cr}$, где

$$\beta_{cr} = 4\Omega_0(\Omega_0^2 - \nu_0^2) \quad \text{и} \quad \Omega_0^2 = \frac{1}{6} \left(2\nu_0^2 + \sqrt{16\nu_0^4 + 12\mu^4} \right). \quad (3.32)$$

Вблизи критической скорости (3.32) дисперсия положительна, и поэтому локализованные решения солитонного типа могут существовать только для фокусирующей ($\delta\chi > 0$) нелинейности, в то время как нелинейность по отношению к квадратичной дисперсии была бы дефокусирующей. Форма солитона в этом случае определяется из уравнения

$$L(i\partial_t)\psi = 2\sigma|\psi|^2\psi, \quad (3.33)$$

где $L(i\partial_t)$ задается формулами (3.30) или (3.31), $\sigma = \text{sign}(\delta\chi)$ определяет характер нелинейного взаимодействия: при $\sigma = 1$ имеет место притяжение, а $\sigma = -1$ — отталкивание. Солитонные решения возможны только для фокусирующей среды.

Простейшие решения (3.33) — покоящиеся солитоны. Их форма находится из интегрирования уравнения

$$\mu^4\psi + (\partial_t^2 + \nu_0^2)^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (3.34)$$

Важно, что движущийся солитон для дисперсии четвертого порядка имеет профиль, отличный от солитона для НУШ с квадратичной дисперсией. Он не может быть деформирован в стоячий солитон простым масштабированием и преобразованием фазы.

Для нахождения решения уравнение (3.34) необходимо дополнить граничными условиями:

$$\psi, \psi_t \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Симметрия уравнения (3.34) допускает действительные симметричные (относительно t) решения: $\psi(t) = \psi(-t) = \psi^*(t)$. На бесконечности ($t \rightarrow \pm\infty$) эти решения должны

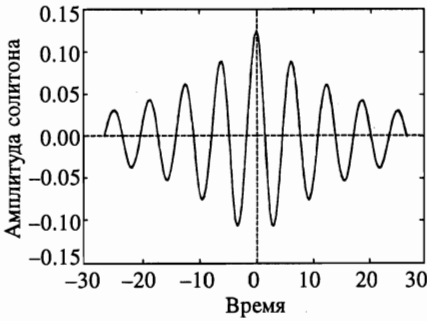


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость амплитуды солитона (в единицах ν_0^2) от времени (в единицах ν_0^{-1}) для $\mu/\nu_0 = 1/3$. Огибающая солитона с хорошей точностью имеет вид функции sech

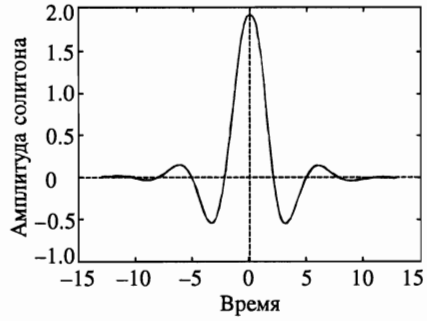


Рис. 5

Рис. 5. Форма солитона при $\mu/\nu_0 = 1$. Амплитуда солитона растет (в единицах ν_0^2), а его длительность (в единицах ν_0^{-1}) уменьшается. На размере солитона еще присутствуют осцилляции

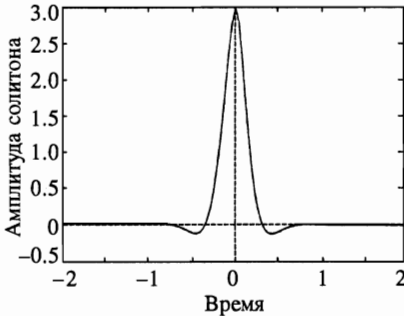


Рис. 6. Форма солитона при $\mu/\nu_0 = 10$. Осциллирующий хвост практически не виден

экспоненциально затухать, $\psi \sim e^{\nu t} \rightarrow 0$, где показатель ν определяется из уравнения

$$\nu^4 + (\nu^2 + \nu_0^2)^2 + \mu^4 = 0.$$

Корни этого уравнения задаются выражениями

$$\nu = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^4 + \nu_0^4} - \nu_0^2 \right) \right]^{1/2} \pm i \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu^4 + \nu_0^4} + \nu_0^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.35)$$

Все они комплексные. Это означает, в частности, что все стоячие солитоны должны иметь осциллирующую структуру. Если $\mu \sim \nu_0$, отношение действительной и мнимой частей показателя ν одного порядка. Критическое касание имеет место при $\mu = 0$. Вблизи этой точки реальная часть ν' мала при конечной величине мнимой части:

$$\nu = \pm \mu^2/\nu_0 \pm i\nu_0. \quad (3.36)$$

Именно в этом пределе возникают солитоны огибающих универсальной формы (2.23).

Для больших μ ($\mu \gg \nu_0$) корни имеют асимптотику

$$\nu = \mu \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 4–6 показаны солитоны для разных значений μ и ν_0 . В пределе малых $\mu \rightarrow 0$ (рис. 4) солитон имеет хорошо выраженную форму солитона огибающей, а при больших μ ($\mu \gg \nu_0$) солитон на своем масштабе имеет только одну осцилляцию (рис. 6). На больших расстояниях (больших временах) солитоны для всех значений параметров μ и ν_0 имеют затухающие экспоненциально осциллирующие хвосты. С ростом отношения μ/ν_0 растет амплитуда солитона, а его длительность уменьшается. Полученные здесь солитоны как действительные решения уравнения (3.34) одновременно являются решениями в виде стационарных солитонов для уравнения (2.1) с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - a(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \quad \text{и} \quad \chi a > 0.$$

Что касается дисперсии (3.31), то здесь ситуация подобна той, которая имеет место для НУШ с квадратичной дисперсией (3.20). Солитоны возможны для $\lambda > -\nu_0^4$. Единственное отличие с квадратичной дисперсией состоит в изменении величины критической скорости. Вблизи этих точек структура солитонов имеет универсальную форму (2.23).

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ

Рассмотрим устойчивость солитонов, полученных в предыдущем разделе. Вначале покажем, как устойчивость может быть доказана для НУШ с квадратичной дисперсией (3.20). Гамильтониан для него имеет вид

$$H = \int (|\psi_t|^2 - |\psi|^4) dt \equiv I_1 - I_2, \quad (4.1)$$

а солитонное решение (3.24) представляет собой стационарную точку гамильтониана при фиксированных импульсе

$$P = -i \int \psi \psi_t^* dt$$

и числе частиц (энергии) $N = \int |\psi|^2 dt$:

$$\delta(H + \beta P + \lambda N) = 0.$$

Следуя [21], докажем устойчивость, основываясь на теореме Ляпунова, а именно, покажем, что солитон реализует минимум H при фиксированных P и N . С этой целью удобно представить параметр λ в виде суммы $\beta^2/4$ и положительной величины μ^2 . Рассмотрим затем функционал $F = H + \beta P + (\beta^2/4)N$, который, как легко убедиться, представляет собой гамильтониан в движущейся системе координат: путем замены волновой функции $\psi \rightarrow \psi e^{it\beta/2}$ F переходит в H (4.1). Таким образом, для устойчивости достаточно установить, что H имеет минимум на стоящем солитоне.

Рассмотрим интеграл $I_2 = \int |\psi|^4 dt$. Легко проверить, что имеет место следующая цепочка неравенств (см. также [21, 22]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dt \leq \max_t |\psi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt = \int_{-\infty}^{t_{\max}} \frac{d|\psi|^2}{dt} dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt \leq$$

$$\leq 2N \int_{-\infty}^{t_{\max}} |\psi||\psi_t| dt \leq 2N \int_{-\infty}^{\infty} |\psi||\psi_t| dt \leq 2N^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t|^2 dt \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

Это неравенство может быть усилено путем отыскания наилучшей константы (вместо 2 в (4.2)). Очевидно, максимальное значение функционала

$$G[\psi] = \frac{I_2}{N^{3/2} I_1^{1/2}}$$

решает эту задачу. Чтобы найти максимум $G[\psi]$, достаточно рассмотреть все стационарные точки этого функционала, а затем выбрать ту, которая имеет максимальное значение G . Все стационарные точки $G[\psi]$ определяются из уравнения, которое совпадает с уравнением для стоящего солитона:

$$-\mu^2 \psi + \psi_{tt} + 2|\psi|^2 \psi = 0,$$

где $\lambda = \mu^2 > 0$. Отсюда легко видеть, что максимум $G[\psi]$ достигается на действительном солитонном решении, которое единственно (с точностью до постоянного фазового множителя):

$$\psi_s = \frac{\mu}{\text{ch}(\mu t)}.$$

После этого все интегралы в $G[\psi]$ легко вычисляются:

$$N = 2\mu, \quad I_{1s} = \frac{2}{3}\mu^3, \quad I_{2s} = \frac{4}{3}\mu^3,$$

и неравенство (4.2) окончательно принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dt \leq \frac{1}{\sqrt{3}} N^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (4.3)$$

Подстановка этого неравенства в (4.1) дает следующую оценку:

$$H \geq H_s + \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_{1s}} \right)^2,$$

где $H_s = -2\mu^3/3 < 0$ — значение гамильтониана в солитонном решении. Эта оценка становится точной в солитонном решении, что в соответствии с теоремой Ляпунова доказывает устойчивость солитонов с квадратичной дисперсией. Нам хотелось бы подчеркнуть, что это доказательство дает устойчивость солитонов не только относительно малых возмущений, но также по отношению к конечным.

Теперь обратимся к дисперсии четвертого порядка. Соответствующий функционал $F = H + \beta P + \lambda N$ представим в виде суммы среднего значения оператора $L(i\partial_t)$ (3.29) и нелинейного члена:

$$F = \int \psi^* L(i\partial_t)\psi dt - \int |\psi|^4 dt. \tag{4.4}$$

Для того чтобы доказать устойчивость солитонов, нам нужно найти аналог неравенства (4.3) для среднего $\langle L(i\partial_t) \rangle$.

Пусть $L(\Omega)$ положительно определенный полином $\Omega \in (-\infty, \infty)$ степени $N = 2l$. Тогда $L(\Omega)$ может быть разложен как

$$L_{2l}(\Omega) = \sum_{p=0}^l L_{2l-2p}(\Omega_p) \prod_{i=1}^{p-1} (\Omega - \Omega_i)^2, \tag{4.5}$$

где Ω_i и полиномы $L_{2l-2p}(\Omega)$ строятся исходя из L_{2l} по следующему правилу. Пусть $\Omega = \Omega_0$ — минимальная точка $L_{2l}(\Omega)$: $\min L_{2l}(\Omega) = L_{2l}(\Omega_0)$. Последнее позволяет записать $L_{2l}(\Omega)$ в виде

$$L_{2l}(\Omega) = L_{2l}(\Omega_0) + (\Omega - \Omega_0)^2 L_{2l-2}(\Omega),$$

где $L_{2l-2}(\Omega)$ — неотрицательный полином степени $2l-2$. Разложение полинома $L_{2l-2}(\Omega)$ дает новый неотрицательный полином степени $2l-4$. Дальнейшая рекурсия приводит нас к формуле (4.5). Важно, что все коэффициенты в этом разложении неотрицательны: $L_{2l-2p}(\Omega_p) \geq 0$. Очевидно также, что $L_0(\Omega_l) = C_{2l}$.

Разложение (4.5) порождает соответствующее разложение для среднего значения оператора $L_{2l}(i\partial_t)$:

$$\langle L_{2l}(i\partial_t) \rangle \equiv \int \psi^* L_{2l}(i\partial_t)\psi dt = L_{2l}(\Omega_0)N_0 + L_{2l-2}(\Omega_1)N_1 + \dots + L_0(\Omega_l)N_l, \tag{4.6}$$

где

$$N_p = \int |\psi_p|^2 dt; \quad \psi_p = \prod_{q=0}^{p-1} (i\partial_t + \Omega_q)\psi, \quad p \geq 1; \quad \psi_0 \equiv \psi.$$

Это представление показывает, как квадрат нормы положительно-определенного полиномиального оператора разлагается по нормам N_p с неотрицательными коэффициентами $L_{2l-2p}(\Omega_p)$.

Для положительно-определенной дисперсии четвертого порядка (3.29)

$$L(\Omega) = \lambda - \beta\Omega + D\Omega^2 + \gamma\Omega^3 + \Omega^4$$

разложение (4.5) читается как

$$L(\Omega) = \mu^4 + \eta^2(\Omega - \Omega_0)^2 + (\Omega - \Omega_0)^2(\Omega - \Omega_1)^2, \tag{4.7}$$

где μ^4 стоит вместо $L_4(\Omega_0)$ и $L_2(\Omega_1)$ заменено η^2 . Без ограничения общности в уравнении (4.7) можно положить $\Omega_0 = -\Omega_1 = \nu_0$ (это соответствует замене $\psi \rightarrow \psi \exp\{-i(\Omega_0 + \Omega_1)t/2\}$), так что формула (4.7) приобретает вид

$$L(\Omega) = \mu^4 + \eta^2(\Omega - \nu_0)^2 + (\Omega^2 - \nu_0^2)^2. \tag{4.8}$$

При этом разница в дисперсиях (3.30) и (3.31) состоит в том, является величина $2\nu_0^2 - \eta^2$ положительной либо отрицательной. Для (3.30) $2\nu_0^2 > \eta^2$, а для (3.30) $2\nu_0^2 < \eta^2$. Интегральное разложение нормы оператора L в соответствии с (4.8) записывается как

$$\langle L(i\partial_t) \rangle = \mu^4 N + \eta^2 \int |(i\partial_t + \nu_0)\psi|^2 dt + \int |(\partial_t^2 + \nu_0^2)\psi|^2 dt. \quad (4.9)$$

Это представление означает, что движущийся солитон может быть рассмотрен как стационарная точка нового гамильтониана

$$H' = \eta^2 \int |(i\partial_t + \nu_0)\psi|^2 dt + \int |(\partial_t^2 + \nu_0^2)\psi|^2 dt - \int |\psi|^4 dt \quad (4.10)$$

при фиксации числа частиц N :

$$\delta(H' + \mu^4 N) = 0. \quad (4.11)$$

Если гамильтониан H' будет при фиксированном N ограничен снизу, а его нижняя граница будет соответствовать солитону, то это будет означать устойчивость солитона.

В терминах нового гамильтониана солитонное решение подчиняется уравнению

$$\mu^4 \psi_s + \eta^2 (i\partial_t + \nu_0)^2 \psi_s + (\partial_t^2 + \nu_0^2)^2 \psi_s - 2|\psi_s|^2 \psi_s = 0. \quad (4.12)$$

Умножая далее это уравнение на ψ_s^* и интегрируя по t , приходим к следующему соотношению между интегралами, входящими в H' :

$$\begin{aligned} \mu^4 N_s + \eta^2 \int |(i\partial_t + \nu_0)\psi_s|^2 dt + \int |(\partial_t^2 + \nu_0^2)\psi_s|^2 dt - 2 \int |\psi_s|^4 dt &\equiv \\ &\equiv H'_s + \mu^4 N_s - \int |\psi_s|^4 dt = 0. \end{aligned}$$

Другое соотношение следует после умножения (4.12) на $t\partial_t\psi_s^*$ и интегрирования:

$$(\mu^4 + \eta^2 \nu_0^2 + \nu_0^4) N_s + (2\nu_0^2 - \eta^2) \int |\partial_t \psi_s|^2 dt - 3 \int |\partial_t^2 \psi_s|^2 dt - \int |\psi_s|^4 dt = 0.$$

Комбинируя оба эти соотношения, можно получить, что

$$H'_s = (\eta^2 \nu_0^2 + \nu_0^4) N_s + (2\nu_0^2 - \eta^2) \int |\partial_t \psi_s|^2 dt - 3 \int |\partial_t^2 \psi_s|^2 dt.$$

Для обеих дисперсий гамильтониан H'_s в солитонном решении ограничен сверху числом частиц, умноженным на некоторый положительный фактор: для (3.30)

$$H'_s \leq \left[\frac{1}{12} (2\nu_0^2 - \eta^2)^2 + \eta^2 \nu_0^2 + \nu_0^4 \right] N_s,$$

а для (3.31)

$$H'_s \leq (\eta^2 \nu_0^2 + \nu_0^4) N_s.$$

Теперь докажем ограниченность H' снизу при фиксированном значении N . Для этого вначале оценим два интеграла

$$J_1 = \int |(i\partial_t + \nu_0)\psi|^2 dt \quad \text{и} \quad J_2 = \int |(\partial_t^2 + \nu_0^2)\psi|^2 dt$$

через два других интеграла: N и $I_2 = \int |\psi|^4 dt$. Легко видеть, что для первого интеграла J_1 будет справедлива оценка (4.3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dt \leq \frac{1}{\sqrt{3}} N^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |(i\partial_t + \nu_0)\psi|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (4.13)$$

Используя вновь неравенство (4.3), можно получить искомую оценку и для J_2 , если вначале проинтегрировать раз по частям в интеграле $\int |\psi_t|^2 dt$, воспользоваться неравенством Коши–Буляковского:

$$\begin{aligned} \int |\psi_t|^2 dt &= - \int \psi^* (\psi_{tt} + \nu_0^2 \psi) dt + \int \nu_0^2 |\psi|^2 dt \leq \\ &\leq N^{1/2} \left[\int |(\partial_t^2 + \nu_0^2)\psi|^2 dt \right]^{1/2} + \nu_0^2 N, \end{aligned}$$

а затем подставить данный результат в (4.3):

$$J_2 \geq \frac{1}{N} \left(\frac{3I_2^2}{N^3} - \nu_0^2 N \right)^2. \quad (4.14)$$

С помощью неравенств (4.13) и (4.14) имеем оценку гамильтониана H' через N и I_2 :

$$H' \geq f(I_2) = \frac{3I_2^2}{N^3} + \frac{1}{N} \left(\frac{3I_2^2}{N^3} - \nu_0^2 N \right)^2 - I_2. \quad (4.15)$$

Продолжая это неравенство, получаем

$$f(I_2) \geq 2 \frac{\sqrt{3} I_2}{N^2} \left(\frac{3I_2^2}{N^3} - \nu_0^2 N \right) - I_2.$$

Наконец отсюда приходим к искомому неравенству — ограниченности гамильтониана:

$$H' \geq - \frac{4\sqrt{3}N}{9} \left[1 + \frac{\sqrt{3}N}{6\nu_0^2} \right]^{3/2}. \quad (4.16)$$

В соответствии с теоремой Ляпунова это доказывает устойчивость стационарной точки гамильтониана, соответствующей его минимуму. Эта минимальная точка есть некоторое солитонное решение уравнения (4.12). При этом необязательно, чтобы оно было единственным. Важно отметить, что в силу оценки (4.16) гамильтониан может принимать отрицательные значения. Если изначально гамильтониан $H' < 0$, то максимальное значение $|\psi|^2$ будет ограничено снизу сохраняющейся величиной (ср. с [21]):

$$\max_t |E|^2 \geq |H'|/N.$$

Таким образом, максимум интенсивности, существующий изначально, не может исчезнуть по мере распространения импульса (с ростом x). Излучение малой амплитуды, с другой стороны, должно обеспечивать релаксацию начального распределения к

некоторому солитонному состоянию, которое возможно благодаря ограниченности гамильтониана снизу.

В конце этого раздела скажем несколько слов об устойчивости стационарных солитонов (2.23). Вблизи критической скорости этот вопрос может быть рассмотрен в рамках параболического НУШ (3.20), для которого ответ уже известен. Что касается устойчивости солитонов со скоростями, далекими от критического значения, то необходимо учитывать члены следующего порядка по дисперсии. Как мы видели в этом разделе, члены четвертого порядка, обеспечивающие положительность соответствующего оператора L , также дают устойчивость солитонов. Мы полагаем, что полиномиальные положительно-определенные операторы четного порядка должны обеспечивать устойчивость одномерных солитонов. Возможно, только для операторов, растущих на бесконечности ($|\Omega| \rightarrow \infty$) пропорционально $\sqrt{|\Omega|}$ и медленнее, солитоны будут неустойчивыми.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение нам хотелось бы отметить, что правила отбора солитонов на основе критериев (2.8), (2.9) справедливы для произвольной размерности. Важно, что при этом условия существования солитонов остаются прежними: соответствующий оператор L должен быть знакоопределен. Более того, дисперсия четвертого порядка для всех физических размерностей D обеспечивает существование устойчивых солитонов ОНУШ с кубической нелинейностью (в пренебрежении ее дисперсией). Это следует из оценки дисперсионного члена гамильтониана через интегралы I_2 и N . Неравенство (4.3) в этом случае имеет вид

$$\int |\psi|^4 d^D x \leq C \left[\int |\Delta\psi|^2 d^D x \right]^{D/4} \left[\int |\psi|^2 d^D x \right]^{2-D/4}. \quad (5.1)$$

Подстановка этой оценки в гамильтониан

$$H = \int |\Delta\psi|^2 d^D x - \int |\psi|^4 d^D x$$

дает его ограниченность снизу:

$$\begin{aligned} H &\geq \int |\Delta\psi|^2 d^D x - C \left[\int |\Delta\psi|^2 d^D x \right]^{D/4} \left[\int |\psi|^2 d^D x \right]^{2-D/4} \geq \\ &\geq - \left(\frac{4}{D} - 1 \right) \left(\frac{4}{CD} \right)^{4/(D-4)} N^{(8-D)/(4-D)}. \end{aligned}$$

Помимо устойчивости солитона это доказывает также, что для сред с керровской нелинейностью волновой коллапс останавливается за счет дисперсии четвертого порядка для физических размерностей $D = 2, 3$.

И последнее замечание. В данной работе мы ограничились рассмотрением уравнений только с кубической нелинейностью, хотя в общем разложении индукции D (2.2) необходимо учитывать квадратичный по амплитуде член. Если касание имеет место при ненулевой частоте, то вблизи критической скорости квадратичные ангармоничные

члены не являются резонансными и могут быть исключены каноническим преобразованием (подробнее об этом см. обзор [14]). Эти члены приводят к перенормировке четырехволнового матричного элемента (3.8). Тем самым, универсальность поведения солитонов вблизи критической скорости сохраняет свою силу.

Авторы благодарят Ф. Диаса (F. Dias) за сообщение ссылок, касающихся гравитационно-капиллярных солитонов. Авторы признательны также А. И. Дьяченко за проведение численных расчетов. Эта работа была частично поддержана программой INTAS и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 97-01-00093).

Литература

1. C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, and R. B. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
2. В. Е. Захаров, А. Б. Шабаб, *ЖЭТФ* **61**, 118 (1971).
3. A. Hasegawa and F. Tappet, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
4. L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and M. N. Islam, *Opt. Lett.* **10**, 229 (1985).
5. L. F. Mollenauer, E. Lichtman, M. J. Neibelt, and G. T. Harvey, *Electron. Lett.* **29**, 910 (1993).
6. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Boston, Academic Press, Inc. (1989); пер. *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
8. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
9. M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia (1981).
10. A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia (1985).
11. M. S. Loguet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **200**, 951 (1989); **252**, 703 (1993).
12. G. Iooss and K. Kirchgassner, *C. R. Acad. Sci. Paris* **311**, I, 265 (1991).
13. J.-M. Vanden-Broeck and F. Dias, *J. Fluid Mech.* **240**, 549 (1992); F. Dias and G. Iooss, *Physica D* **65**, 399 (1993).
14. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *УФН* **167**, 1137 (1997).
15. N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, Benjamin, Reading, Mass. (1977).
16. J. Nycander, *Chaos* **4**, 253 (1994).
17. Е. М. Громов, В. И. Таланов, *Изв. ВУЗов Радиофизика* **XXXIX**, 735 (1996); *ЖЭТФ* **109**, 1 (1996).
18. R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jap.* **33**, 1456 (1973); *J. Math. Phys.* **14**, 805 (1973).
19. V. K. Mezentsev and S. K. Turitsyn, *Sov. J. Quantum Electron.* **21**, 555 (1991); *Sov. Lightwave Commun.* **1**, 263 (1991).
20. M. Klauder, W. Laedke, K. H. Spatschek, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev. E* **47**, R3844 (1993).
21. E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, *Phys. Rep.* **142**, 103 (1986).
22. О. А. Ладыженская, *Математические проблемы динамики несжимаемой вязкой жидкости*, Наука, Москва (1970).